ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ІНЖЕНЕРІЇ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 51.681.3

Крывый С.Л.
Киевский национальный университет имени Т. Шевченко

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНТЕКСТЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫПОЛНИМОСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ. Ч.II

Предложены алгоритмы построения минимального порождающего множества решений систем линейных однородных уравнений в множестве натуральных чисел и базиса множества решений системы линейных однородных и неоднородных диофантовых уравнений в кольцах и полях вычетов по модулю некоторого числа. Эти алгоритмы рассматриваются в контексте решения проблемы выполнимости системы ограничений.

Запропоновано алгоритми побудови мінімальної породжуючої множини розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь в множині натуральних чисел і базису множини розв'язків системи лінійних однорідних і неоднорідних діофантових рівнянь у кільцях і полях лишків за модулем деякого числа. Ці алгоритми розглядаються в контексті розв'язання проблеми виконуваності системи обмежень.

The algorithms for computation of minimal supported set of solutions for systems of linear Diophantine homogeneous equations over set of natural numbers and basis of systems of linear Diophantine homogeneous and inhomogeneous equations in ring and field of remainders on modulo of a number. This algorithms consider in context of solving of general constraint satisfaction problem

Ключевые слова: *диофантовые уравнения, выполнимость ограничений, критерий совместности*

Введение

Одной из фундаментальных проблем в современном программировании с ограничениями (constraint programming – CP) является проблема определения вычислительной сложности решения задач, включающих ограничения. Существует большое количество проблем, называемых проблемами выполнимости ограничений (constraint satisfaction problems – *CSP*), являющихся *NP*-трудными [20]. Поэтому маловероятно существование общего эффективного алгоритма для решения произвольной проблемы, связанной с ограничениями. Тем не менее, во многих практических задачах возникают проблемы, решение которых вычисляется более эффективно.

Рассмотрим некоторые из решений таких проблем, в частности, проблемы выполнимости линейных диофантовых ограничений в виде уравнений [9] – [18].

В данной работе приводится краткий обзор фактов, связанных с решением проблемы выполнимости множества ограничений, а также алгоритмов построения минимального порождающего множества решений и базиса множества решений систем линейных диофантовых уравнений в множестве целых чисел, натуральных чисел, поле и кольце *Zm* вычетов по модулю простого и составного числа *m*. Данная работа является продолжением работ [3] – [8]. В основе предлагаемых алгоритмов лежит *TSS*-метод построения минимального порождающего множества решений систем линейных однородных диофантовых уравнений в

множестве натуральных чисел N [7]. К такого рода системам и методам их решений сводятся задачи математических игр [1], распознавания изображений и построение линейных мозаик [2], криптографии [9], распараллеливания циклов [12] и многие другие задачи.

1. Язык систем линейных диофантовых уравнений над N

Этот язык является примером $NP-$ полного языка.

Известно, что множество B минимальных элементов множества решений M системы S составляет базис множества M и если $|M|>1$, то базис B всегда существует, конечен и всякий элемент из M представим в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из B. Известно, также что процесс решения СЛНДУ или системы линейных диофантовых неравенств (СЛДН) может быть сведен к решению СЛОДУ, поэтому основное место в исследованиях уделяется СЛОДУ. Следует заметить, что в общем случае такое сведение увеличивает размерность пространства над которым рассматривается полученная СЛОДУ, что сказывается на эффективности вычислений. Однако, имеются методы сведения, которые не увеличивают размерности пространства [13].

1.1 Критерий совместности СЛОДУ

Критерий совместности СЛОДУ, используемый здесь, и алгоритм его реализации подробно описаны в работах [7, 8, 10], поэтому приведем лишь необходимые факты, нужные в дальнейшем.

