УДК 517.9:681.5.013:629.735.45-519 (045)

Бельская А. А., Артемьева О. Н., Калакура Р. Т.
Национальный авиационный университет, Киев

ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАРЫ ДИСТАНЦИОННО ПИЛОТИРУЕМЫХ ВЕРТОЛЁТОВ ОДНОВИНТОВОЙ СХЕМЫ В ФРОНТАЛЬНОМ СТРОЮ С МОНОГРУЗОМ

В статье приведена линейная математическая модель (ММ), *полученная в результате линеаризации* ММ *бокового движения дистанционно пилотируемого вертолета с учётом влияния моногруза. Линейная* ММ *вертолета может быть использована при моделировании собственных движений вертолета в боковом канале, а также при синтезе систем управления различными режимами работы бокового канала*

Математическая модель пространственного движения вертолёта

Дистанционно управляемый вертолет необходимо рассматривать как наиболее технологически простое и недорогое изделие. В этом смысле целесообразно использовать одновинтовую компоновку с хвостовым рулевым винтом, имеющим электрический привод. Схема сил и моментов, действующих на вертолёт, представлена на рис. 1.

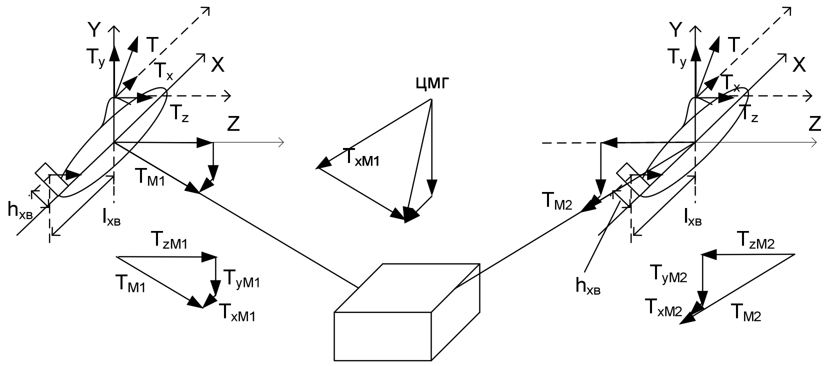

Рис. 1. Два вертолета в фронтальном строю с общей подвеской моногруза

Пренебрегая упругостью конструкции фюзеляжа, полагая, что скорость ветра равна нулю (путевая и воздушная скорости равны), а оси системы координат OXYZ направлены по главным осям инерции вертолёта (все центробежные моменты инерции равны нулю), составим уравнения пространственного движения (три уравнения равновесия сил и три уравнения равновесия моментов) предполагая при этом, что Земля плоская и не вращается:

$$\begin{aligned}
&m\left(\dot V_x+\omega_y V_z-\omega_z V_y\right)=T_x+R_x-mg\sin\vartheta\cos\gamma-T_{xMi};\\
&m\left(\dot V_y+\omega_z V_x-\omega_x V_z\right)=T_y+R_y-mg\cos\vartheta\cos\gamma-T_{yMi};\\
&m\left(\dot V_z+\omega_x V_y-\omega_y V_x\right)=T_z+R_z+T_{хв}+mg\cos\vartheta\sin\gamma+T_{zMi};\\
&I_x\dot\omega_x+\left(I_z-I_y\right)\omega_y\omega_z=T_z h_{нв}-T_{хв}h_{хв}+M_x^{а};\\
&I_y\dot\omega_y+\left(I_x-I_z\right)\omega_x\omega_z=M_{р\,нв}-T_{хв}\left(b_{хв}-\Delta x\right)-T_z\Delta x+M_y^{а};\\
&I_z\dot\omega_z+\left(I_y-I_x\right)\omega_x\omega_y=M_{р\,хв}-T_x h_{нв}+T_y\Delta x+M_z^{а}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь I_x, I_y, I_z – основные моменты инерции вертолёта; ϑ, γ – углы тангажа и крена фюзеляжа вертолёта; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости фюзеляжа; T_x, T_y, T_z – составляющие вектора тяги несущего винта; $T_{xMi}, T_{yMi}, T_{zMi}$ – суммарная реакция веса и аэродинамического сопротивления моногруза; $T_{хв}$ – тяга хвостового винта; $M_{р\,нв}, M_{р\,хв}$ – реактивные моменты несущего и хвостового винтов;

$M_x^{\text{а}}, M_y^{\text{а}}, M_z^{\text{а}}$ – аэродинамические моменты, воздействующие на фюзеляж; V_x, V_y, V_z – составляющие воздушной скорости вертолёта V; R_x, R_y, R_z – проекции аэродинамических сил на связанные оси.

