УДК 519.9
Национальный авиационный университет

А.Н. Воронин

ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ

Рассмотрена проблема распределения заданного глобального ресурса системы при ограничениях, накладываемых на парциальные ресурсы. Показано, что проблема заключается в построении адекватной целевой функции для оптимизации процесса распределения ресурсов в условиях их ограниченности. Для решения рассматриваемой проблемы предпринимается подход многокритериальной оптимизации с применением нелинейной схемы компромиссов. Приведен модельный пример.

Розглянуто проблему розподілу заданого глобального ресурсу при обмеженнях, що накладаються на парціальні ресурси. Показано, що проблема полягає в побудові адекватної цільової функції для оптимізації процесу розподілу ресурсів в умовах їхньої обмеженості. Для рішення розглянутої проблеми використовується підхід багатокритеріальної оптимізації з застосуванням нелінійної схеми компромісів. Приведено модельний приклад.

The problem of distribution of the given global resource is considered at restrictions, applied on partial resources. It is shown, that the problem consists in construction of adequate criterion function for optimization of process of distribution of resources in conditions of their limitation. For the decision of a considered problem the approach of multicriteria optimization with use of the nonlinear trade-off scheme is undertaken. Model example is given.

Ключевые слова: **распределение ресурсов, многокритериальная оптимизация, ограничения ресурсов, нелинейная схема компромиссов, программная инженерия**

Содержание проблемы

В различных сферах управления и экономики актуальной является задача такого распределения ресурсов управляемой системы между отдельными элементами (объектами), при котором обеспечивается наиболее эффективное функционирование системы в заданных обстоятельствах. Проблема распределения ограниченных ресурсов – основная проблема экономики. Говорят, что правильное распределение и перераспределение ресурсов – это и есть экономика. Аналогичные проблемы возникают и в других предметных областях. Искусство заключается в том, чтобы в зависимости от обстоятельств уметь правильно распределять ограниченные ресурсы.

Часто эта задача решается субъективно, на основе опыта и профессиональной квалификации лица, принимающего решение (ЛПР). В простых случаях такой подход может оказаться оправданным. Однако при большом количестве объектов и в ответственных случаях резко возрастает цена ошибки управленческого решения. Становится необходимой разработка формализованных методов поддержки принятия решений для грамотного распределения ресурсов между объектами с учетом всех заданных обстоятельств.

Одним из таких обстоятельств обычно является ограниченность ресурсов. Наиболее распространен случай ограниченности сверху суммарного (глобального) ресурса системы, подлежащего распределению между отдельными объектами. В работе [1] рассматривается, в частности, задача перераспределения средств при уменьшении ранее запланированного объема финансирования проектов.

В практических случаях ограничения накладываются не только на глобальный ресурс, но и на парциальные ресурсы, выделяемые отдельным объектам. При этом ограничения могут накладываться как снизу, так и сверху. Такие ограничения или известны заранее, или определяются технико-экономическими расчетами или методами экспертных оценок. Следует различать ограничения условные (когда нарушение пределов нежелательно) и ограничения безусловные (когда их нарушение физически невозможно).

Пример 1. Для выполнения нескольких авиарейсов в разные города аэропорт располагает определенным ресурсом топлива, подлежащим распределению между самолетами. Для каждого рейса существует нижний предел, меньше которого выделять топливо бессмысленно, самолет просто не долетит до своего пункта назначения. В этом состоит суть ограничения снизу для каждого парциального ресурса. Если же данный рейс получает топливо сверх известного нижнего предела, то у него появляется возможность свободного маневрирования по эшелонам, обхода грозового фронта, ухода на запасной аэродром и т.п. С другой стороны, увеличивать парциальный ресурс неограниченно тоже нельзя, для него существует ограничение сверху. Это понятно хотя бы потому, что каждый самолет имеет определенную емкость баков, больше которой принять топливо на борт он физически не может. Но обычно ограничение сверху вводится как условное и назначается полетным заданием. Учитывая заданный комплекс ограничений, требуется так распределить глобальный ресурс топлива между рейсами, чтобы обеспечивалась наиболее эффективная работа аэропорта в целом.