Пусть дана СЛОДУ S. Рассмотрим множество векторов канонического базиса $M'_0=\{e_1,e_2,...,e_q\}$ и первое уравнение $L_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1q}x_q$ системы S. С помощью функции $L_1(x)$ разобъем элементы множества M'_0 на такие три группы $M_1^0=\{e^0\mid L_1(e^0)=0\}$, $M_1^+=\{e^+\mid L_1(e^+)=0\}$ и $M_1^-=\{e^-\mid L_1(e^-)=0\}$. Ясно, что если одно из множеств $M_1^0\cup M_1^+$ или $M_1^0\cup M_1^-$ пусто, то уравнение $L_1(x)=0$ не имеет нетривиальных решений в множестве натуральных чисел. Допустим, что хотя бы два из множеств M_1^0, M_1^+, M_1^- – непусты, тогда рассмотрим множество

$$M'_1=M_1^0\cup\left\{\begin{matrix}e_{ij}\mid e_{ij}=-L_1(e_i)e_j+L_1(e_j)e_i,\\ e_j\in M_1^+,e_i\in M_1^-\end{matrix}\right\}.$$

Используя функцию $L_2(x)$ разобъем элементы множества M'_1 аналогично предыдущему также на три группы $M_2^0=\{e^0\mid L_2(e^0)=0\}$, $M_2^+=\{e^+\mid L_2(e^+)=0\}$ и $M_2^-=\{e^-\mid L_2(e^-)=0\}$. Допустим, что хотя бы два из этих множеств непусты, тогда построим множество

$$M'_2=M_2^0\cup\left\{\begin{matrix}e_{ij}\mid e_{ij}=-L_2(e_i)e_j+L_2(e_j)e_i,\\ e_j\in M_2^+,e_i\in M_2^-\end{matrix}\right\}.$$

Предположим, что таким способом построено множество M'_j из множеств $M_j^0=\{e_r^0\mid L_j(e_r^0)=0\}$, $M_j^+=\{e_i^+\mid L_j(e_i^+)=0\}$ и $M_j^-=\{e_s^-\mid L_j(e_s^-)=0\}$ с помощью функции $L_j(x)$ и это множество непусто. Непосредственно из этих построений вытекает такое утверждение.

Теорема 1. Элементы множества M'_j есть решениями системы уравнений $L_1(x)=0\,\&\,L_2(x)=0\,\&\,...\,\&\,L_j(x)=0$.

Определение 1. Множество M'_j, построенное выше, будем называть усеченным множеством решений системы $S'=L_1(x)=0\,\&\,L_2(x)=0\,\&\,...\,\&\,L_j(x)=0$.

Пусть $M'_j=\{e'_1,...,e'_k\}$ – усеченное множество решений системы S', а M_j – множество всех ее решений. Тогда имеет место такое утверждение.

Теорема 2. Для всякого вектора $x\in M_j\setminus M'_j$ существует представление в виде неотрицательной линейной комбинации вида

$$t(x)=b_1e'_1+...+b_le'_k \quad (1)$$

где $t,b_i\in N$, $t\neq 0$, $e'_1\in M'_j$, $i=1,...,k$.

Доказательство теоремы использует следующую лемму.

Лемма 1. Любая неотрицательная линейная комбинация вида

$$y=ce_i^+ + de_s^-$$

может быть представлена как неотрицательная линейная комбинация вида $ky=ue_i^+ + ve_{is}^0$ или же как неотрицательная линейная комбинация

вида $ky = ue_i^- + ve_{is}^0$, где k, u, v – натуральные числа,

Критерий проверки совместности СЛОДУ формулируется следующим образом.

Теорема 3. Система $S = L_1(x) = 0 \,\&\, L_2(x) = 0 \,\&\, ... \,\&\, L_{p-1}(x) \,\&\, L_j(x) = 0$ совместна тогда и только тогда, когда $M'_p \neq \varnothing$

Заметим, что из теорем 2, 3 следует, что каждый вектор усеченного множества решений можно разделить на НОД его координат, если этот НОД отличен от единицы. Это позволяет уменьшить величину координат этих векторов и более эффективно проводить вычисления.

