

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

¹А. В. Васильев, канд. техн. наук,²В. В. Васильев, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины,³Л. А. Симак, д-р техн. наук

ОБРАБОТКА НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ S-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В БАЗИСЕ СМЕЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: oleksii.vasyliiev@gmail.com, vsyv06@gmail.com

Для аналитической аппроксимации и последующей обработки непрерывных и дискретизированных сигналов, заданных на конечном интервале изменения аргумента и сопровождаемых высокочастотными помехами и ошибками измерений применен метод S-преобразования. В качестве системы базисных функций использована система ортогональных полиномов Лежандра, приведенных к интервалу определения сигналов. Выведены выражения для определения операционной матрицы интегрирования целого и дробного порядков в базисе смещенных полиномов Лежандра. Приведены примеры последующей обработки аппроксимированных сигналов (низкочастотной фильтрации, определения производных различных целых и дробных (по Капуто и Риману–Лиувиллю) порядков). Вычислительные эксперименты выполнены в программной среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробное исчисление, дробная производная по Капуто, дробная производная по Риману–Лиувиллю, S-преобразование, операционные методы, автоматическое управление, цифровая обработка сигналов, полиномиальная аппроксимация, система Mathematica®.

Введение. S-преобразование является операционным методом аппроксимационного типа, основанным на представлении сигналов обобщенными полиномами по различным системам базисных функций [1]. Метод позволяет алгебраизировать интегро-дифференциальные математические модели динамических систем как целого, так и дробных порядков и предоставляет пользователю широкий набор средств для обработки и оценивания непрерывных и дискретизированных сигналов. В работах [2; 3] рассмотрены вопросы оценивания средних значений сигналов и производных различных целых и дробных порядков в диапазоне $0 \leq \beta \leq 2$ на сетке дискретизированных значений аргумента с использованием в качестве базисной системы функций локальных смещенных полиномов Лежандра нулевого, первого и второго порядков. В этой работе метод S-преобразования применяется для целей аппроксимации, обработки сигналов и моделирования динамических систем с использованием глобальной версии ортогональных полиномов Лежандра, смещенных на интервал изменения аргумента, на котором анализируются сигналы моделируемой динамической системы. Работа организована следующим образом. Сначала в ретроспективном плане рассмотрены основы S-преобразования и аппроксимации сигналов. Затем выведены выражения для операционных матриц интегрирования с целыми и дробными порядками интегральных операторов с базисной системой на основе смещенных полиномов Лежандра. Приведены программы и иллюстративные примеры использования S-преобразования для обработки непрерывных сигналов, сопровождаемых высокочастотными помехами и дискретизированных сигналов, содержащих ошибки измерений. Показана эффективность метода для выделения полезного сигнала из аддитивной смеси с помехами и оценивания производных нецелых порядков по Риману–Лиувиллю и Капуто [5].

Полиномы Лежандра. Классические полиномы Лежандра образуют ортогональную систему с единичной весовой функцией и интервалом ортогональности $-1 \leq x \leq 1$ [4].

Замечательным свойством полиномов Лежандра является то, что их значения на интервале ортогональности не выходят за пределы ± 1 . Вид первых 10 полиномов Лежандра, смещенных на интервал $0 \leq t \leq T = 2$ заменой аргумента выражением вида $x = -1 + 2t/T$ показан на рис. 1. В системе Mathematica® [6] полиномы Лежандра являются библиотечной функцией $\text{LegendreP}[m, x]$.

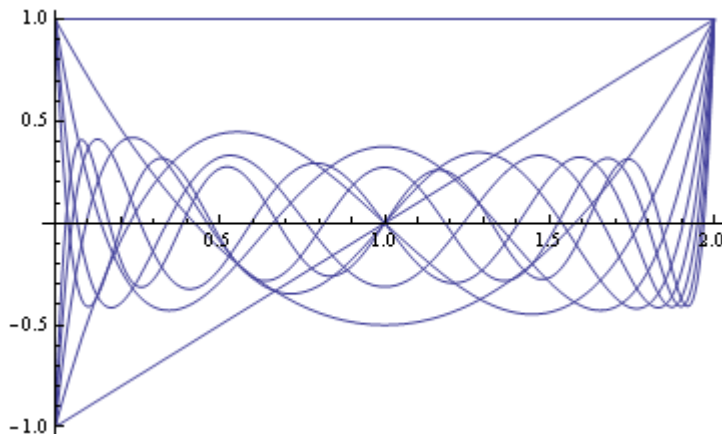


Рис. 1. Система первых 10 полиномов Лежандра, ортогональных на интервале $[0, 2]$

Аналитические выражения для первых четырех полиномов Лежандра, ортогональных на интервале $[0, T]$, имеют вид:

$$\begin{aligned} LP_0(t) &= 1, \\ LP_1(t) &= \frac{2t - T}{T}, \\ LP_2(t) &= \frac{6t^2 - 6tT + T^2}{T^2}, \\ LP_3(t) &= \frac{20t^3 - 30t^2T + 12tT^2 - T^3}{T^3}. \end{aligned}$$

S-преобразование и аппроксимация сигналов. Рассмотрим два варианта преобразования для непрерывных и дискретизированных сигналов.

S-преобразование непрерывных сигналов. Для непрерывного сигнала $x(t)$ и системы базисных функций $\bar{\mathbf{S}}(t)$, формирующих обобщенный полином, определенный на интервале изменения аргумента $0 \leq t \leq T$, прямое и обратное S -преобразования задаются выражениями:

$$\mathbf{W} = \int_0^T \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \bar{\mathbf{S}}^*(t) dt, \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \int_0^T \bar{\mathbf{S}}(t) x(t) dt, \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}, \quad (3)$$

$$x_a(t) = \bar{\mathbf{X}}^* \cdot \bar{\mathbf{S}}(t). \quad (4)$$

В формулах (1) – (4) приняты следующие обозначения: $\bar{\mathbf{S}}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\}^*$ – вектор системы базисных функций порядка m , формирующих обобщенный полином; \mathbf{W} – операционная матрица аппроксимирующего спектра порядка $m \times m$; $\bar{\mathbf{Q}}$ – вспомогательный вектор порядка m ; $\bar{\mathbf{X}} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^*$ – вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома; « $*$ » и « \cdot » – символы векторно-матричного транспонирования и умножения соответственно.

В выражениях (1) – (2) операции интегрирования над векторами и матрицами выполняются поэлементно. Предполагается, что система базисных функций линейно независима и обладает функциональной полнотой, а произведения сигнала и базисных функций интегрируемы на интервале определения $[0, T]$.

