

DOI: 10.18372/2415-8151.16.14332

УДК 685.31

Липський Тимофій Миколайович<sup>1</sup>,

аспірант,

Чертенко Лілія Павлівна<sup>2</sup>

канд. техн. наук, доцент

Гаркавенко Світлана Степанівна<sup>3</sup>

д.т.н., професор

*Київський національний університет технології та дизайну,*

*М.Київ, Україна*

*E-mail: lily-che@ukr.net*

## **МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРОБКИ ПРОСТОРОВОЇ ФОРМИ ВЗУТТЄВОЇ КОЛОДКИ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ЗВОРОТНОГО ІНЖИНІРІНГУ**

*Анотація.* Робота присвячена питанню розробки алгоритму способу моделювання нової форми колодки за індивідуальним замовленням в графічному 3d середовищі та математичної моделі її деформації відповідно до основних параметрів стопи та фасону колодки.

Моделювання колодки методом зворотного інжинірингу передбачає сканування поверхні вихідної колодки, яка є основою для створення нової форми шляхом виконання певних деформацій вихідної форми. Такі деформації можна математично описати у вигляді матриць геометричних перетворень: переміщення, обертання, масштаб тощо.

В роботі для проектування нової форми колодки запропоновано спосіб розрахунку параметрів деформування базової форми колодки відповідно до фасону та теоретичних параметрів колодки, отриманих на основі розмірів стопи споживача. На основі цих розрахунків розроблено алгоритм способу моделювання нової колодки з використанням методу зворотного інжинірингу та розраховано математичну модель геометричної деформації її складної просторової форми, що виконується в процесі моделювання.

---

<sup>1</sup> © Липський Т.М.

<sup>2</sup> © Чертенко Л.П.

<sup>3</sup> © Гаркавенко С.С.

*Ключові слова:* взуттєва колодка, математична модель, геометрична деформація, зворотній інжиніринг, стопа, взуття за індивідуальним замовленням, хмара точок, 3д середовище, САПР.

**Постановка проблеми.** Сучасний підхід до моделювання форми взуття орієнтується на потужні спеціалізовані системи 3д графіки, що дозволяють виконувати безліч операцій по моделюванню поверхні колодки. При цьому в основному застосовується метод зворотного інжинірингу, коли за основу майбутньої колодки береться певна базова форма, яка деформується та модифікується відповідно до заданої цілі.

При цьому основна складність полягає в пошуках компромісу між відповідністю параметрів колодки параметрам стопи та довершеністю дизайнерських рішень. Особливо гостро така проблема постає в сфері виробництва взуття за індивідуальним замовленням, оскільки тут виробники виготовляють ефектне вишукане взуття за параметрами стопи замовника.

Проектування форми за методом зворотного інжинірингу передбачає використання базової колодки [1], з якої отримуємо бажану форму шляхом застосування комплексу графічних функцій 3д моделювання. Оскільки база вихідних форм досить обмежена, то часто доводиться модифікувати колодку-першоджерело в багатьох напрямках різними функціями.

Досі не існує науково обґрунтованого методу розробки модельної взуттєвої колодки в середовищі 3д САПР на основі параметрів стопи замовника.

Автоматизація процесу проектування форми взуття та оснастки отримала широке застосування в сфері виробництва спортивного, комфортного взуття тощо. Для проектування ортопедичного взуття впровадження CAD\CAM технологій має місце на добре оснащених європейських підприємствах, в нашій країні використання новітніх систем та прогресивного обладнання вкрай обмежене через їхню дороговизну та низьку платоспроможність споживачів. Найбільшу складність викликає автоматизація проектних процесів для розробки 3д форми

взуття та оснастки в сфері виготовлення взуття за індивідуальним замовленням по ряду причин:

- ускладнення організації проектних процесів через велике різноманіття форм та параметрів стоп, кожній з яких має відповідати індивідуальна форма колодки;
- відсутність обґрунтованої методики та рекомендацій по проектуванню форми колодок за індивідуальним замовленням (не ортопедичних);
- неможливість багаторазового виготовлення колодки для кожного замовника в разі невеликого досвіду;