Легко заметить, что усеченные множества решений зависят от порядка, в котором расположены уравнения системы. Исключение "лишних" векторов из усеченного множества решений базируется на следующей теореме.

Теорема 4. Пусть S – СЛОДУ вида (1) и M'_p – ее усеченное множество решений, состоящее из k элементов. Тогда любой вектор x из M'_p такой, что $tx >> e'_i \in M'_p \setminus \{x\}$, $i = 1,2,..., k-1$, $t \in N$ и $t \neq 0$ имеет представление вида

$$mx = b_1 e'_1 + ... + b_{k-1} e'_{k-1},$$

где $m \in N$, $m \neq 0$, $b_i \in N$, $e_i \in M'_p$, $i = 1,2,..., k-1$.

Из приведенной теоремы вытекает следующая простая процедура чистки усеченного множества решений: вектор x удаляется из усеченного множества решений, если x больше или его произведение tx больше некоторого из оставшихся векторов усеченного множества решений. В качестве множителя t можно взять, в частности, максимальную координату векторов текущего усеченного множества решений.

1.2 Свойства усеченного множества решений СЛОДУ

Допустим, что СЛОДУ S совместна и $M' = \{e'_1, ..., e'_k\}$ ее усеченное множество решений.

Теорема 5. Вектора из усеченного множества решений являются минимальными решениями СЛОДУ S, т.е. являются ее базисными решениями.

Теорема 6. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ минимальное решение СЛОДУ S и $M' = \begin{Bmatrix} e'_1 = (\alpha_{11}, ..., \alpha_{1q}), e'_2 = (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2q}), .. \\ e'_k = (\alpha_{k1}, ..., \alpha_{kq}) \end{Bmatrix}$ ее усеченное множество решений. Тогда имеет место неравенство

$$x' = \max_i x_i \le k \cdot \max_{i,j} \alpha_{i,j},$$

где $\alpha_{i,j}$ – координаты векторов $e'_i \in M'$, $i = 1,..., k$, $j = 1,..., q$

Пример 1. Система

$$S_1 = \begin{cases} 5x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 7x_4 - 4x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 + x_3 + 1x_4 + 0x_5 - 4x_6 + 0x_7 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 4x_7 = 0 \end{cases}$$

имеет 10 базисных векторов-решений:

$e_1 = (4,0,0,0,5,1,0)$ $e_6 = (1,1,2,3,8,,2)$
$e_2 = (0,4,0,0,0,2,1)$ $e_7 = (2,2,0,2,6,2,1)$
$e_3 = (0,0,4,0,3,1,2)$ $e_8 = (0,2,2,2,5,2,2)$
$e_4 = (0,0,0,4,7,1,1)$ $e_9 = (1,3,0,2,3,2,1)$
$e_5 = (3,1,0,3,9,2,1)$ $e_{10} = (2,0,2,0,4,1,1)$

Усеченное множество решений составляют вектора e_1, e_2, e_3, e_4. Максимальное значение координат этих векторов равно 7, максимальное значение координат базисных векторов равно 9 и 9 < 4*7 = 28.

1.3 Сложность алгоритма проверки совместности СЛОДУ

Нетрудно показать, что в общем случае временная сложность алгоритма определения совместности СЛОДУ экспоненциальная по числу уравнений в системе. Действительно, рассмотрим систему вида

$$S = \begin{cases} -x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 = 0 \end{cases}$$

Усеченное множество решений данной системы имеет 2^3 векторов. Нетрудно показать, что такого рода системы, т.е. системы состоящие из p уравнений с $2p+1$ неизвестными и построенные путем присоединения к столбцу из -1 размерности p двух единичных квадратных матриц размерности $p \times p$, имеют усеченное множество, состоящее из 2^p элементов. Таким образом, имеет место такая теорема.