Прямое S -преобразование (1) – (3) сопоставляет сигналу $x(t)$ в пространстве оригиналов его изображение в пространстве изображений в виде вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома \bar{X} , а обратное S -преобразование (4) восстанавливает сигнал в пространстве оригиналов в виде его аппроксимации $x_a(t)$ с минимальной среднеквадратичной погрешностью [1].

S-преобразование дискретизированных сигналов. Если сигнал задан множеством отсчетов на заданном дискретном множестве значений аргумента: $x_j = x(t_j)$, $t_j \in [0, T]$, $j := 1, \dots, n$, выражения прямого S -преобразования выводятся следующим образом [1]. Подставим значения отсчетов x_j и соответствующие им значения аргумента t_j в формулу обратного S -преобразования (4):

$$x_a(t_j) = x_j = \bar{X}^* \cdot \bar{S}(t_j), j := 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Выражение (5) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующего полинома X_i . Так как количество уравнений равно количеству отсчетов дискретизированного сигнала n , а количество неизвестных – порядку базисной системы функций m , и $n > m$, имеем некорректную задачу линейной алгебры, для решения которой необходимо использовать псевдообратную матрицу [4]:

$$\bar{X} = W_d^+ \cdot \bar{Q}_d, \quad (6)$$

где $\bar{Q}_d = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^*$ – вектор отсчетов сигнала размерности n ;

$$W_d = \begin{bmatrix} s_1(t_1) & \dots & s_i(t_1) & \dots & s_m(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1(t_j) & \dots & s_i(t_j) & \dots & s_m(t_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1(t_n) & \dots & s_i(t_n) & \dots & s_m(t_n) \end{bmatrix} \text{ – операционная матрица спектра размерности } n \times m;$$

W_d^+ – матрица псевдообратная по отношению к матрице W_d .

Таким образом, прямое S -преобразование для дискретизированных сигналов определяется выражением (6), тогда как обратное преобразование сохраняет свой вид (4).

Операционные матрицы интегрирования целого и дробных порядков. В любом операционном исчислении выражения прямого и обратного преобразований дополняются правилами операционной алгебры. Эти правила устанавливают, какие операции необходимо выполнять над изображениями сигналов в пространстве изображений, если над сигналами в пространстве оригиналов выполняются те или иные операции. Одним из таких правил является правило нахождения изображений интегралов и производных сигналов, поскольку именно эти правила позволяют алгебраизировать интегро-дифференциальные операции, что является целью любого операционного метода. В S -преобразовании вводится операционный аналог операций интегрирования целого и дробного порядков с переменным верхним пределом:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Интеграл Римана–Лиувилля (8) является обобщением обычной интегральной формулы Коши на нецелые порядки оператора. В частности, при подстановке в уравнение (8) значения $\beta = 1$ получается выражение обычного интеграла с переменным верхним пределом (7).

Операционные аналоги выражений (7) и (8) в S -преобразовании имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \mathbf{P}^{(1)} \cdot \bar{X}; \\ \bar{Y} &= \mathbf{P}^{(\beta)} \cdot \bar{X}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(\beta)}$ – операционная матрица интегрирования первого порядка и операционная матрица дробного интегрирования порядка β , элементы которых зависят только от системы базисных функций, порядка интегрального оператора и диапазона изменения аргумента сигнала. Опуская подробности вывода формул для этих матриц, которые можно найти в работе [1], приведем их векторно-матричную форму:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{W}^{-1} \left(\int_0^T \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \int_0^t \bar{\mathbf{S}}^*(\tau) d\tau dt \right); \quad (9)$$

$$\mathbf{P}^{(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \mathbf{W}^{-1} \left(\int_0^T \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \bar{\mathbf{S}}^*(\tau) d\tau dt \right). \quad (10)$$

Как можно видеть из приводимых ниже иллюстративных примеров, столбцами операционных матриц интегрирования (9), (10) являются векторы аппроксимирующих полиномов интегралов с переменным верхним пределом базисных функций S -преобразования. В тех случаях, когда порядок дифференциального оператора находится в пределах $r-1 \leq \beta \leq r$, r – целое, в дробном исчислении наряду с другими наиболее часто используют два определения дробной производной по Риману–Лиувиллю и Капуто [1; 6]:

$${}^{RL}D_t^\beta(x(t)) = \frac{d^r}{dt^r} \left(\frac{1}{\Gamma(r-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{r-\beta-1} x(\tau) d\tau \right); \quad (11)$$

$${}^C D_t^\beta(x(t)) = \frac{1}{\Gamma(r-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{r-\beta-1} \frac{d^r x(\tau)}{d\tau^r} d\tau. \quad (12)$$

Производная дробного порядка по Риману–Лиувиллю (11) отличается от производной по Капуто (12) последовательностью выполнения операций целочисленного дифференцирования и дробного интегрирования в соответствии с правилами композиции порядков интегро-дифференциальных операторов. Эта последовательность поясняется на рис. 2 в случае порядка производной $\beta = 3,5$.

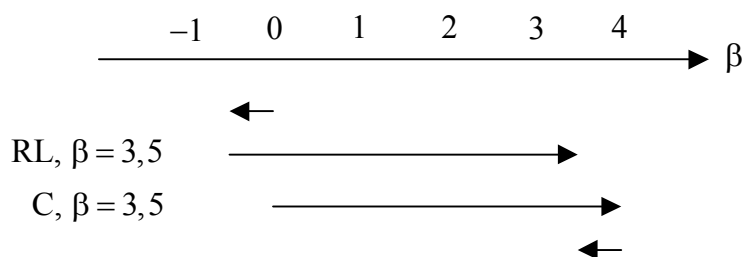


Рис. 2. Последовательность действия при дробном дифференцировании по Риману–Лиувиллю (RL) и Капуто (C)

При дифференцировании с таким порядком по Риману–Лиувиллю сначала функцию интегрируют с дробным порядком $r-\beta = 4-3,5 = 0,5$, а затем результат дифференцируют с целым порядком $r = 4$. При дифференцировании по Капуто последовательность операций

дифференцирования и дробного интегрирования иная. Сначала функция дифференцируется с целым порядком r , а затем результат интегрируется с дробным порядком $r-\beta$. Необходимо иметь в виду, что результаты дифференцирования по Риману–Лиувиллю и Капуто совпадают лишь при нулевых начальных значениях функции и целочисленных производных до $r-1$ порядка.

Примеры аппроксимации и последующей обработки аппроксимированных сигналов. В приведенных далее примерах в качестве систем базисных функций используются смещенные полиномы Лежандра.

Пример 1. Сформировать базисную систему функций на основе смещенных полиномов Лежандра 8-го порядка и аппроксимировать сигнал $y(t) = \sin(\pi(t/T)^2)$ на интервале изменения аргумента $[0, T=1]$.