Аэродинамические силы, воздействующие на фюзеляж, определяются в скоростной системе координат. Их проекции на связанные оси равны (α, β – углы атаки и скольжения вертолёта.):

$$\begin{aligned}
R_x &= X_{\text{а}}\cos\beta\cos\alpha - Y_{\text{а}}\sin\alpha - Z_{\text{а}}\sin\beta\cos\alpha,\\
R_y &= -X_{\text{а}}\cos\beta\sin\alpha + Y_{\text{а}}\cos\alpha - Z_{\text{а}}\sin\beta\sin\alpha,\\
R_z &= X_{\text{а}}\sin\beta + Z_{\text{а}}\cos\beta,
\end{aligned} \tag{2}$$

Так как интенсивное маневрирование при решении задач мониторинга не предполагается, то разделим пространственное движения вертолёта на два изолированных движения – продольное и боковое. Кроме того, при линеаризации этих уравнений будем считать, что скорость вращения несущего винта $\Omega_{\text{нв}}$ стабилизирована.

Линеаризация математической модели бокового движения вертолёта

При отсутствии ветра земная и воздушная скорости равны. Кроме того, введем допущение, что $\omega_z = 0$ и $\vartheta = \text{const}$. В таком случае уравнения бокового движения в связанной системе координат:

$$\begin{aligned}
&m\left(\dot{V}_z + V_y\omega_x - V_x\omega_y\right) = Z\left(V_z, \omega_x, \omega_y, \gamma, \eta, \varphi_{\text{хв}}\right),\\
&I_x\omega_x = M_x\left(V_z, \omega_x, \omega_y, \eta, \varphi_{\text{хв}}\right),\\
&I_y\omega_y = M_y\left(V_z, \omega_x, \omega_y, \eta, \varphi_{\text{хв}}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

В правых частях уравнений (3) обозначены боковая суммарная сила и моменты, действующие на вертолёт в соответствии с уравнениями (1), (2). Определим линейные приращения этих сил и момента:

$$\begin{aligned}
\Delta Z &= \left(\frac{\partial Z}{\partial V_z}\right)_0 \Delta V_z + \left(\frac{\partial Z}{\partial \omega_x}\right)_0 \Delta\omega_x + \left(\frac{\partial Z}{\partial \omega_y}\right)_0 \Delta\omega_y + \left(\frac{\partial Z}{\partial \gamma}\right)_0 \Delta\gamma + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_0 \Delta\eta + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi_{\text{хв}}}\right)_0 \Delta\varphi_{\text{хв}},\\
\Delta M_x &= \left(\frac{\partial M_x}{\partial V_z}\right)_0 \Delta V_z + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \omega_x}\right)_0 \Delta\omega_x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \omega_y}\right)_0 \Delta\omega_y + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \eta}\right)_0 \Delta\eta + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \varphi_{\text{хв}}}\right)_0 \Delta\varphi_{\text{хв}},\\
\Delta M_y &= \left(\frac{\partial M_y}{\partial V_z}\right)_0 \Delta V_z + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \omega_x}\right)_0 \Delta\omega_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \omega_y}\right)_0 \Delta\omega_y + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \eta}\right)_0 \Delta\eta + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \varphi_{\text{хв}}}\right)_0 \Delta\varphi_{\text{хв}};\\
&\Delta\left(V_y\omega_x\right)_0 = V_{y0}\Delta\omega_x + \omega_{x0}\Delta V_y;\ \Delta\left(V_x\omega_y\right)_0 = V_{x0}\Delta\omega_y + \omega_{y0}\Delta V_x;\ \omega_{x0} = 0,\ \omega_{y0} = 0,\ V_{x0} = V,\ V_{y0} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь η – угол отклонения автомата перекоса в боковом канале; $\varphi_{\text{хв}}$ – шаг хвостового винта, индекс «0» определяет точку линеаризации.