Теорема 7. Сложность алгоритма определения совместности СЛОДУ имеет экспоненциальную сложность по числу уравнений в системе.

Следует, однако, заметить, что в случае такого рода систем, усеченное множество

решений совпадает с базисом всего множества решений данной СЛОДУ.

1.4 СЛОДУ, совместность которых определяется за полиномиальное время

В связи с вышесказанным, интересно было бы указать класс СЛОДУ, для которых этот алгоритм работает полиномиальное время. Один из таких классов систем дает следующее утверждение.

Теорема 8. Если матрица СЛОДУ S имеет вид $A = (B \mid B')$, где A – матрица размерности $p \times (q + p)$, B – матрица размерности $p \times q$, а B' – диагональная матрица размерности $p \times p$ с отрицательными элементами на диагонали, то система S всегда совместна и ее усеченное множество решений определяется за время, пропорциональное величине $O(p(p+q))$.

Доказательство теоремы очевидным образом следует из построения усеченного множества решений. Действительно, на каждом шаге алгоритма число элементов в усеченном множестве решений не превосходит величины $p+q$. Следовательно, верхняя оценка временной сложности ограничена величиной $p(p+q)$.

Для данного класса СЛОДУ проблема состоит лишь в том, чтобы найти хотя бы одно базисное решение для такой системы.

Пример 2. Определить совместность СЛОДУ

$$S = \begin{cases} 5x_1 + 0x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 - 3x_5 + 0x_6 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases}$$

В данной системе

$$B = \begin{pmatrix} 5\,0\,3 \\ 1\,2\,1 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix},\ B' = \begin{pmatrix} -4\,0\,0 \\ 0\,-3\,0 \\ 0\,0\,-2 \end{pmatrix}.$$

Усеченное множество решений для этой системы состоит из трех векторов

$$(12,0,0,15,4,0),(0,6,0,0,4,3),(0,0,12,9,4,12).$$

Базис множества решений этой системы состоит из 11 векторов.

1.5 Критерий совместности СЛНДУ

Пусть

$$S = \begin{cases} L_1(x) = \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1q}x_q = 0 \\ L_2(x) = \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2q}x_q = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ L_p(x) = a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = b_p, \end{cases}$$

– СЛНДУ, где $a_{i,j} \in Z$, $x_j \in N$, $i = 1,...,p$, $j = 1,...,q$. Перейдем от системы S к системе S':

$$S' = \begin{cases} L_1(x)' = \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1q}x_q = 0 \\ L_2(x)' = \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2q}x_q = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ L_{p\text{-}1}(x)' = \alpha_{p\text{-}11}x_1 + \ldots + \alpha_{p\text{-}1q}x_q = 0 \\ L_p(x) = a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = b_p, \end{cases}$$

где $b_p \neq 0$. Этот переход осуществляется с помощью процедуры элиминации свободных членов.

а) Взять i-е уравнение системы S, у которого $b_i \neq 0$; пусть, для определенности, это будет b_p и $b_p > 0$.

б) Для всех $i = 1$ до $p-1$ выполнить

Если $b_i < 0$, то заменить i-е уравнение системы S линейной комбинацией вида

$$-b_i(L_p(x) - b_p) + b_p(L_i(x) - b_i) =$$
$$= -b_iL_p(x) + b_pL_i(x) = 0,$$

иначе если $b_i > 0$ то заменить i-е уравнение системы S линейной комбинацией вида

$$b_i(L_p(x) - b_p) + b_p(-L_i(x) + b_i) =$$
$$= b_iL_p(x) - b_pL_i(x) = 0,$$

иначе оставить i-е уравнение без изменений. Обоснованием этой процедуры есть

Теорема 9. Система S совместна тогда и только тогда, когда совместна система S'.