Программа 1:

Задание порядка базисной системы функций и интервала аппроксимации:

```
m = 8; T = 1;
```

Формирование базисной системы функций на основе смещенных полиномов Лежандра:

```
s[m_, x_] := LegendreP[m, x];  
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}];
```

Формирование операционной матрицы аппроксимирующего спектра:

```
W = Table[ $\int_0^T$  S[[i]] * S[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
```

Визуализация матрицы:

```
W // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Задание сигнала, подлежащего аппроксимации:

```
y[t_, T_] := Sin[ $\pi$  * (t / T) ^ 2];  
y1 = y[t, T];
```

Формирование вспомогательного вектора:

```
Q = N[Table[ $\int_0^T$  S[[i]] * y1 dt, {i, m}]];
```

Нахождение вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:

```
Y1 = Inverse[W] . Q
```

```
{0.504855, 0.395296, -0.464739, -0.436253,
-0.0615527, 0.0375593, 0.0220867, 0.00381809}
```

Формирование аппроксимирующего полинома:

```
y1a = Y1.S;
```

Визуализация сигнала, его аппроксимации и функции ошибки (рис. 3, 4):

```
p2 = Plot[{y1, y1a}, {t, 0, T}]
p3 = Plot[y1 - y1a, {t, 0, T}]
```

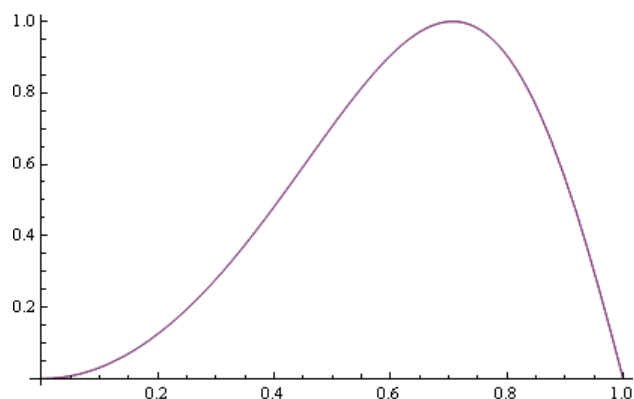


Рис. 3. Анализируемый сигнал и его аппроксимация

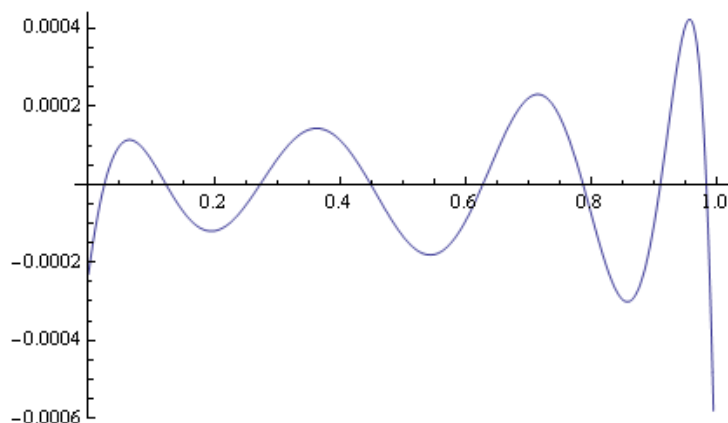


Рис. 4. Функция ошибки аппроксимации

Пример 2. Сформировать операционную матрицу целочисленного интегрирования порядка 1 для базисной системы, рассмотренной в примере 1. Найти аппроксимацию интеграла сигнала методом S -преобразования и сравнить ее с точным значением интеграла сигнала.

Программа 2:

Выбор параметров, определение базисной системы функций и операционной матрицы аппроксимирующего спектра:

```
m = 8; T = 1;
s[m, x_] := LegendreP[m, x];
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}];
W = Table[ $\int_0^T S[[i]] * S[[j]] dt$ , {i, m}, {j, m}];
```

Задание формы сигнала и решение задачи аппроксимации:

```

y[t_, T_] := Sin[π * (t/T)^2];
y1 = y[t, T];
Q = N[Table[∫0T S[[i]] * y1 dt, {i, m}]];
Y1 = Inverse[W].Q
{0.504855, 0.395296, -0.464739, -0.436253,
 -0.0615527, 0.0375593, 0.0220867, 0.00381809}
yla = Y1.S;

```

Формирование вектора интегралов с переменным верхним пределом от базисных функций:

```

Si := Table[∫0t s[i-1, -1+2 τ/T] dτ, {i, m}];

```

Формирование вспомогательной матрицы:

```

Qsi := Table[∫0T S[[i]] * Si[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];

```

Определение операционной матрицы интегрирования и ее визуализация:

```

P1 := Inverse[W].Qsi;
P1 // MatrixForm

```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & -\frac{1}{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 & -\frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{22} & 0 & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{26} & 0 \end{pmatrix}$$

Нахождение вектора коэффициентов полинома, аппроксимирующего интеграл сигнала методом S-преобразования:

```

Z1 = P1.Y1
{0.186545, 0.298901, 0.0970435, -0.0430543,
 -0.0328682, -0.00426908, 0.00157997, 0.000849487}

```

Формирование аппроксимации интеграла сигнала:

```

z1a = Z1.S;

```

Задание точного значения интеграла сигнала:

$$ze = \frac{\int_0^t y[\tau, T] d\tau}{\sqrt{2}} = \frac{\text{FresnelS}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}}$$

Визуализация аппроксимации интеграла сигнала, его точного значения и функции ошибки аппроксимации (рис. 5, 6):