В Україні окрім названих факторів актуальна також така причина як висока ціна спеціалізованих комп'ютерних систем та допоміжного обладнання. Однак саме сфера виробництва взуття за індивідуальним замовленням перспективна для розвитку, модернізації та впровадження новітніх технологій з економічної точки зору, оскільки останнім часом все більше людей звертаються до ательє індошвику взуття через неможливість задовольнити свої потреби готовим взуттям серійного виробництва. Замовники, серед яких чимало людей середнього та вище середнього достатку, потребують взуття за індивідуальними антропометричними параметрами, оригінального дизайну та ін.. І головним елементом, що забезпечує якість замовленого взуття, є взуттєва колодка.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Складні задачі автоматизованого проектування просторової форми колодки на основі індивідуальних параметрів стопи в комп'ютерному графічному середовищі ставляться багатьма сучасними вченими із Великобританії, Іспанії, Японії, Китаю, Гонг-Конгу та ін.. В їхніх наукових роботах пропонується обирати з бази сканованих колодок максимально схожу за фізичними параметрами до стопи замовника, а потім коригувати її до досягнення потрібної форми [2, 3]; порівнювати стопу замовника із стопою-еталоном, що послужила основою для розробки потрібного фасону колодки, та робити висновки про необхідні коригування форми колодки [4]; використовувати деформаційну решітку для розрахунку необхідних коригувань форми колодки на основі деформації, якій піддавалася форма стопи-еталона до параметрів

досліджуваної стопи[5]; використовувати карту відхилень для визначення відповідності колодки [6]. Основний акцент в цих та ставиться на розробці способів визначення найбільш підходящої по параметрах форми колодки, яка стає базою для розробки нової індивідуальної колодки. Однак для реалізації такого підходу на підприємстві має бути величезна електронна база віртуальних колодок, що не завжди можливо. Крім того, в жодній з робіт не дається детальних рекомендацій по коригуванню параметрів базової колодки для побудови нової індивідуалізованої форми. А як показує практика, в цьому є найбільша складність

**Мета.** В даній роботі поставлено ціль розробки алгоритму способу моделювання нової форми колодки за індивідуальним замовленням в графічному 3д середовищі та математичної моделі її деформації відповідно до основних параметрів стопи та фасону.

**Основна частина.** Складна незакономірна просторова форма колодки в цифровому вигляді може бути представлена у вигляді полігональної моделі або сітки раціональних бікубічних сплайнів. Вихідна інформація для їх побудови отримується за допомогою спеціальних пристроїв (3д сканерів) та представляє собою хмару точок в тривимірному просторі.

Моделювання колодки методом зворотного інжинірингу передбачає сканування вихідної колодки, з якої отримуємо нову шляхом виконання певних деформацій форми базової колодки. Такі деформації можна математично описати у вигляді матриць геометричних перетворень. Найчастіше при цьому використовуємо такі дії як переміщення, обертання, масштаб тощо.

Кожній точці поверхні колодки  $(x_i, y_i, z_i)$  відповідає точка чотирихмірного простору  $(x_i, y_i, z_i, 1)$ , а для виконання основних перетворень будемо використовувати матриці розмірністю  $4 \times 4$ . Матриця переміщення з точки  $(x_0, y_0, z_0)$  в точку  $(x, y, z)$  має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x - x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y - y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z - z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

матриця масштабування теж будується із тривимірної матриці:

$$S = \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$K_x$  – коефіцієнт масштабування форми по довжині вздовж вісі X

$K_y$  - коефіцієнт масштабування форми по ширині вздовж вісі Y

$K_z$  - коефіцієнт масштабування форми по висоті вздовж вісі Z

Матриця повороту відносно осі OY на кут  $\alpha$  виглядає в такий спосіб:

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

При деформації колодки для модифікації її фасону відповідно до параметрів висоти підйому п'яткової частини в тривимірному середовищі ми застосуємо композицію перетворень:

$$M = T \cdot (R \cdot (T^{-1})) \quad (6)$$

Тоді, матриця деформації колодки при обертанні її п'яткової частини навколо вісі, що проходить через центр внутрішнього пучка, матиме вигляд:

$$M = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & -x \cos \alpha - z \sin \alpha + x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & x \sin \alpha - z \cos \alpha + z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Практичний досвід проектування нової колодки для виготовлення взуття за індивідуальним замовленням на основі базової форми з використанням методу зворотного інжинірингу диктує таку послідовність дій та розрахунків:

1) Отримання вихідної інформації для проектування шляхом сканування стопи та колодки (файл трьохмірних координат точок поверхні).