Пусть $M''_{p-1} = \{e'_1,...,e'_k\}$ – усеченное множество решений для подсистемы системы S, состоящей из первых $p-1$ уравнений. Далее, пусть $d_1, d_2, ..., d_k$ – значения $L_p(x)$ на векторах $e'_1, e'_2, ..., e'_k$ соответственно. Имеет место

Теорема 10. Система S' совместна тогда и только тогда, когда уравнение

$$d_1u_1 + d_2u_2 + ... + d_ku_k - b_p = 0 \quad (20)$$

имеет хотя бы одно решение в множестве N.

Следствие (достаточное условие совместности СЛНДУ) СЛНДУ S совместна, если уравнение $d_1u_1 + d_2u_2 + ... + d_ku_k = b_p$ имеет хотя бы одно решение.

Действительно, если такое уравнение имеет хотя бы одно решение, то уравнение (4) имеет решение, у которого последняя

координата равна 1. А это значит, что система S совместна.

Из этой теоремы вытекает простой путь построения решения системы, в случае когда уравнение (4) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее ее условиям: нужно взять линейную комбинацию векторов усеченного множества решений, коэффициентами которой при векторах $e_1,...,e_k$ стоят соответствующие первые k координат вектора-решения уравнения (4). Следует заметить, что можно сократить число проверяемых базисных векторовршений уравнения (4). Среди них нужно выбросить вектора-решения, у которых последняя координата равна 0. Кроме того, если среди базисных векторов-решений есть вектор, у которого последняя координата равна 1, то система S сразу объявляется совместной.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Выясним, будет ли совместна ниже приведенная система неоднородных уравнений, если за столбец свободных членов принять столбец коэффициентов при неизвестном x_5.

$$S=\begin{cases} L_1(x) = -x_1+2x_2+4x_3-3x_4+x_5=0 \\ L_2(x) = 2x_1+3x_2-4x_3-x_4+x_5=0 \\ L_3(x) = 0x_1+x_2-5x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$$

Приведем систему S к системе S', исключая последний член в уравнениях. Получаем систему

$$S'=\begin{cases} L_1'(x) = -x_1+x_2+9x_3-4x_4=0 \\ L_2'(x) = 2x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ L_3'(x) = 0x_1+x_2-5x_3-x_4=-1. \end{cases}$$

Усеченное множество решений для первого уравнения системы S' имеет вид:

$$M_1'=\{(1,1,0,0),(9,0,1,0),(0,4,0,1),(0,0,4,9)\}.$$

Значения на этих векторах для второго уравнения системы S' таковы: 4, 19, 6, -14. Усеченное множество решений

$$M_2'=\{(14,0,10,19),(0,14,6,17)\}.$$

Значения на этих векторах для последнего уравнения системы S' таковы: -31, 1. Составляем уравнение

$$-31u_1+u_2+t=0$$

Это уравнение имеет корень (1,30,1), который порождает вектор (14,420,190,529). Этот вектор, как нетрудно убедиться, является решением системы S', т. е. СЛНДУ, соответствующая системе S, совместна.

Пример 4. Рассмотрим СЛНДУ

$$S=\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3-2x_4=1 \\ 2x_1-x_2-4x_3+x_4=-5 \\ 0x_1+2x_2+4x_3+0x_4=9. \end{cases}$$

Преобразуем систему S к виду

$$\begin{cases} 22x_1+9x_2-19x_3-9x_4=0 \\ 18x_1+x_2-16x_3+9x_4=0 \\ 2x_1-x_2-4x_3+x_4=-5. \end{cases}$$

Строим усеченные множества решений.

$M_1'=\{(19,0,22,0),(0,19,9,0),(9,0,0,22),(0,1,0,1)\}$.