```
p4 = Plot[{ze, z1a}, {t, 0, T}]
p5 = Plot[ze - z1a, {t, 0, T}]
```

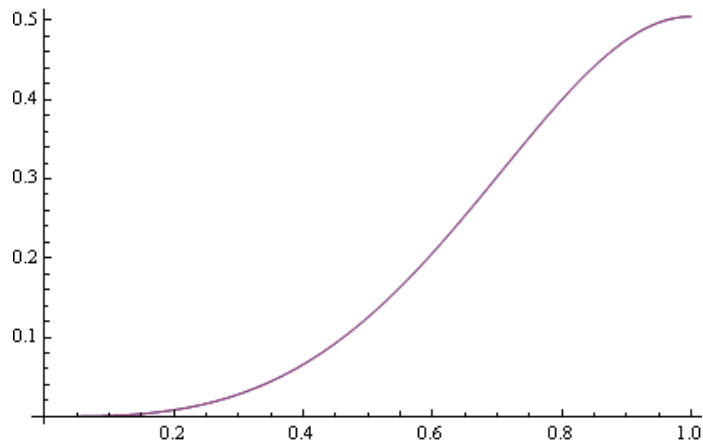


Рис. 5. Интеграл сигнала и его аппроксимация

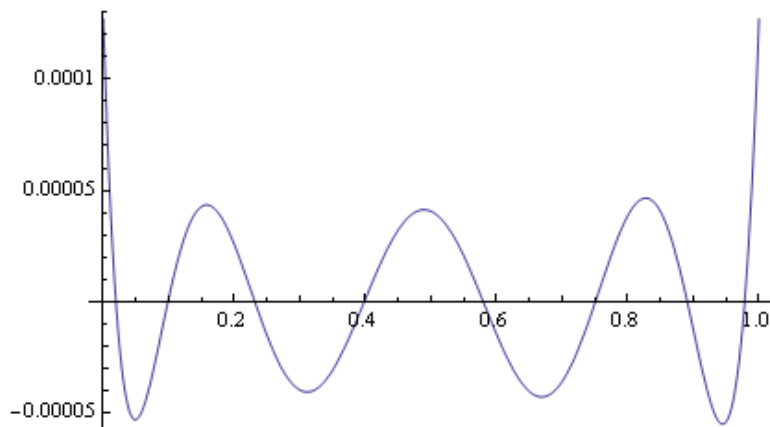


Рис. 6. Функция ошибки аппроксимации интеграла сигнала

Пример 3. Сформировать операционную матрицу дробного интегрирования порядка 0,5 для базисной системы, рассмотренной в примере 1. Найти аппроксимацию дробного интеграла сигнала методом S -преобразования и сравнить ее с точным значением.

Программа 3:

Выбор параметров, определение базисной системы функций и операционной матрицы аппроксимирующего спектра:

```
m = 8; T = 1;
s[m_, x_] := LegendreP[m, x];
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}];
W = Table[ $\int_0^T S[[i]] * S[[j]] dt$ , {i, m}, {j, m}];
```

Задание формы сигнала и решение задачи аппроксимации:

```
y[t_, T_] := Sin[ $\pi * (t / T)^2$ ];
y1 = y[t, T];
Q = N[Table[ $\int_0^T S[[i]] * y1 dt$ , {i, m}]];
Y1 = Inverse[W].Q
{0.504855, 0.395296, -0.464739, -0.436253,
 -0.0615527, 0.0375593, 0.0220867, 0.00381809}
y1a = Y1.S;
```


Задание числового значения порядка дробного интеграла:

$$\beta = 0.5;$$

Формирование вектора интегралов дробного порядка с переменным верхним пределом от базисных функций (интегралы Римана–Лиувилля порядка 0,5):

$$\begin{aligned} \mathbf{Fsi}[\beta, t] := & \\ & \frac{1}{\Gamma[\beta]} * \\ & \text{Table}\left[\text{Simplify}\left[\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} * s[i, -1 + 2 \tau / T] d\tau, \right. \right. \\ & \left. \left. \text{Assumptions} \rightarrow t > 0\right], \{i, 0, m-1\}\right]; \end{aligned}$$

Формирование вспомогательной матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{fsi} &= \mathbf{Fsi}[0.5, t]; \\ \mathbf{Qfsi} &:= \text{Table}\left[\int_0^T s[[i]] * \mathbf{fsi}[[j]] dt, \{i, m\}, \{j, m\}\right]; \end{aligned}$$

Определение операционной матрицы дробного интегрирования (матричная форма матрицы не визуализируется из-за ее громоздкости):

$$\begin{aligned} \mathbf{P05} &= \text{Inverse}[\mathbf{W}].\mathbf{Qfsi} \\ & \{ \{0.752253, -0.150451, -0.0214929, -0.00716431, -0.00325651, \\ & \quad -0.0017535, -0.0010521, -0.000680772\}, \{0.451352, 0.322394, -0.150451, \\ & \quad -0.0293085, -0.0115731, -0.00586171, -0.00340386, -0.00215958\}, \\ & \quad \{-0.107465, 0.250751, 0.244238, -0.13502, -0.0293085, -0.0124808, \\ & \quad -0.00668441, -0.00405221\}, \{0.0501502, -0.0683866, 0.189028, 0.20516, \\ & \quad -0.122312, -0.0280745, -0.0124808, -0.00691691\}, \{-0.0293085, 0.0347194, \\ & \quad -0.0527554, 0.157258, 0.180479, -0.112327, -0.0266795, -0.0121955\}, \\ & \quad \{0.0192885, -0.0214929, 0.0274578, -0.0441171, 0.137289, 0.163041, -0.10434, -0.025362\}, \\ & \quad \{-0.0136773, 0.0147501, -0.0173795, 0.0231787, -0.0385371, \\ & \quad 0.12331, 0.149866, -0.0977979\}, \{0.0102116, -0.0107979, \\ & \quad 0.0121566, -0.0148219, 0.0203259, -0.0345845, 0.112844, 0.139454\} \} \end{aligned}$$

Задание точного значения дробного интеграла сигнала:

$$\begin{aligned} \mathbf{zfe} &= \text{Simplify}\left[\frac{1}{\Gamma[\beta]} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} * y[\tau, T] d\tau, \text{Assumptions} \rightarrow t > 0\right] \\ & 1.89062 t^{2.5} \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}\right\}, \{1.625, 1.375, 1.125, 0.875\}, -\frac{1}{4} \pi^2 t^4\right] \end{aligned}$$

Нахождение вектора коэффициентов полинома, аппроксимирующего дробный интеграл сигнала методом S-преобразования:

$$\begin{aligned} \mathbf{z05} &= \mathbf{P05}.\mathbf{y1} \\ & \{0.333529, 0.438423, -0.00856523, -0.172892, \\ & \quad -0.0611228, 0.00299922, 0.00683088, 0.00217817\} \end{aligned}$$

Формирование аппроксимации дробного интеграла сигнала:

$$\mathbf{zfa} = \mathbf{z05}.\mathbf{S};$$

Визуалізація апроксимації інтеграла сигналу, його точного значення і функції помилки апроксимації (рис. 7, 8):

