УДК 656.025.6

професор, Олешко Т.І.
Національний авіаційний університет

Економіко-математичне моделювання економічних об’єктів

Для економічної кібернетики найбільшу практичну цінність становить економіко-математичне моделювання, яке направлене на дослідження економічних об’єктів засобами математичного моделювання з урахуванням специфіки галузі економіки. Розглядається один із таких методів – метод зважених траєкторій, який дозволяє обчислювати не лише ймовірність перебування економічної системи в множині особливих станів X, а й ймовірність попадання системи в цю множину протягом деякого часу.

Нехай закон розподілу ймовірностей числа ν появи подій процесу $z(t)$ в інтервалі $(0,T)$ задається формулою

$$P_\nu(T) = \frac{(\lambda T)^\nu e^{-\lambda T}}{\nu!}, \quad \nu \geq 0,$$

а закон розподілу ймовірностей появи μ подій процесу $z^*(t)$ в тому ж інтервалі $(0,T)$ формулою

$$P^*_\mu(T) = \frac{(\lambda^* T)^\mu e^{-\lambda T}}{\mu!}, \quad \mu \geq 0.$$

Тоді, застосувавши формулу Байєса, можна отримати наступне співвідношення

$$P_\nu(T) = \frac{P^*_\mu(T) \cdot P_i(T)}{P^*_i(T)},$$

Зробивши заміну

$$c = \frac{P_i(T)}{P^*_i(T)},$$

отримаємо формулу

$$P_\nu(T) = c \cdot P^*_\mu(T).$$

З цієї формули випливає алгоритм моделювання траєкторії процесу $z^*(t), 0 < t < T,$ і побудова за нею незміщених статистичних оцінок для початкового процесу $z(t)$.

Розглянемо випадковий процес $z^*(t)$ в інтервалі $(0,T)$. На першому кроці моделюється дискретна випадкова величина μ числа подій процесу $z^*(t)$ $0 < t < T,$ згідно закону розподілу ймовірностей (таблиця 1):

Таблиця 1.

Закон розподілу ймовірностей

μ	0	1	2	3	…
p	p_0	p_1	p_2	p_3	…

$$P_\mu = P_\mu(T) = \frac{(\lambda^* T)^\mu e^{-\lambda T}}{\mu!},\ \mu \ge 0.$$

Припустимо, що в результаті моделювання μ прийняла значення i.

На другому кроці, використовуючи властивість пуассонівського процесу про рівномірність розподілу в інтервалі $(0,T)$ моментів появи подій за умови, що вони туди попали, моделюємо ці моменти

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < T$$

згідно функції розподілу

$$F(T) = \frac{t}{T},\ 0 < t < T.$$

Моменти появи подій – незалежні й однаково розподілені випадкові величини. В результаті моделювання отримуємо одну з траєкторій $z_t^{(j)}$, $1 \le j \le N$, і за нею знаходимо функціонал

$$\varphi_T^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо, } z_t^{(j)*} \in X,\ 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противному випадку.} \end{cases}$$

Якщо обчислити статистичну оцінку

$$\overline{\varphi}_T = \frac{\varphi_T^{(1)} + \varphi_T^{(2)} + \dots + \varphi_T^{(N)}}{N},$$

то вона буде зміщеною. Для того, щоб виправити її в напрямку незміщеності, необхідно на третьому кроці обчислити коефіцієнт c:

$$c = \frac{P_i(T)}{P_i^*(T)} = \frac{(\lambda T)^i e^{-\lambda T}}{(\lambda^* T)^i e^{-\lambda^* T}} = \frac{e^{-\lambda(1-m)T}}{m^i}.$$

В j - й траєкторії коефіцієнт c_j буде мати вигляд

$$c_j = \frac{e^{-\lambda(1-m)T}}{m^{i_j}},$$

де i_j - значення випадкової величини μ в j -й траєкторії $z^{(j)}$, $0 < t < T, 1 \le j \le N$. c_j будемо називати j - ї траєкторії.

В результаті таких міркувань остаточно отримаємо формулу для розрахунку незміщеної оцінки $\overline{\varphi}_T^*$:

$$\overline{\varphi}_T^* = \frac{c_1 \overline{\varphi}_T^{(1)} + c_2 \overline{\varphi}_T^{(2)} + \dots + c_N \overline{\varphi}_T^{(N)}}{N}.$$

Розглянемо наступний приклад. Нехай на лінії працює п'ять пасажирських літаків. При виході літака з ладу він починає негайно ремонтуватися протягом випадкового часу згідно функції розподілу

$$G_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t},\ 1 \le i \le 5.$$

Час безвідмовної роботи літака є випадковою величиною з функцією розподілу

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Потрібно знайти ймовірність того, що за час T експлуатації літаків в ремонті буде знаходитись одночасно хоча б три з них.

Вказана ймовірність є малою величиною, якщо середнє число відмов λT мале, а інтенсивність відновлення μ_i велика (швидке відновлення). За модель функціонування літаків візьмемо кусково-лінійний процес

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_5(t)),$$

де $z_i(t)$ описує роботу i -го літака

$$z_i(t) = (\nu_i(t), \xi_i(t)),\ 1 \le i \le 5.$$

Дискретна компонента визначається співвідношенням