УДК 656.025.6 (045)

Олешко Т.І.
Олешко І.О.

ПРАКТИЧНЕ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглядається один із методів моделювання складних економічних систем – метод монотонних ланцюжків, який дозволяє зменшити кількість обчислень при моделюванні роботи економічної системи порівняно з іншими методами

Монотонним ланцюжком називається монотонно неспадна траєкторія кусково-лінійного процесу.

На рис. 1 в інтервалі $(0,\tau_1)$ зображено перший монотонний ланцюжок, а в інтервалі (τ_2,τ_3) - другий монотонний ланцюжок.

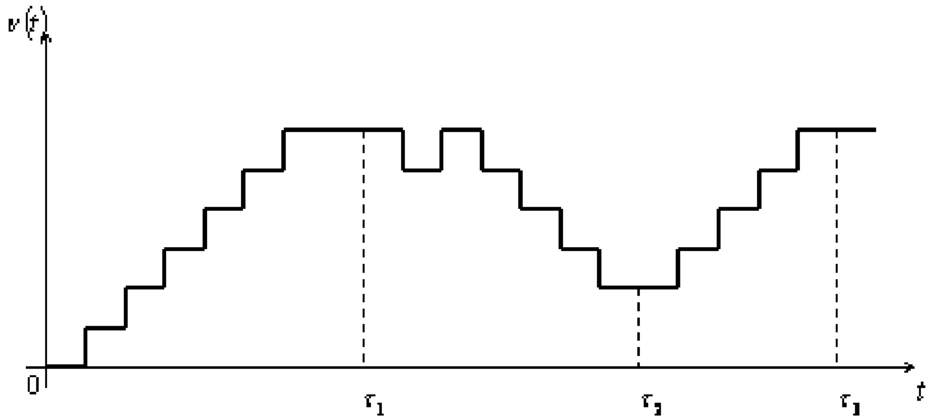

Рис.1

При моделюванні об'єктів з рідкісними подіями відповідні їм траєкторії випадкового процесу є, як правило, немонотонними (ймовірність появи монотонного ланцюжка – мала величина, близька до нуля). Тому при побудові монотонних ланцюжків застосовують прийом умовних функцій розподілу мінімуму.

Нехай маємо кусково-лінійний процес $z(t)$:

$$z(t)=(z_1(t),\ z_2(t),\dots,\ z_n(t)),$$

де $z_i(t)$- незалежні кусково-лінійні процеси

$$z_i(t)=(\nu_i(t),\ \xi_i(t)),\quad 1\le i\le n,$$

$\nu_i(t)\in\{0,1\},\ \xi_i(t)$ - час перебування процесу $z_i(t)$ в стані $\nu_i(t)$.

Позначимо через $\vec{\nu}(t)$ випадковий вектор

$$\vec{\nu}(t)=(\nu_1(t),\ \nu_2(t),\dots,\ \nu_n(t)),\quad t>0,$$

а через $\vec{\nu}_r(t)$ - вектор $\vec{\nu}(t)$, для якого виконується умова

$$\left|\vec{v}(t)\right| = v_1(t)+v_2(t)+\ldots+v_n(t)\ge r,\ 0<r\le n.$$

Це означає, що в момент t рівно r випадкових процесів з множин $\{z_1(t), z_2(t),\ldots, z_n(t)\}$ знаходяться в стані 1, а решта – в стані 0. Сукупність векторів $\vec{v}_r^{(t)}$ утворюють множину X особливих станів. Ставиться задача знаходження ймовірності p попадання процесу $z(t)$ в множину X за час T.

Якщо p- мала величина, то користування при моделюванні функціонування систем індикаторним підходом є недоцільним, оскільки серед величезного числа n траєкторій з’являється лише невелике число m траєкторій, що попадають в множину X.

Суть методу монотонних ланцюжків стосовно розв’язання поставленої задачі заключається в слідуючому. Спочатку будується траєкторія z_i процесу $z(t)$ безпосереднім чином (тобто без використання умовних функцій розподілу мінімуму). Для конкретності, і без позбавлення загальності, можна припустити, що реалізувалась i-та траєкторія, зображена на рис. 2. Це означає, що за час T траєкторія не попала в множину X, тобто $2<r$, а $\varphi_i = 0$.