```
p7 = Plot[{zfe, zfa}, {t, 0, T}]
p8 = Plot[zfe - zfa, {t, 0, T}]
```

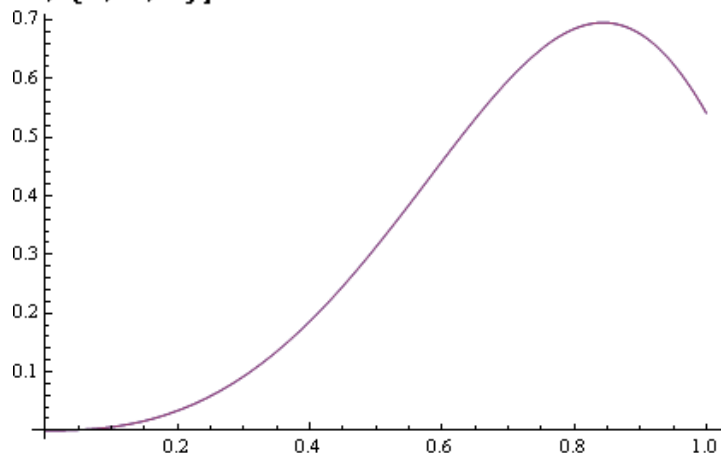


Рис. 7. Дробний інтеграл сигналу і його апроксимація

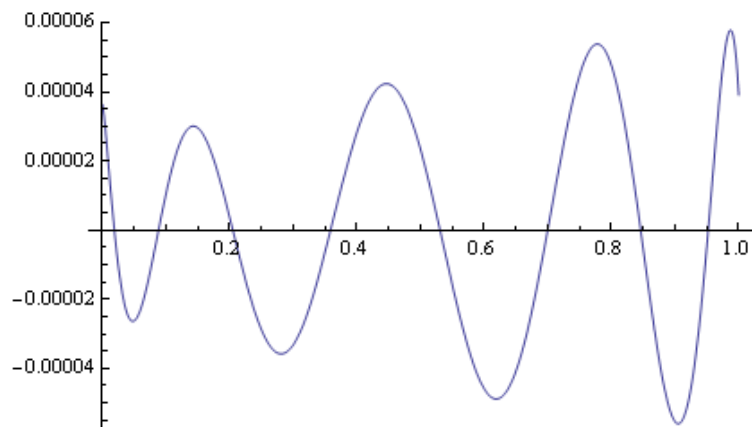


Рис. 8. Функція помилки апроксимації дробного інтеграла сигналу

Приклад 4. Апроксимувати сигнал $y(t) = \cos(2\pi(t/T)^2)$, супроводжуємою адитивною високочастотною пошкодженням $0,05 \sin(500\pi t/T)$, використавши систему базисних функцій прикладу 1. Перевірити ефективність подавлення пошкодження при використанні інтегрування методом S -перетворення.

Програма 4:

Вибір параметрів, визначення базисної системи функцій і операційної матриці апроксимуючого спектра:

```
m = 8; T = 1;
s[m, x_] := LegendreP[m, x];
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}];
W = Table[∫₀ᵀ S[[i]] * S[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
```

Формування операційної матриці інтегрування порядку 1:

```
Si := Table[∫₀ᵀ s[i - 1, -1 + 2 τ / T] dτ, {i, m}];
```

```
Qsi := Table [  $\int_0^T S[[i]] * Si[[j]] dt$ , {i, m}, {j, m} ];
```

```
P1 := Inverse[W].Qsi;
```

Задание сигнала с помехой:

```
y[t_, T_] := Cos[2  $\pi$  * (t/T) ^ 2] + 0.05 Sin[500  $\pi$  * t/T];  
y1 = y[t, T];
```

Определение вспомогательного вектора:

```
Q = Chop [N[Table[ $\int_0^T S[[i]] * y1 dt$ , {i, m}]]];
```

Определение вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:

```
Y1 = Inverse[W].Q  
{0.244127, -0.732571, 0.810711, 1.16012,  
0.175958, -0.420403, -0.272897, -0.029367}
```

Формирование аппроксимации сигнала:

```
y1a = Y1.S;
```

Визуализация сигнала с помехой (рис. 9):

```
p2 = Plot[y1, {t, 0, T}, PlotPoints -> 300]
```

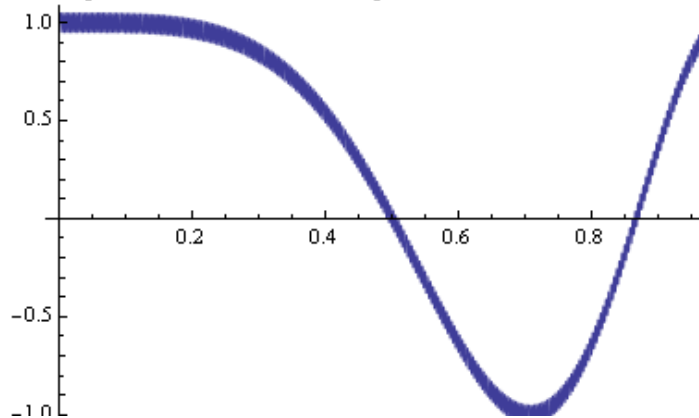


Рис. 9. Сигнал с высокочастотной помехой

Визуализация аппроксимации сигнала и сравнение с «чистым» сигналом (рис. 10):

```
p3 = Plot [{y1a, Cos[2  $\pi$  * (t/T) ^ 2]}, {t, 0, T}]
```

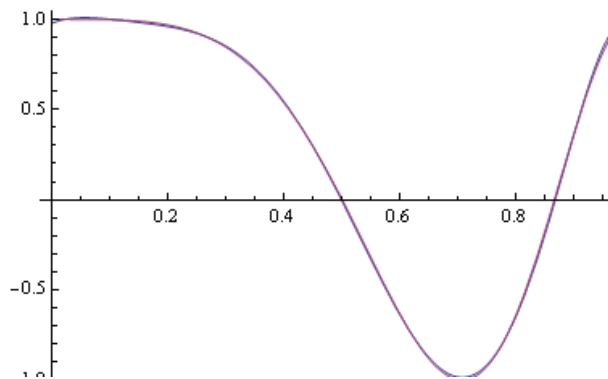


Рис. 10. Аппроксимация сигнала и сигнал без помехи

Определение вектора коэффициентов полинома, аппроксимирующего интеграл сигнала с переменным верхним пределом:

```
z1 = P1.Y1
{0.244159, 0.0409922, -0.204961, 0.0712957,
 0.101975, 0.0202715, -0.0181303, -0.010496}
```

Формирование аппроксимации интеграла сигнала:

```
z1a = Z1.S;
```

Определение точного значения интеграла сигнала с переменным верхним пределом:

```
ze = ∫0t Y[τ, T] dτ
0.000031831 - 0.000031831 Cos[500 π t] + 0.5 FresnelC[2 t]
```

Визуализация интеграла сигнала, аппроксимации интеграла и функции ошибки (рис. 11, 12):