Пример 2. В проектно-конструкторскую организацию поступил заказ на разработку нескольких проектов. Для выполнения заказа обеспечен конкретный объем финансирования, подлежащий распределению между отдельными проектами. Для каждого проекта известен минимальный объем финансирования, меньше которого выполнение проекта невозможно. Обычно это защищенные статьи сметы – зарплата сотрудников, аренда помещений, коммунальные платежи, стоимость абсолютно необходимого оборудования и пр. Ясно, что при минимальном финансировании и качество выполнения проекта будет соответствующим. Увеличение средств делает разработку проекта более эффективной. Но повышать объем финансирования можно только до определенного предела, обусловленного полной сметной стоимостью проекта. Превышение этого предела называется нецелевым расходованием средств и грозит санкциями. Учитывая указанные ограничения снизу и сверху, требуется распределить глобальный объем финансирования между проектами так, чтобы работа проектно-конструкторской организации в целом была наиболее эффективной.

Нетрудно видеть, что сумма ограничений снизу для всех парциальных ресурсов представляет собой ограничение снизу для глобального ресурса, а сумма ограничений сверху ограничивает глобальный ресурс сверху.

Проблема заключается в построении адекватной целевой функции для оптимизации процесса распределения ресурсов в условиях их ограниченности. Простое равномерное распределение в данном случае не годится, так как может поставить некоторые объекты на грань невозможности их функционирования, в то время как другие объекты получают неоправданно большой ресурс.

В настоящей работе для решения рассматриваемой проблемы предпринимается подход многокритериальной оптимизации с применением нелинейной схемы компромиссов [2,3].

Постановка задачи

Поскольку рассматриваемая проблема актуальна для различных предметных областей, изложим постановку задачи в общем виде.

Задан подлежащий распределению глобальный ресурс R, а также $n \geq 2$ элементов системы (объектов), каждому из которых выделяется парциальный ресурс r_i, их совокупность составляет вектор $r = \{r_i\}_{i=1}^{n}$. Формула для области определения этого вектора имеет вид

$$r \in \overset{\circ}{X}_r = \{r \mid 0 \leq r_i \leq R, i \in [1,n]\} \qquad (1)$$

При этом выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = R. \qquad (2)$$

Для каждого объекта известна (или определяется методом экспертных оценок) предельно допустимая величина выделяемого ресурса $B_{i\min}$, меньше которой данный объект функционировать не может. Таким образом, задается система ограничений снизу

$$r_i \geq B_{i\min}, \sum_{i=1}^{n} B_{i\min} \leq R, i \in [1,n] \qquad (3)$$

С другой стороны, для каждого объекта известна величина $B_{i\max}$, превышать которую ресурс объекта не может или не должен. Система ограничений сверху имеет вид

$$r_i \leq B_{i\max}, \sum_{i=1}^{n} B_{i\max} \geq R, i \in [1,n] \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$B_{i\max} \geq r_i \geq B_{i\min}, i \in [1,n] \qquad (5)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i\max} \geq R \geq \sum_{i=1}^{n} B_{i\min} \; . \qquad (6)$$

С учетом (5) выражение (1) преобразуется к виду

$$r \in X_r = \{r \mid B_{i\max} \geq r_i \geq B_{i\min}, i \in [1,n]\} . \qquad (7)$$

Рассмотрим полярные (вырожденные) случаи неравенства (6). Если $R = \sum_{i=1}^{n} B_{i\min}$, то рассматриваемая задача сводится к такому распределению глобального ресурса, при котором каждый объект получает свой минимально допустимый парциальный ресурс: $r_i{*} = B_{i\min}, i \in [1,n]$.

Если же глобальный ресурс позволяет полностью удовлетворять потребности объектов, т.е. $R = \sum_{i=1}^{n} B_{i\max}$, то задача решается как $r_i{*} = B_{i\max}, i \in [1,n]$.

Таким образом, в полярных случаях неравенства (6) рассматриваемая проблема имеет тривиальные решения. И только если выражение (6) становится **строгим** неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i\max} > R > \sum_{i=1}^{n} B_{i\min} \; , \qquad (8)$$

задача оптимизации распределения ограниченных ресурсов приобретает смысл.