2) Вимірювання основних довжинних, широтних та обхватних параметрів стопи та колодки:  $D_{ст}$ ,  $D_{сл-к}$ ,  $Ш_{ст}$ ,  $Ш_{п-к}$ ,  $O_{ст}$ ,  $O_{п-к}$  (Рис. 1).

3) Розрахунок теоретичних параметрів колодки на основі стопи з урахуванням всіх необхідних вимог та факторів ( $D_{сл-теор}$ ,  $O_{п-теор}$ ).

4) Порівняння теоретичних параметрів та параметрів фізичної колодки.

5) Аналіз форми колодки на предмет відповідності замовленню та вимогам дизайну.

6) Редагування розмірів колодки по довжині, ширині та висоті.

7) Коригування висоти підйому п'яткової частини  $V_k$  (Рис. 2).

8) Модифікація окремих ділянок форми колодки у відповідності до особливостей будови стопи замовника.

9) Перевірка параметрів колодки на відповідність параметрам стопи та вимогам дизайну.

10) Коригування форми колодки у відповідності до типу взуття та технологічних вимог виробництва.

Розрахунок теоретичних параметрів колодки здійснюється на основі параметрів стопи та враховує особливості біомеханіки та фізіології стопи [7].

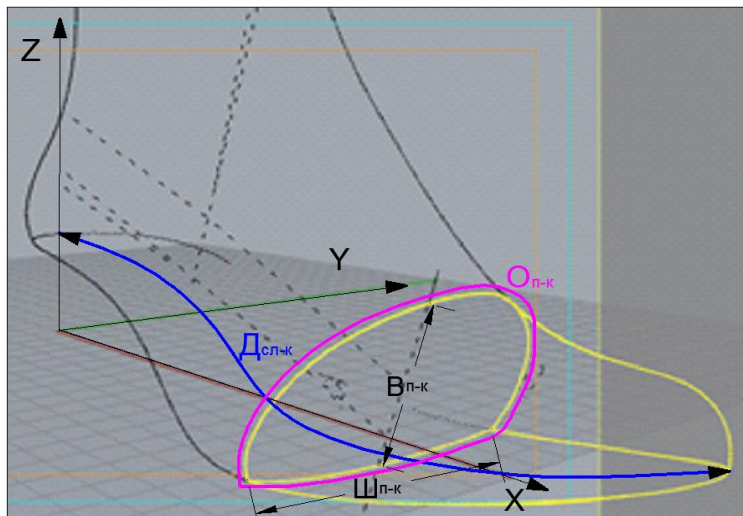


Рис. 1 Основні геометричні 3д параметри взуттєвої колодки

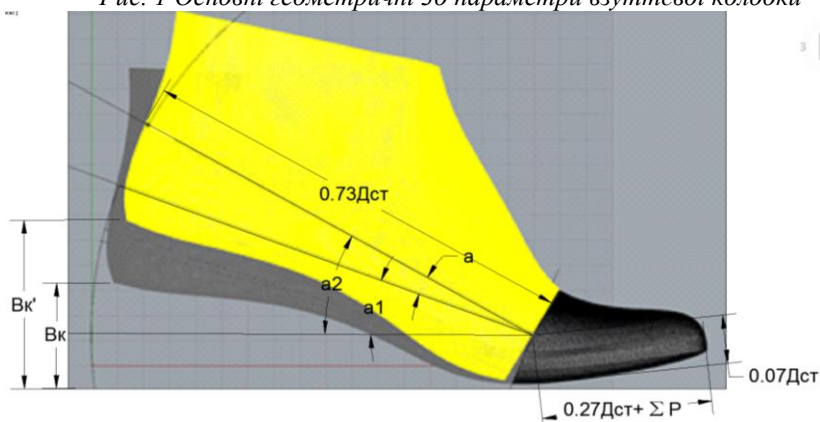


Рис. 2 Параметри деформації форми колодки при зміні висоти підйому п'яткової частини

Теоретичний розрахунок довжини сліду колодки для дорослих статево-вікових груп населення:

$$D_{сл-теор} = D_{ст} + \Sigma P - S = D_{ст} + P_1 + P_3 - S \quad (8)$$

де  $D_{ст}$  - довжина стопи,

$P_1$  - припуск на збільшення довжини стопи при русі,

$P_3$  - декоративний припуск,

S - зсув сліду в п'ятці.