```
p6 = Plot[{ze, z1a}, {t, 0, T}]
p7 = Plot[ze - z1a, {t, 0, T}]
```

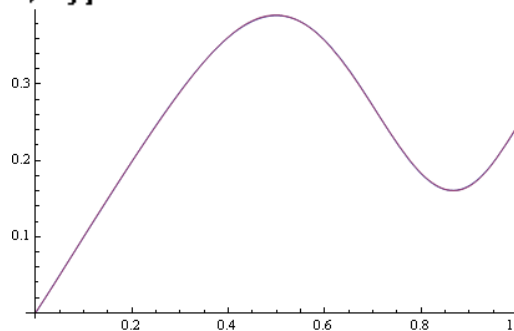


Рис. 11. Визуализация интеграла сигнала и его аппроксимации

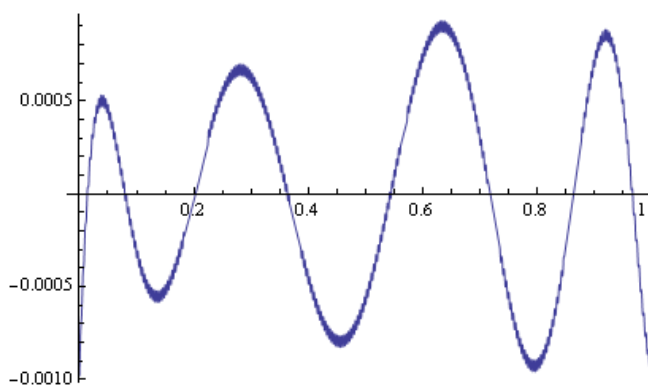


Рис. 12. Функция ошибки аппроксимации интеграла сигнала

Пример 5. Аппроксимировать сигнал $y(t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$, сопровождаемый аддитивной высокочастотной помехой $0,05 \sin(150\pi t / T)$, представленный системой отсчетов на дискретизированной системе значений аргумента. Использовать систему базисных функций примера 1, изменив значение $T=1$, и необходимые фрагменты программ, приведенных ранее в примерах 1 – 4.

Программа 5:

Задание параметров системы базисных функций и ее формирование:

```

m = 8; T = 1;
s[m, x] := LegendreP[m, x];
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}]

```

Задание вида сигнала:

```

y[t_, T_] := Cos[2 π * (t / T) ^ 2] +
0.05 Sin[150 π * t / T];

```

Задание шага дискретизации и системы значений аргумента:

```

h = 0.01; tt := Table[(i - 1) * h, {i, 100}];

```

Формирование системы дискретизированных отсчетов сигнала:

```

y2 = Evaluate[y[tt, 1]];

```

Визуализация системы отсчетов сигнала (влияние помехи может интерпретироваться как ошибки измерений при оценивании отсчетов) (рис. 13):

```

p12 = ListPlot[Table[{tt[[i]], y2[[i]]}, {i, 100}]]

```

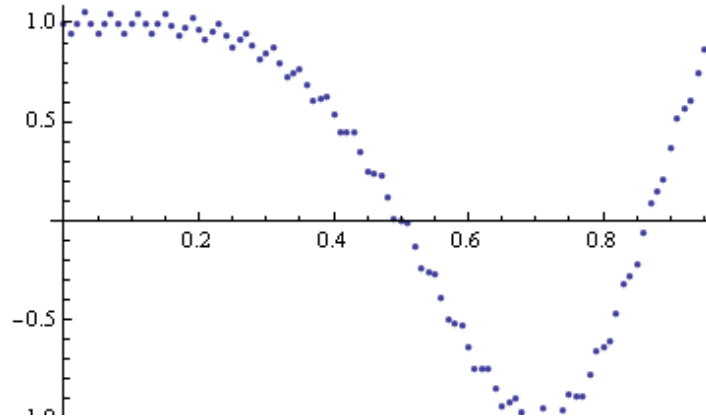


Рис. 13. Визуализация отсчетов сигнала

Нахождение вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:

```

w1 := Table[S[[i]] /. t -> tt[[j]], {j, 100}, {i, m}]; Q1 = y2;
Yt = PseudoInverse[w1].Q1
{0.244005, -0.732145, 0.810122, 1.16113,
0.174991, -0.41887, -0.274084, -0.0275743}

```

Формирование аппроксимирующего полинома и его визуализация (рис. 14):

```

yta = Yt.S; p13 = Plot[yta, {t, 0, T}]

```

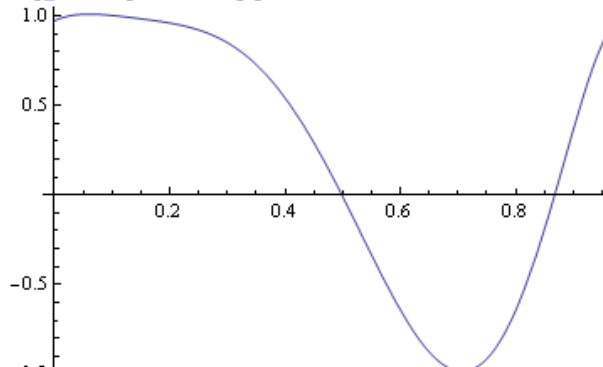


Рис. 14. Аппроксимирующий полином

Сравнение аппроксимации сигнала с системой его отсчетов (рис. 15):

```
p14 = Show[p12, p13]
```

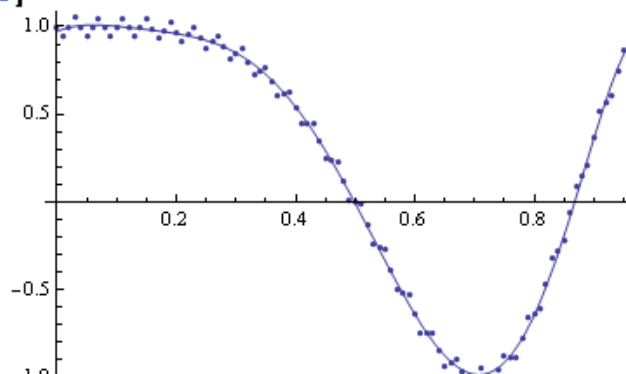


Рис. 15. Сравнение аппроксимации сигнала с системой его отсчетов

Пример 6. Определить дробные производные порядка 0,5 по Капуто и Риману–Лиувиллю сигнала $y(t) = \cos(2\pi(t/T)^2)$ на основе его аппроксимации методом S -преобразования с системой смещенных полиномов Лежандра.

Программа 6:

Задание системы базисных функций и определение операционной матрицы спектра:

```
m = 8; T = 1;
s[m_, x_] := LegendreP[m, x];
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}];
W = Table[∫0T S[[i]] * S[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
```

Определение операционной матрицы дробного интегрирования:

```
β = 0.5;
```

```
Fsi[β_, t_] :=
```

$$\frac{1}{\Gamma[\beta]} *$$

$$\text{Table}\left[\text{Simplify}\left[\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} * s[i, -1 + 2 \tau / T] d\tau,\right.\right.$$

$$\left.\text{Assumptions} \rightarrow t > 0\right], \{i, 0, m-1\}];$$

```
fsi = Fsi[0.5, t];
```

```
Qfsi := Table[∫0T S[[i]] * fsi[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
```