Записываем исходное уравнение в нормальной безразмерной форме. Для этого делим первое уравнение на mV, второе – на I_xL/V, а третье – на I_yL/V. Обозначим $\Delta V_z/V = V_z$, $\Delta\omega_x L/V = \omega_x$,. $\Delta\omega_y L/V = \omega_y$, $\Delta\eta = \eta$, $\Delta\varphi_{\text{хв}} = \varphi_{\text{хв}}$.

Используя эти обозначения, систему линеаризованных уравнений бокового канала вертолёта в отклонениях запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_z = a_z^{V_z} V_z + \left(a_z^{\omega_x} - V_{y0}\right)\omega_x + \left(a_z^{\omega_y} + V_{x0}\right)\omega_y + a_z^{\gamma}\gamma + a_z^{\eta}\eta + a_z^{\varphi_{\text{хв}}}\varphi_{\text{хв}},\\
&\dot{\omega}_x = a_{m_x}^{V_z} V_z + a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_x}^{\omega_y}\omega_y + a_{m_x}^{\eta}\eta + a_{m_x}^{\varphi_{\text{хв}}}\varphi_{\text{хв}},\\
&\dot{\omega}_y = a_{m_y}^{V_z} V_z + a_{m_y}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_y}^{\omega_y}\omega_y + a_{m_y}^{\eta}\eta + a_{m_y}^{\varphi_{\text{хв}}}\varphi_{\text{хв}},\quad \dot{\gamma} = a_{\gamma}^{\omega_x}\omega_x.
\end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициенты системы уравнений (5) обозначим следующим образом:

$$a_{11} = a_z^{V_z} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial Z}{\partial V_z}\right)_0,\ a_{12} = \left(a_z^{\omega_x} - V_{y0}/L\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\partial Z}{\partial \omega_x}\right) - V_{y0}\right)_0,\ a_{13} = \left(a_z^{\omega_y} - V_{x0}/L\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\partial Z}{\partial \omega_y}\right) + V_{x0}\right)_0,$$

$$a_{14} = a_z^{\gamma} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial Z}{\partial \gamma}\right)_0,\ b_{11} = a_z^{\eta} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_0,\ b_{12} = a_z^{\varphi_{\text{хв}}} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi_{\text{хв}}}\right)_0,\ a_{21} = a_{m_x}^{V_z} = \frac{L}{I_x}\left(\frac{\partial M_x}{\partial V_z}\right)_0,$$

$$a_{22} = a_{m_x}^{\omega_x} = \frac{1}{I_x}\left(\frac{\partial M_x}{\partial \omega_x}\right)_0,\ a_{23} = a_{m_x}^{\omega_y} = \frac{1}{I_x}\left(\frac{\partial M_x}{\omega_y}\right)_0,\ b_{21} = a_{m_x}^{\eta} = \frac{L}{I_xV}\left(\frac{\partial M_x}{\partial \eta}\right)_0,\ b_{22} = a_{m_x}^{\varphi_{\text{хв}}} = \frac{L}{I_zV}\left(\frac{\partial M_x}{\partial \varphi_{\text{хв}}}\right)_0,$$

$$a_{31} = a_{m_y}^{V_z} = \frac{L}{I_y}\left(\frac{\partial M_y}{\partial V_z}\right)_0,\ a_{32} = a_{m_y}^{\omega_x} = \frac{1}{I_y}\left(\frac{\partial M_y}{\omega_x}\right)_0,\ a_{33} = a_{m_y}^{\omega_y} = \frac{1}{I_y}\left(\frac{\partial M_y}{\omega_y}\right)_0,\ b_{31} = a_{m_y}^{\eta} = \frac{L}{I_yV}\left(\frac{\partial M_y}{\partial \eta}\right)_0,$$

$$b_{32} = a_{m_y}^{\varphi_{\text{хв}}} = \frac{L}{I_yV}\left(\frac{\partial M_y}{\partial \varphi_{\text{хв}}}\right)_0,\ a_{43} = a_{\gamma}^{\omega_x} = \frac{V}{L}.$$