Ставится задача: в условиях (8) определить такие парциальные ресурсы $r{*} \in X_r$, при которых выполняется требование (2) и приобретает экстремальное значение некоторая целевая функция $Y(r)$, вид которой следует выбрать и обосновать.

Метод решения

В задаче оптимизации распределения ограниченных ресурсов ограничение сверху $r_i \leq B_{i\max}, i \in [1,n]$ рассматривается как простое оптимизационное ограничение, приближение к которому обычно ничем особенным для системы не грозит. Совсем другой смысл имеет ограничение снизу $r_i \geq B_{i\min}, i \in [1,n]$. Приближение ресурса к этому своему ограничению угрожает самой возможности функционирования соответствующего объекта. Можно сказать, что ограничение снизу является «критериеобразующим» в том смысле, что целевая функция должна увеличивать разницу между парциальным ресурсом и его ограничением снизу.

Поэтому выражение искомой целевой функции должно: 1) включать в себя ограничения снизу в явном виде, 2) штрафовать систему за приближение парциальных ресурсов к этим ограничениям и 3) быть дифференцируемым по своим аргументам. Простейшей целевой функцией, удовлетворяющей указанным требованиям, является

$$Y(r) = \sum_{i=1}^{n} B_{i\min} (r_i - B_{i\min})^{-1} \qquad (9)$$

Анализ формулы (9) показывает, что это не что иное, как выражение скалярной свертки максимизируемых частных критериев $r_i, i \in [1,n]$ по нелинейной схеме компромиссов (НСК) в задаче многокритериальной оптимизации [2]. Действительно, в рассматриваемой задаче ресурсы $r_i, i \in [1,n]$ имеют двоякую природу. С одной стороны, их можно рассматривать как независимые переменные, *аргументы оптимизации* целевой функции $Y(r)$. С другой стороны, для каждого из объектов логично стремление максимизировать свой парциальный ресурс, уйти как можно дальше от опасного ограничения $B_{i\min}$ для повышения эффективности своего функционирования. С этой точки зрения ресурсы $r_i \geq B_{i\min}, i \in [1,n]$ могут рассматриваться как частные *критерии* качества функционирования соответствующих объектов. Эти критерии подлежат максимизации, они ограничены снизу, неотрицательны и противоречивы (увеличение одного ресурса возможно только за счет уменьшения других).

Концепция НСК основана на принципе «подальше от ограничений». Предполагается, что функция полезности ЛПР оценивает как предпочтительные те решения, которые дают большее удаление критериев от опасных ограничений.

Скалярная свертка $Y(r)$ представляет собой модель функции полезности и включает в себя в явном виде разность $r_i - B_{i\min}$ как характеристику напряженности ситуации принятия решения. Это позволяет штрафовать критерии за приближение к своим ограничениям.

На основании изложенного, задача векторной оптимизации распределения ограниченных ресурсов с учетом изопериметрического ограничения для аргументов приобретает вид

$$r^* = \arg\min_{r\in X_r} Y(r) = \arg\min_{r\in X_r} \sum_{i=1}^{n} B_{i\,\min}\,(r_i - B_{i\,\min})^{-1}, \sum_{i=1}^{n} r_i = R. \qquad (10)$$

Задачу (10) можно решать как аналитически, используя метод неопределенных множителей Лагранжа, так и численными методами, если аналитическое решение оказывается затруднительным.

Аналитическое решение предусматривает построение функции Лагранжа в виде

$$L(r,\lambda) = Y(r) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} r_i - R),$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа, и решение системы уравнений

$$\frac{\partial L(r,\lambda)}{\partial r_i} = 0, i \in [1,n]$$

$$\frac{\partial L(r,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} r_i - R = 0.$$

Для решения многокритериальных задач численными методами с применением концепции НСК и с ограничениями на аргументы и критерии разработаны алгоритмы и составлена компьютерная программа [2]. Для ее использования в практических расчетах необходимо привести исходную многокритериальную задачу к каноническому виду.

Механизм НСК в данной программе разработан для минимизируемых критериев. Чтобы использовать его в нашем случае, необходимо применить монотонное (теорема Гермейера) преобразование, приводящее максимизируемые критерии $r_i, i\in[1,n]$ к виду минимизируемых. Таким преобразованием может быть $y_i(r) = 1/r_i,\ A_i = 1/B_i, i\in[1,n]$.