```
P05 := Inverse[W].Qfsi;
```

Задание формы сигнала и нахождение его аппроксимации:

```
y[t_, T_] := Cos[2 π * (t / T) ^ 2];
```

```
y1 = y[t, T];
```

```
Q = Chop[N[Table[∫0T S[[i]] * y1 dt, {i, m}]]];
```

```
Y1 = Inverse[W].Q;
```

```
y1a = Y1.S;
```

Визуализация сигнала и его аппроксимации (рис. 16):

```
p = Plot[{y1a, y1}, {t, 0, T}]
```

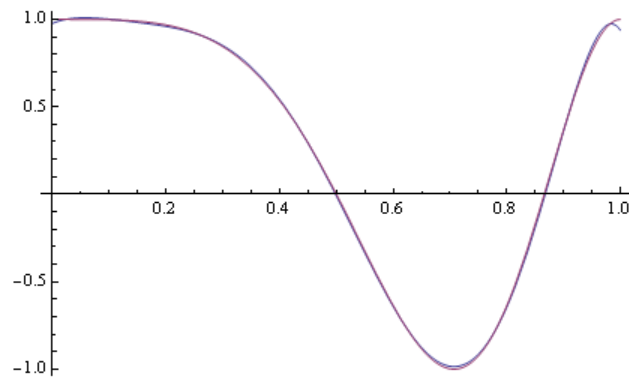


Рис. 16. Сигнал и его аппроксимация

Определение дробной производной порядка 0,5 по Риману–Лиувиллю (формула (14)):

```
Yia = P05.Y1; yia = Yia.S; yida = D[yia, t];
```

Визуализация дробной производной сигнала по Риману–Лиувиллю (рис. 17):

```
pRL = Plot[yida, {t, 0, T}]
```

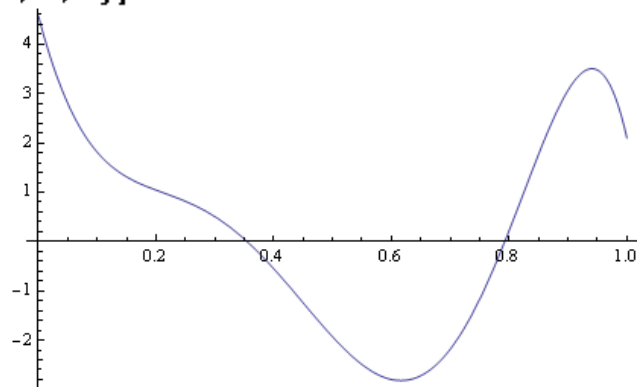


Рис. 17. Производная сигнала по Риману–Лиувиллю порядка 0,5

Определение дробной производной порядка 0,5 по Капуто (формула (15)):

```
yda = Simplify[D[y1a, t]];
```

```
Qda = Chop[N[Table[∫₀ᵀ S[[i]] * yda dt, {i, m}]]];
```

```
Yda = Inverse[W].Qda;
```

```
Ydia = P05.Yda; ydia = Ydia.S;
```

Визуализация дробной производной сигнала по Капуто (рис. 18):

```
pC = Plot[ydia, {t, 0, T}]
```

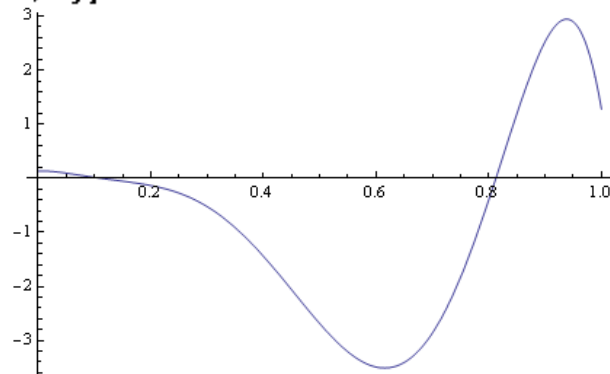


Рис. 18. Производная сигнала по Капуто порядка 0,5

Пример 7. Решить методом S -преобразований на основе смещенных полиномов Лежандра дифференциальное уравнение дробного порядка с производной по Капуто:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 5({}_0^C D_t^{1/2}(x(t)) + x(t) = f(t) = -8 + 5t^2 + \frac{100\sqrt{t}(-3+2t)}{3\sqrt{\pi}}, x(0) = x_0 = 2.$$

Преобразуем уравнение, используя следующую замену переменных и определение дробной производной по Капуто: $\frac{dx(t)}{dt} = u(t)$, $x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau$. В результате получим

следующее интегральное уравнение: $u(t) + 5({}_0^{RL} J_t^{1/2}(u(t))) + \int_0^t u(\tau) d\tau = f(t) - x_0$. Переходим в

операционное пространство S -преобразований: $\bar{U} + 5\mathbf{P}^{1/2} \cdot \bar{U} + \mathbf{P}^1 \cdot \bar{U} = \bar{F} - x_0 \bar{1}$. Решение полученного матричного уравнения имеет вид: $\bar{U} = (\mathbf{E} + 5\mathbf{P}^{1/2} + \mathbf{P}^1)^{-1} \cdot (\bar{F} - x_0 \bar{1})$, $\bar{X} = x_0 \bar{1} + \mathbf{P}^1 \cdot \bar{U}$.

Переход в пространство оригиналов осуществляется по формуле: $x_a(t) = \bar{X}^* \cdot \bar{S}(t)$. Ниже приведена программа, реализующая описанный порядок решения и полученные результаты.

Программа 7:

Задание базисной системы функций и определение операционной матрицы спектра:

```
m = 4; T = 1;
s[m_, x_] := LegendreP[m, x];
S := Table[s[i - 1, -1 + 2 t / T], {i, m}];
W = Table[∫_0^T S[[i]] * S[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
```

Формирование операционных матриц интегрирования:

```
β = 0.5;
Fsi[β_, t_] :=
  1 / Gamma[β] *
  Table[Simplify[∫_0^t (t - τ)^(β-1) * s[i, -1 + 2 τ / T] dτ, Assumptions -> t > 0],
    {i, 0, m - 1}];
fsi = Fsi[0.5, t];
Qfsi := Table[∫_0^T S[[i]] * fsi[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
P05 := Inverse[W].Qfsi
Si := Table[∫_0^t s[i - 1, -1 + 2 τ / T] dτ, {i, m}];
Qsi := Table[∫_0^T S[[i]] * Si[[j]] dt, {i, m}, {j, m}];
P1 := Inverse[W].Qsi;
```

Задание правой части интегрального уравнения и его операционного аналога:

```
f = N[-10 + 5 t^2 + (100 sqrt[t] * (-3 + 2 t)) / (3 sqrt[π])];
Qf = Chop[N[Table[∫_0^T S[[i]] * f dt, {i, m}]]];
F = Inverse[W].Qf;
```

Задание операционного изображения константы «1»:


```
Q1 = Chop[N[Table[ $\int_0^T S[[i]] * 1 dt, \{i, m\}]]];$ 
```

```
One = Inverse[W].Q1;
```

Решение уравнения в области S -преобразования:

```
U = Inverse[IdentityMatrix[m] + 5 P05 + P1].F
{-5., 5., -3.31897  $\times 10^{-14}$ , -1.3783  $\times 10^{-13}$ }
```

```
X = P1.U + 2 One
```

```
{-1.333333, -2.5, 0.8333333, -3.31897  $\times 10^{-15}$ }
```

Переход в область оригиналов (обратное S -преобразование):

```
xa = X.S
```

```
-1.33333 - 2.5 (-1 + 2 t) + 0.8333333 (1 - 6 t + 6 t2) -  
3.31897  $\times 10^{-15}$  (-1 + 12 t - 30 t2 + 20 t3)
```

Точное решение дифференциального уравнения:

```
xe = 5 t2 - 10 t + 2;
```

Визуализация точного и аппроксимационного решений уравнения и функции ошибки (рис. 19, 20):

```
Plot[{xe, xa}, {t, 0, T}]
```

```
Plot[xe - xa, {t, 0, T}, PlotPoints  $\rightarrow$  500]
```

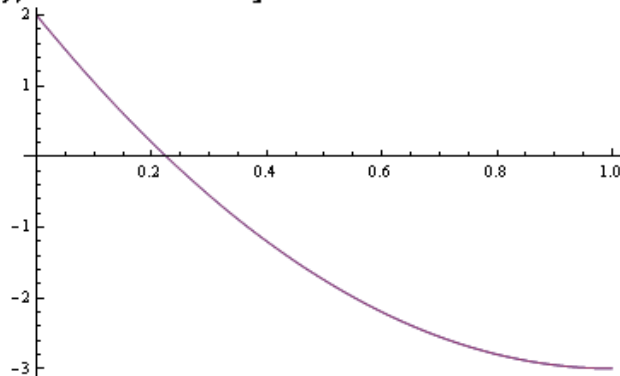


Рис. 19. Точное и аппроксимационное решения уравнения

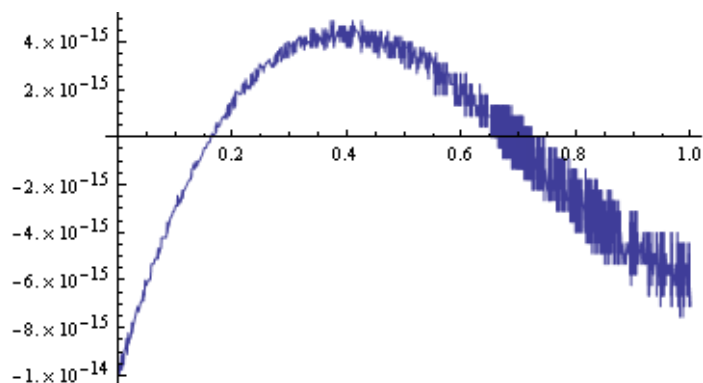


Рис. 20. Функция ошибки аппроксимационного решения уравнения

Выводы. Метод S -преобразований является эффективным инструментом обработки сигналов и моделирования динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями целого, дробного и смешанного порядков, в частности:

- при аналитической аппроксимации непрерывных и дискретизированных сигналов обеспечивается сжатие информации, выделение сигнала на фоне высокочастотных помех;

- использование в качестве систем базисных функций смещенных полиномов Лежандра позволяет производить оценивание производных целого и дробного порядков сигналов на основе прямого дифференцирования аппроксимаций;

– программы, приведенные в рассмотренных иллюстративных примерах, допускают изменение вида сигналов, параметров сигналов, порядков базисной системы, интервалов изменения аргументов, числовых значений порядков дифференциальных и интегральных операторов;

– при решении интегродифференциальных уравнений переход из пространства изображений в пространство оригиналов существенно проще по сравнению с классическими операционными методами, так как сводится к формированию аппроксимирующего полинома и не требует решения алгебраических или трансцендентных уравнений, как это делается, например, при использовании преобразования Лапласа.

Список литературы

1. *Васильев В. В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К.: НАН України, 2008. – 256 с.
2. *Васильев А. В.* Оценивание параметров и дискретизация непрерывных сигналов на основе полиномиальной аппроксимации в локальных базисах / А. В. Васильев // Електроніка та системи управління. – 2011. – № 1 (27). – С. 14–19.
3. *Васильев А. В.* Дискретизация и оценивание дробных производных непрерывных сигналов в локальных базисах полиномов Лежандра / А. В. Васильев // Електроніка та системи управління. – 2011. – № 1 (27). – С. 20 – 25.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц /Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – М.: ГНТТЛ, 1954. – 327 с.
6. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных / В. В. Учайкин – Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. – 512 с.
7. *Wolfram Stephen* The Mathematica book. – Wolfram Media / Cambridge University Press, 1996. – 1403 p.

О. В. Васильев, В. В. Васильев, Л. О. Сімак

Обработка непрерывных и дискретизованных сигналов методом S-перетворень у базисі зміщених поліномів Лежандра

Для аналітичної апроксимації і подальшого оброблення безперервних і дискретизованих сигналів, заданих на кінцевому інтервалі зміни аргумента та супроводжуваних високочастотними завадами і помилками вимірювань застосовано метод S-перетворення. Як систему базисних функцій використано систему ортогональних поліномів Лежандра, зведених до інтервалу визначення сигналів. Виведено вирази для визначення операційної матриці інтегрування цілого і дробового порядків у базисі зміщених поліномів Лежандра. Наведено приклади подальшого оброблення апроксимованих сигналів (низькочастотної фільтрації, визначення похідних різних цілих і дробових (за Капуто і Ріманом–Ліувіллем) порядків). Обчислювальні експерименти виконано в програмному середовищі системи Mathematica®.

A. V. Vasiliev, V. V. Vasylyev, L. A. Simak

Continuous and sampled signal processing via S-transform method based on shifted Legendre polynomials

The S-transform is applied to the analytical approximation and the subsequent processing of continuous and sampled signals defined on a finite interval of the argument and followed by high-frequency noise and measurement errors. The system of orthogonal Legendre polynomials defined on approximation interval is used as a system of base functions. The expressions for the operational matrix of integration of the integer and fractional orders in the basis of the shifted Legendre polynomials have been derived. Examples of postprocessing of the approximated signals (low-pass filtering, evolution of derivative of various integer and fractional orders in Caputo and Riemann–Liouville sense) are given. Computer experiments are performed in the software environment of Mathematica®.