Значения на этих векторах для второго уравнения системы S' после сокращения на общий делитель 5 таковы: -2, -25, 72, 2. Усеченное множество решений

$$M_2'=\{(63,0,72,2),(0,63,18,25)\}.$$

Значения на этих векторах для последнего уравнения системы S' таковы: $-160,-110$. Составляем уравнение, сократив коэффициенты на общий делитель 5,

$$32u_1+22u_2-t=0.$$

Это уравнение имеет решения (1,0,32) и (0,1,22), которые не удовлетворяют условиям теоремы 18 над множеством натуральных чисел N. Следовательно, СЛНДУ S несовместна. В самом деле, в системе S последнее уравнение не имеет корней не только в области натуральных чисел, но и в области целых чисел.

Выводы

В заключение заметим, что приведенные оценки временных сложностей алгоритмов можно уточнять, если прослеживать все детали процесса вычислений, происходящего в *TSS*-алгоритме. В данной работе мы ограничиваемся установлением того, что устанавливаем только верхние оценки (т. е. сложность в наихудшем случае) этих алгоритмов. Отметим также, что при малых значениях модуля p сложностью вычисления НОД в полях и кольцах вычетов можно пренебречь и тогда оценка алгоритмов решения систем в таких полях упрощается. Так, например, в поле F_2, которое часто встречается в приложениях, необходимость вычисления НОД вообще отпадает, поэтому сложность решения СЛОДУ и СЛНДУ в таком поле становится пропорциональна величине qn^2, где q – число уравнений, а n – число неизвестных в системе.

Список использованных источников

1. Донец Г. А. Решение задачи о сейфе на (0,1)-матрицах // КиСА. – 2002. – № 1. – С. 98 – 105.

2. Донец Г. А., Самер И. М. Альшаламе Решение задачи о построении линейной мозаики. Теория оптимальных решений. – К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины. – 2005. – С. 15 – 24.

3. Крывый С. Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях // КиСА. – 2006. – № 2. – С. 3 – 17.

4. Крывый С. Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2. – С. 3 – 17.

5. Крывый С. Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в полях вычетов // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 15 – 23.

6. Крывый С.Л. О некоторых методах решения и критериях совместности систем линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел. // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – N 4. – С. 12 – 36.

7. Крывый С. Л. Критерий совместности систем линейных диофантовых уравнений над множеством натуральных чисел // Допов. НАНУ. – 1999. – № 5. – С.107 – 112.

8. Крывый С.Л. О некоторых методах решения и критериях совместности систем линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел // КиСА. – 1999. – № 4. – С. 12 – 36.

9. Черемушкин А. В. Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии. – М.: МЦНМО. – 2002. – 103 с.

10. Чугаенко А.В. О реализации TSS-алгоритма. ж. Управляющие системы и машины. – 2007. – N 3. – С. 14 – 26.

11. Baader F., Ziekmann J. Uni_cation theory Handbook of Logic in Arti_cial Intelligence and Logic Programming. – Oxford University Press. – 1994. – P. 1 – 85.

12. Allen R., Kennedy K. Automatic translation of FORTRAN program to vector form // ACM Transactions on Programming Languages and systems. – 1987. – V. 9, N4. – P. 491 – 542.

13. Contejan E., Ajili F. Avoiding slack variables in the solving of linear diophantine equations and inequations // Theoretical Comp. Science. – 1997. – V. 173. – P. 183 – 208.

14. Pottier L. Minimal solution of linear diophantine systems: bounds and algorithms // In Proc. of the Fourth Intern. Conf. on Rewriting Techniques and Applications. –Como. – Italy. – 1991. – P. 162 – 173.

15. Domenjoud E. Outils pour la deduction automatique dans les theories associatives-commutatives // Thesis de Doctorat d'Universite: Universite de Nancy I. –1991.

16. Clausen M., Fortenbacher A. E_cient solution of linear diophantine equations // J. Symbolic Computation. – 1989. – V. 8, N. 1,2. – P. 201 – 216.

17. Romeuf J. F. A polinomial Algorithm for Solvin systems of two linear Diophantine equations // TCS. – 1990. – 74, N3. – P. 329 – 340.