Для подальшого розрахунку коефіцієнтів масштабування необхідно також розрахувати довжину проєкції колодки на площину XY (див. Рис. 1, 2).

$$D_{к-XY} = 0.73D_{cm} \cdot \cos a1 + 0.27D_{cm} + \Sigma P = 0.73(D_{ст-к} - \Sigma P + S) \cdot \cos a1 + 0.27D_{cm} + \Sigma P \quad (9)$$

де  $D_{ст-к}$  – довжина сліду колодки, виміряна по фізичному зразку

$a1$  – кут підйому п'яtkової частини колодки

При розрахунку обхватних параметрів колодки (Рис. 2) має бути враховано як антропометричні параметри стопи, так і вплив біомеханіки, фізіології та технологічні особливості матеріалів заготовки тощо. Підсумувавши всі фактори, що впливають на розрахунок параметрів колодки згідно проаналізованим дослідженням, отримали формулу для теоретичного розрахунку обхвату колодки

$$O_{к-теор} = O_c + O_c \cdot \frac{\phi - \varphi - \varepsilon + \delta + \lambda}{100} \quad (10)$$

де  $O_c$  - периметр перерізу стопи,

$O_k$  - периметр відповідного перерізу колодки,

$\phi$  – відносне припустиме стискання стопи

$\varphi$  – відносне збільшення обхвату при русі

$\varepsilon$  – відносне розтягнення заготовки стопою

$\delta$  – відносна величина усадки заготовки верху після зняття з колодки

$\lambda$  – відносний припуск на збільшення стопи (тільки для дитячих колодок)

Коефіцієнт масштабування колодки по довжині розраховується виходячи з необхідного збільшення (зменшення) довжини проєкції:



$$K_D = \frac{(0.73 \cdot \cos a_1 + 0.27) D_{cm}}{(D_{сл-к} - \Sigma P + S) \cdot (0.73 \cos a_1 + 0.27)} = \frac{D_{cm}}{(D_{сл-к} - \Sigma P + S)} = \frac{D_{сл-теор}}{D_{сл-к}} \quad (11)$$

$D_{сл-к}$  – довжина сліду колодки з бази, виміряна в програмному середовищі

$D_{сл-теор}$  – довжина сліду колодки теоретична, розрахована на основі параметрів стопи

$a_1$  – кут підйому п'яткової частини колодки

Коефіцієнт масштабування колодки по ширині та висоті розраховується наступним чином:

$$K_{III} = \frac{O_{п-теор}}{O_{п-к}} \quad (12)$$

$O_{п-к}$  – обхват колодки з бази, вимірянний по середині пучків в програмному середовищі

$O_{к-теор}$  – обхват колодки в пучках теоретичний, розрахований на основі відповідного обхвату стопи

Кут обертання п'ятково-геленкової частини навколо центру внутрішнього пучка розраховується наступним чином:

$$a = \arcsin \frac{B_k'}{0.73 D_{cm}} - \arcsin \frac{B_k}{0.73 D_{cm}} \quad (13)$$

Де  $B_k$  – початкова висота підйому п'яткової частини базової колодки

$B_k'$  – нова висота підйому п'яткової частини згідно фасону нової колодки.

Таким чином, процес деформації форми колодки, здійснюваний у відповідності до коригування її основних фізичних розмірів та висоти підйому п'яткової частини, можна представити у вигляді алгоритму (Рис. 3)