Понятно, что критерии $y_i(r)$ ограничены сверху величинами $A_i, i\in[1,n]$.

Тогда целевая функция приобретает канонический вид скалярной свертки по нелинейной схеме компромиссов в унифицированной форме для минимизируемых критериев [2]:

$$Z(r) = \sum_{i=1}^{n} A_i[A_i - y_i(r)]^{-1}.$$

Скалярная свертка выступает как инструмент композиции критериев для различных альтернатив $r \in X_r$ и задача векторной оптимизации распределения ограниченных ресурсов с учетом изопериметрического ограничения на аргументы приобретает вид:

$$r^* = \arg\min_{r\in X_r} Z(r) = \arg\min_{r\in X_r} \sum_{i=1}^{n} A_i[A_i - y_i(r)]^{-1}, \sum_{i=1}^{n} r_i - R = 0$$

Эта задача может быть решена посредством универсальной программы многокритериальной оптимизации. Рассмотрим вкратце некоторые ее возможности.

Программа векторной оптимизации

Для решения широкого спектра оптимизационных задач разработана и изложена в работе [2] программа векторной оптимизации TURBO-OPTIM. Программа выполнена на языке Borland C++3.1 с использованием библиотеки Turbo Vision, что обеспечивает эффективное использование ресурсов ЭВМ, стандартизованную и удобную среду для пользователя, простоту модификации и отладки.

Для работы с программой необходимо выполнить следующие **этапы**:

– выделить набор частных критериев так, чтобы все они принимали неотрицательные значения и требовали *минимизации*;

– определить допустимое предельное значение для каждого критерия;

– выделить набор параметров (независимых переменных), от которых зависят частные критерии;

– определить диапазон изменения каждого параметра (минимальное, стартовое и максимальное значения);

– задать ограничения для параметров, имеющие вид неравенств $g_j(r) \le 0, j\in[1,k]$, где k – количество ограничений;

– определить вид зависимости частных критериев от параметров.

Программа позволяет решать задачи оптимизации для следующих случаев связи частных критериев с аргументами оптимизации (параметрами):

- критерии выражаются через параметры явно, известны аналитические зависимости;
- критерии являются некоторыми функционалами и для расчета их значений требуется решение системы дифференциальных уравнений;

- зависимости критериев от параметров не известны и для определения значений параметров необходимо проведение экспериментов;
- значения критериев можно получить, выполнив написанную пользователем программу;
- есть таблица зависимости частных критериев от параметров.

В каждом из перечисленных случаев программа представляет пользователю средства нахождения минимума обобщенного критерия, построенного по нелинейной схеме компромиссов, одним из методов оптимизации: 1) метод симплекс-планирования в модификации Нелдера-Мида и 2) нелокальный метод нелинейного программирования (дуальный метод оптимизации).

Иллюстрационные примеры

1. Для выполнения двух рейсов (n =2) аэропорт располагает топливом общим объемом R =12 тонн (цифры условные). Минимальная потребность первого рейса составляет $r_1 \ge B_{1\min}$ = 2 тонны, второго рейса $r_2 \ge B_{2\min}$ = 5 тонн. Это ограничения снизу для парциальных ресурсов. Емкость баков первого самолета $B_{1\max}$ = 7 тонн, второго самолета $B_{2\max}$ =10 тонн. Это ограничения сверху.

Условие (8) в виде строгого неравенства (размерности опущены)

$B_{1\min} + B_{2\min} = 7 < R = 12 < B_{1\max} + B_{2\max} = 17$

соблюдается. Значит, задача оптимизации распределения ограниченных ресурсов может быть поставлена и решение будет нетривиальным.

Ставится задача: получить аналитическое решение компромиссно-оптимального распределения топлива между рейсами.