Систему уравнений бокового движения вертолёта представим в матричной форме:

$$\dot{y} = Ay + B\Delta. \tag{6}$$

Здесь $y=\left(V_z\ \omega_x\ \omega_y\ \gamma\right)^T$ – вектор состояния; $\Delta=\left(\eta\ \varphi_{хв}\right)^T$ – вектор управления. Матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Коэффициенты можно получить в процессе лётных испытаний или продувки модели вертолета в аэродинамической трубе.

Можно произвести аналитический расчёт, применив принцип подобия, по известным аэродинамическим характеристикам вертолета соответствующей компоновки.

Пусть массо-геометрические параметры вертолета в боковом канале равны: $m=250$кг, $I_x=120\,\text{Нс}^2\text{м}$, $I_y=190\,\text{Нс}^2\text{м}$, $L=0.5$м– расстояние от передней кромки фюзеляжа до центра масс. Скорость полёта $V=30\ \text{мс}^{-1}$.

Для дистанционно управляемого вертолета, с компоновкой известной модели МИ-1 в соответствии с принципом подобия были рассчитаны элементы матриц (7). Результаты расчётов приведены ниже:

$$a_{11}=-1.86,\ a_{12}=-0.196,\ a_{13}=-0.2,\ a_{14}=0.15,\ a_{21}=-0.25,\ a_{22}=-0.7,\ a_{23}=-0.2,\ a_{24}=0{,}065,$$
$$a_{31}=-0.55,\ a_{32}=-0.3,\ a_{33}=-0.8,\ a_{43}=20,\ b_{11}=1.5,\ b_{12}=2,\ b_{21}=0.3,\ b_{22}=0.3,\ b_{31}=0.25,\ b_{32}=0.01.$$

Синтез системы управления

Оператор управляет ведущим вертолетом (левым), а ведомый имеет систему стабилизации своего положения относительно ведущего. Ниже будет рассмотрена система управления движением ведущего вертолёта в режиме маршрутного полёта. Для удобства оператора синтезирована система с автономным управлением автоматом перекоса и шагом хвостового винта в боковом канале. Синтез производился с использованием программного пакета MathCad.

1. Систему уравнений (6) представим виде

$$\dot z = Az + B\text{Д}_2 + f_2 \qquad (8)$$

Здесь $z=\left(v_3\ \omega_1\ \omega_2\ \psi\right)^T$ – вектор состояния, $\text{Д}_2\left(\eta\,\varphi_2\right)$ – вектор управления. Матрицы равны:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} -1.86 & -.196 & -.2 & .15 \\ -.25 & -.7 & -.2 & .065 \\ -.55 & -.3 & -.8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1.5 & 2. \\ .3 & .3 \\ .25 & .01 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю определитель характеристической матрицы:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q_2=pE-A,\ Q_2=\begin{pmatrix} p+1.86 & .196 & .2 & -.15 \\ .25 & p+.7 & .1 & -.065 \\ .15 & .2 & p+.8 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & p \end{pmatrix};$$

$$\left|Q_1\right| = p^4+3.36p^3+4.431p^2+3.558p+1.521=0\,.$$

Корни характеристического уравнения вертолёта равны $\left(-1.045,-1.629,-.3432\pm.881i\right)$. Вертолёт по боковому каналу находится вблизи колебательной границы устойчивости.

3. Для удобства оператора обеспечим автономное управление с помощью автомата перекоса и общего шага хвостового винта.