18. Filgueiras M.,Tomas A.P. A Fast Method for Finding the Basis of Non-negative Solutions to a Linear Diophantine Equation // J. Symbolic Computation. – 1995. – 19, N2. – P. 507 – 526.

19. Comon H. Constraint solving on terms: Automata techniques (Preliminary lecture notes) // Intern. Summer School on Constraints in Computational Logics: Gif-sur-Yvette, France, September 5 – 8. – 1999. – 22 p.

20. Bulatov A. H-coloring dichotomy revisited. Theoretical Computer Science. – 2005. – V. 349. – N 1. – P. 31 – 39.

21. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P.G. Classifying the complexity of constraints using finite algebras // SIAM Journ. Computing. – 2005. – v. 34. – N 3. – P. 720 – 742.

22. Creignou N., Khanna S., Sudan M. Complexity Classification of Boolean Constraint Satisfaction Problems // SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications: Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. PA. – 2001. – V. 7. – 347 p.

23. Drakengren T., Jonsson P. A complete classification of tractability in Allen's algebra relative to subsets of basic relations // Artificial Intelligence. – 1998. – V. 106. – P. 205 – 219.

24. Jeavons P.G. Constructing constraints // In Proceed. 4th Intern. Conf. on Constraint Programming – CP'98 (Pisa,October 1998). – 1998. – V. 1520. – Lecture Notes in Comput. Science. : Springer-Verlag. – P. 2 – 16.

25. Jeavons P.G. On the algebraic strukture of combinatorial problems. Theoretical Computer Science. – 1998. – V. 200. – P. 185 – 204.

26. Jeavons P.G., Cohen D.A., Gyssens M. Closure properties of constraints // Journ. of the ACM. – 1997. – V. 44. – P. 527 – 548.

27. Jeavons P.G., Cohen D.A., Gyssens M. How to determine the expressive power of constraints. Constraints. – 1999. – V. 4. – P. 113 – 131.

28. Krokhin A., Jeavons P.G., Jonsson P. Reasoning about temporal relations: The tractable subalgebras of Allen's interval algebra // Journ. of the ACM. – 2003. – V. 50. – P. 591 – 640.

29. Krokhin A., Jeavons P.G., Jonsson P. Constraint satisfaction problems on intervals and lengths // SIAM Journ. On Discrete Mathematics. – 2004. – V. 17. – P. 453 – 477.

30. Nebel B., Burkert J. Reasoning about temporal relations: a maximal tractable subclass of Allen's interval algebra // Journal of the ACM. – 1995. – V. 42. – P. 43 – 66.

31. Renz J., Nebl B. On the complexity of qualitative spatial reasoning: A maximal tractable fragment of the Region Connection Calculus // Artificial Intelligence. – 1999. – V.108. – P. 69 – 123.

32. Cooper M. C., Cohen D.A., Jeavons P.G. Caracterising tractable constraints // Artificial Intelligence. – 1994. – V. 65. – P. 347 – 361.

33. Schaefer T. J. The Complexity of satisfability problems // In Propc. 10-th ACM Symposium on Theory of Computing, STOC'78. 1978. – P. 216 – 226.

34. Papadimitriou C.H. Computational complexity. Addison-Wesley. – 1994. – 462 p.

35. Poschel R., Kaluznin L.A. Funktionen und Relationenalgebren. DVW. Berlin. – 1979. – 262 p.

36. Post E.L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals Mathematical Studies. – Princeton University Press. – 1941. – 26 p.

37. Szendrei A. Clones in universal algebras // Seminares de Mathematigues Superieures. University of Montreal. – 1986. – P. 253 – 262.

Сведения об авторе:

Крывый Сергей Лукьянович – д. ф.-м. наук, профессор кафедры информационных систем Киевского национального университета имени Т. Шевченко. Научные интересы: дискретная математика, теория автоматов сетей Петри, анализ естественноязыковых текстов.

E-mail: krivoi@i.com.ua