Строим функцию Лагранжа:

$$L(r,\lambda) = B_{1\min}(r_1 - B_{1\min})^{-1} + B_{2\min}(r_2 - B_{2\min})^{-1} + \lambda(r_1 + r_2 - R).$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{\partial L(r,\lambda)}{\partial r_1} = -B_{1\min}(r_1 - B_{1\min})^{-2} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(r,\lambda)}{\partial r_2} = -B_{2\min}(r_2 - B_{2\min})^{-2} + \lambda = 0$$

$$r_1 + r_2 - R = 0$$

Подставляя числовые данные

$$-2(r_1 - 2)^{-2} + \lambda = 0$$

$$-5(r_2 - 5)^{-2} + \lambda = 0$$

$$r_1 + r_2 - 12 = 0$$

и решая эту систему методом Гаусса (последовательного исключения переменных), получаем

$r_1{*} = 3{,}94$ тонн,

$r_2{*} = 8{,}06$ тонн.

Поставленная задача решена в предположении, что относительная важность обоих рейсов для ЛПР одинакова. Если же нет, то в целевую функцию вводятся весовые коэффициенты α_1 и α_2, отражающие индивидуальные предпочтения ЛПР. Эти коэффициенты должны быть нормированы и определены на симплексе:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in X_\alpha = \{\alpha_i \,|\, \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n=2} \alpha_i = 1, i \in [1;2]\}$$

2. В конструкторское бюро поступил заказ на проектирование и изготовление полунатурных макетов самолетов трех видов (n =3): 1) пассажирский лайнер, 2) транспортный самолет, 3) спортивно-тренировочный самолет. Для выполнения заказа обеспечено финансирование общим объемом R =10 миллионов гривен (здесь и далее цифры условные).

Рассчитана полная финансовая смета для каждого проекта (ограничения сверху):

$r_1 \le B_{1\max} = 7$ млн грн; $r_2 \le B_{2\max} = 5$ млн грн; $r_3 \le B_{3\max} = 4$ млн грн.

Экономическими расчетами определены минимальные объемы финансирования отдельных проектов, ниже которых проектирование невозможно (ограничения снизу):

$r_1 \ge B_{1\min}$ =2 млн грн; $r_2 \ge B_{2\min}$ =1 млн грн; $r_3 \ge B_{3\min}$ =0,5 млн грн .

Условие (8) представляет собой строгое неравенство (размерности опущены)

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i\max} = 16 > R = 10 > \sum_{i=1}^{n} B_{i\min} = 3{,}5,$$

поэтому изложенная методика может быть применена для нетривиальной оптимизации распределения ограниченных ресурсов.

Ставится задача: используя программу векторной оптимизации TURBO-OPTIM, найти компромиссно-оптимальные значения парциальных объемов финансирования r_1*, r_2* и r_3* для проектирования и изготовления полунатурных макетов пассажирского лайнера, транспортного самолета и спортивного самолета соответственно.

В соответствии с этапами работы с программой, устанавливаем: режим «аналитика», метод оптимизации «симплекс-планирование» (по умолчанию) и далее вводим числовые данные (размерности опущены):

$$r_{1\min} = B_{1\min} = 2; r_{1start} = 3; r_{1\max} = B_{1\max} = 7$$
$$r_{2\min} = B_{2\min} = 1; r_{2start} = 3; r_{2\max} = B_{2\max} = 5$$
$$r_{3\min} = B_{3\min} = 0.5; r_{3start} = 3; r_{3\max} = B_{3\max} = 4$$
$$r_1 + r_2 + r_3 - 10 = 0$$
$$y_1 = 1/r_1; y_2 = 1/r_2; y_3 = 1/r_3$$
$$y_{1\max} = A_1 = \frac{1}{B_{1\min}} = 0.5; y_{2\max} = A_2 = \frac{1}{B_{2\min}} = 1; y_{3\max} = A_3 = \frac{1}{B_{3\min}} = 2$$

После этого даем команду «выполнить» и программа определяет искомые значения парциальных объемов финансирования по проектам:

r_1*=4, 945 млн грн; r_2*=3, 083 млн грн; r_3*=1, 972 млн грн.

Результаты расчета графически представлены в виде компьютерного интерфейса на рис. 1.

Полученный результат соответствует унифицированной версии свертки по нелинейной схеме компромиссов, которая применяется для широкого использования. Если желательно учесть индивидуальные предпочтения ЛПР, то программа содержит соответствующую опцию.

В том случае, когда глобальный ресурс распределяется между объектами не непосредственно, а через промежуточные звенья, то система становится иерархической [4]. Изложенный подход может быть применен и в этом случае.