Замкнутая система «Вертолет+САУ» описывается матричным уравнением

$$\dot z = \text{C}_2 z + K_2\text{U}_{23} + f_2 \qquad (9)$$

Здесь U_{23} – вектор заданных управлений, C_2 – матрица системы «Вертолет+САУ», K_2 – матрица коэффициентов усилений каналов САУ, T_{21}, T_{22}, T_{23} – постоянные времени автономных каналов,

$$\mathrm{U}_{23} = \begin{pmatrix} v_{33} \\ \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{pmatrix},\ \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix},\ c_{21} = c_{22} = -2, c_{23} = -1,\ \mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix} k_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ k_{21} = k_{22} = 1.5,\ k_{23} = 2,$$

$$T_{21} = -1/c_{21} = .5\text{с}, \qquad T_{22} = -1/c_{22} = 1\text{с}, \qquad T_{23} = -1/c_{23} = 1\text{с}.$$

4. Приравняв правые части уравнений (8) и (9), определим вектор управлений $Д_2(\eta\ \varphi_2)$:

$$Az + BД_2 + f_2 = \mathrm{C}_2 z + \mathrm{K}_2 \mathrm{U}_{23} + f_2. \qquad (10)$$

Матрица B прямоугольная, поэтому приближенное решение уравнения (10) ищем через псевдообратную относительно B матрицу

$$M_2 = \left(B^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -.19 & 1.138 & 3.772 & 0 \\ .632 & -.787 & -2.849 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решением уравнения (10) будет

$$Д_1 = \left(B^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} B^{\mathrm{T}} \left[\left(\mathrm{C}_1 - A\right) y + \mathrm{K}_1 \mathrm{U}_3\right].$$

Законы управления соответствуют строчкам полученного выше решения:

$$\begin{aligned} \eta &= -.2844 v_{33} + 2.277\omega_{13} + 7.543\omega_{23} + 2.386 v_3 + 0.7528\omega_1 - .5646\omega_2 - 0.0456\psi, \\ \varphi_2 &= 0.9485 v_{33} - 1.5751\omega_{13} - 5.699\omega_{23} - 1.852 v_3 - 0.4946\omega_1 + .5389\omega_2 + 0.0437\psi. \end{aligned} \qquad (11)$$

Законы управления (11) были реализованы в системе Matlab-Simulink, структура модели представлена на рис. 2.

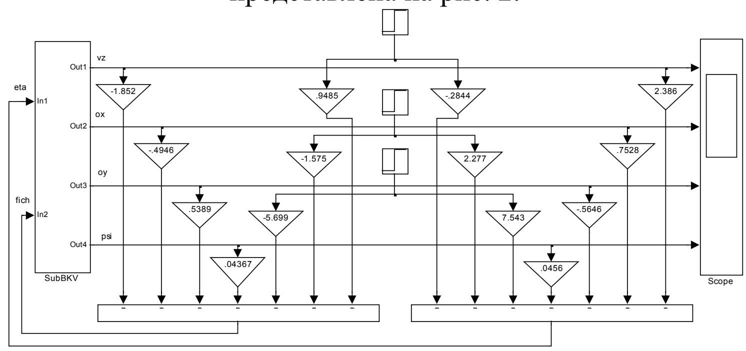

Рис.2. Структурная схема модели бокового канала системы «САУ- пара вертолетов»

В левой стороне рисунка изображен блок «SubBKV», который соответствует боковому каналу вертолёта, уравнения (6). Структурная схема модели представлена на рис.3.

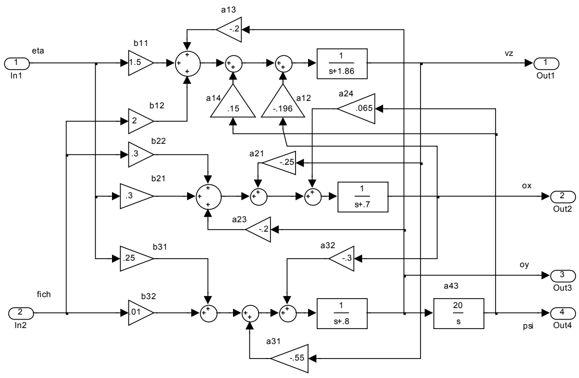

Рис.3. Структурная схема модели бокового канала вертолета

Науковий керівник – Асланян А.Е., д-р техн. наук, проф.