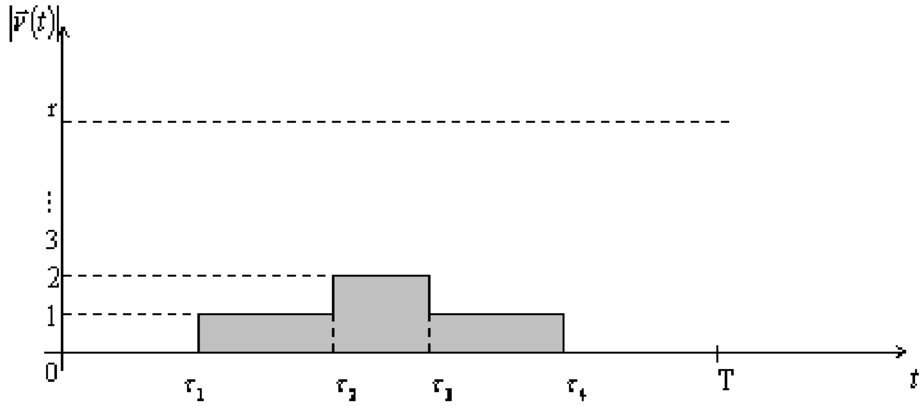

Рис. 2

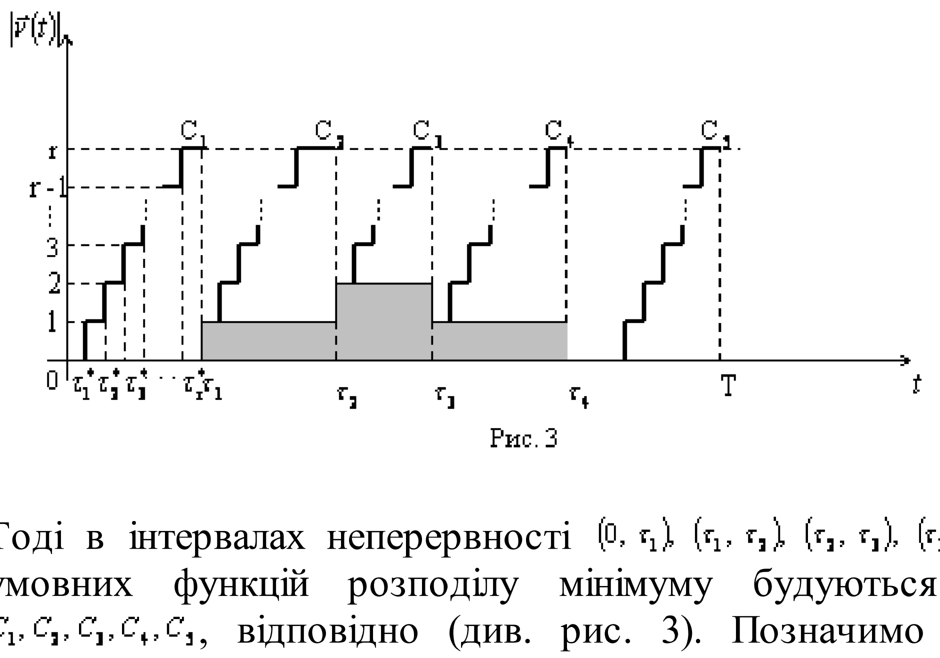

Рис. 3

Тоді в інтервалах неперервності $(0, \tau_1)$, (τ_1, τ_2), (τ_2, τ_3), (τ_3, τ_4) і (τ_4, T) з допомогою умовних функцій розподілу мінімуму будуються монотонні ланцюжки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, відповідно (див. рис. 3). Позначимо ймовірність появи 1-го ланцюжка через p_1, і розглянемо дві протилежні події A_1 і $\overline{A}_1$:

$$A_1 = \{\text{поява ланцюжка } C_1\},$$

$$\overline{A}_1 = \{\text{непоява ланцюжка } C_1\},$$

для яких виконуються співвідношення

$$P(A_1) = p_1,\ P(\overline{A}_1) = 1 - p_1.$$

Враховуючи це, ймовірність p^* попадання z_t в інтервалі $(0, T)$ в множину X можна визначити за формулою

$$p^* = p_1 + (1 - p_1)P_2, \qquad (1)$$

де P_2 - ймовірність попадання траєкторії z_t в інтервалі (τ_1, T) в множину X безпосереднім чином (тобто без використання якого-небудь методу):

$$P_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z_t \in X,\ \tau_1 < t < T, \\ 0, & \text{в противному випадку.} \end{cases}$$

Припустимо, що $P_2 = 1$. Тоді не було б сенсу будувати монотонний ланцюжок C_1 і знаходити ймовірність p_1, що видно з (1):

$$p^* = p_1 + (1 - p_1) = 1.$$

Тому цікавим є випадок, коли $P_2 = 0$. Дійсно, оскільки траєкторія $z_t,\ \tau_1 < t < T$, не попала в множину X, то в інтервалі (τ_1, τ_2) розглядається ланцюжок C_2 і відповідна йому ймовірність

$$p_2 = P(A_2),\ 1 - p_2 = P(\overline{A}_2),$$

де A_2 і $\overline{A}_2$ - дві протилежні випадкові події:

$$A_2 = \{\text{поява ланцюжка } C_2\},$$

$$\overline{A}_2 = \{\text{непоява ланцюжка } C_2\},$$

Через вказані ймовірності P_2 має вигляд:

$$P_2 = p_2 + (1 - p_2)P_3, \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) так:

$$p^* = p_1 + (1 - p_1)\left[p_2 + (1 - p_2)P_3\right]. \qquad (3)$$

В цьому співвідношенні P_3 - ймовірність попадання траєкторії z_t в інтервалі (τ_2, T) в множину X безпосереднім чином:

$$P_3 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z_t \in X,\ \tau_2 < t < T, \\ 0, & \text{в противному випадку.} \end{cases}$$

Якщо виникло таке попадання, то (3) набуває вигляду:

$$p^* = p_1 + (1 - p_1)\left[p_2 + (1 - p_2)\right] = 1.$$

і на цьому моделювання траєкторії припиняється. Припустимо (і це видно з рис. 2), що виконується умова

$$z_t \overline{\in} X,\ \tau_2 < t < T.$$

Тоді ймовірність P_3 має вигляд:

$$P_3 = p_3 + (1 - p_3)P_4, \qquad (4)$$

а ймовірність P_4 приймає вигляд

$$P_4 = p_4 + (1 - p_4)P_5, \qquad (5)$$

де p_3 - ймовірність появи ланцюжка C_3, а p_4 - ймовірність появи ланцюжка C_4. Якщо по аналогії з попередніми ланцюжками розглянути останній ланцюжок C_5 і зв'язані з ним ймовірності, то після простих перетворень отримаємо