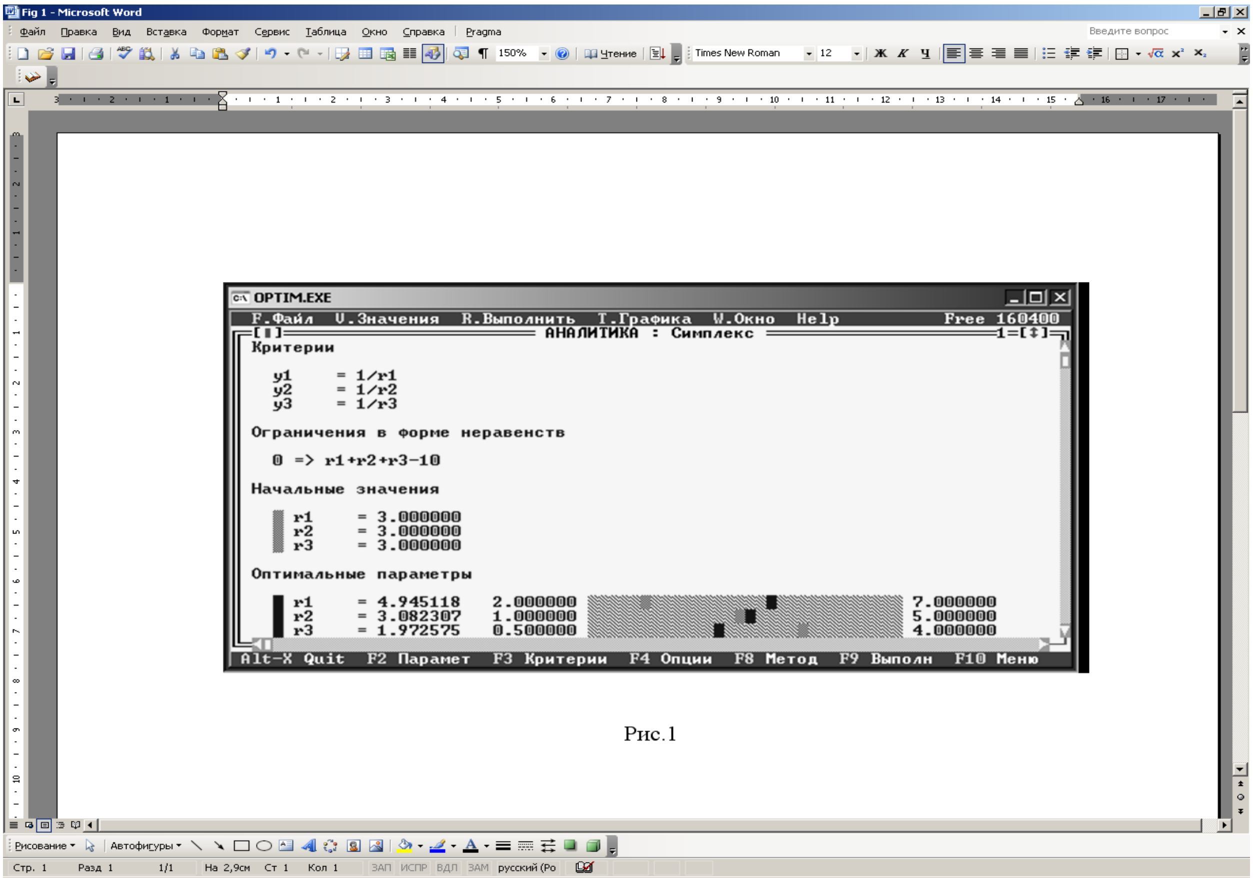

Рис.1

Литература

1. *Воронин А.Н.* Векторная оптимизация иерархических структур // Проблемы управления и информатики. – 2004. –№ 6. – С. 26-34.

2. *Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И.* Векторная оптимизация динамических систем. – Киев: Техніка, 1999. – 284 с.

3. *Воронин А.Н.* Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С. 106-114.

4. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 2. – С. 24-29.

Сведения об авторе

Воронин Альберт Николаевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета
E-mail: alnv@vol iacable.com

Статья поступила в редакцию 14.10.2010 г.