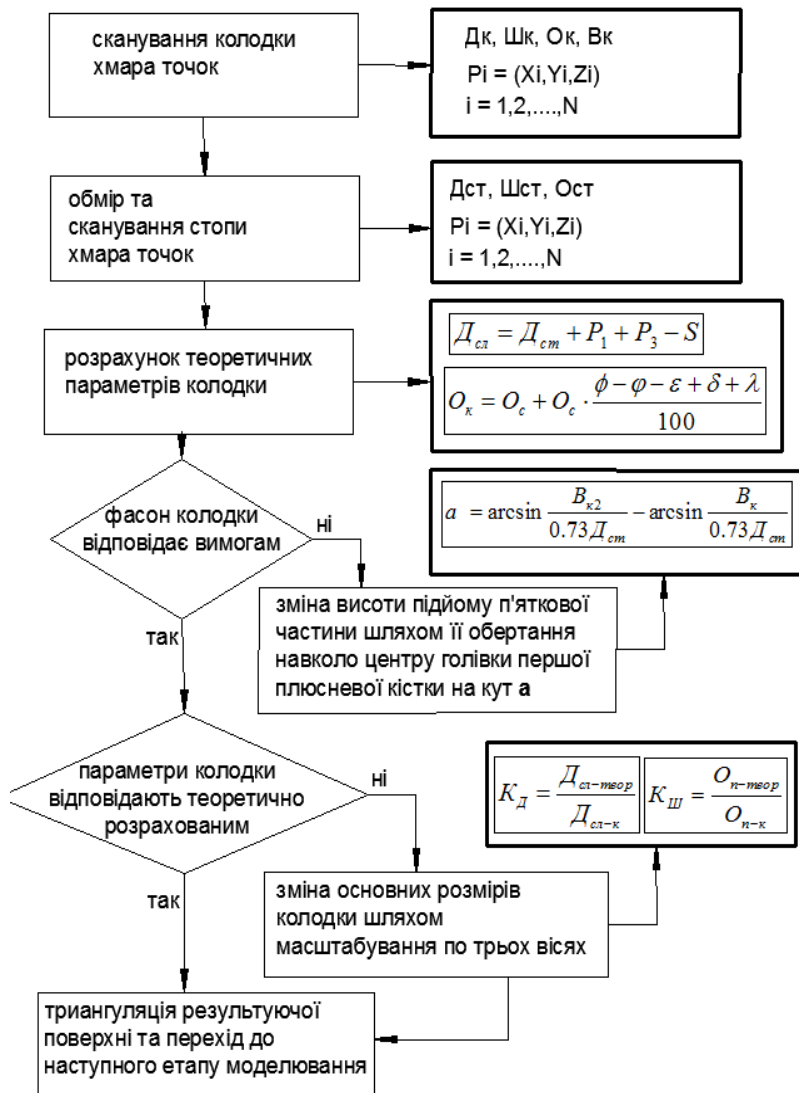


Рис. 3. Алгоритм процесу моделювання нової колодки на основі параметрів стопи замовника та базової форми колодки в графічному 3д середовищі

Для розрахунку результуючої матриці деформації колодки, що включає масштабування форми та обертання

п'ятково-геленкової частини перемножуємо матриці масштабування та обертання:

$$T1 = \begin{vmatrix} \frac{D_{сл-теор}}{D_{сл-к}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{O_{н-теор}}{O_{н-к}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{O_{н-теор}}{O_{н-к}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & -x \cos \alpha - z \sin \alpha + x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & x \sin \alpha - z \cos \alpha + z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{D_{сл-теор}}{D_{сл-к}} \cos \alpha & 0 & \frac{O_{н-теор}}{O_{н-к}} \sin \alpha & -x \cos \alpha - z \sin \alpha + x \\ 0 & \frac{O_{н-теор}}{O_{н-к}} & 0 & 0 \\ \frac{D_{сл-теор}}{D_{сл-к}} \sin \alpha & 0 & \frac{O_{н-теор}}{O_{н-к}} \cos \alpha & x \sin \alpha - z \cos \alpha + z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

де  $\alpha$  – кут повороту п'яткової частини

$X = 0.73D_{ст}$  – відстань до центру голівки першої плеснової кістки

$Z = 0.07D_{ст}$  – висота до центру голівки першої плеснової кістки

Це і буде кінцевий варіант матриці результуючої деформації

**Висновки.** Таким чином, в роботі було розроблено алгоритм процесу моделювання нової колодки на основі сканованої форми стопи замовника з використанням методу зворотного інжинірингу та розраховано математичну модель геометричної деформації її складної просторової форми, що відбувається в процесі моделювання. При цьому в основу алгоритму та мат моделі деформації колодки покладено науково обґрунтовані параметри, що базуються на антропометричній будові стопи.

При працевлаштуванні такі фахівці є найбільш затребуваними в сфері WEB програмування, створенні мультимедійної продукції та комп'ютерних ігор, оскільки здібні до розробки гармонійного візуального ряду та орієнтовані на командну співпрацю з професійними дизайнерами.

**Перспективи подальшого дослідження.** Запропонований алгоритм способу моделювання має бути продовжений з метою подальшої модифікації форми колодки з урахуванням більшої кількості досліджуваних параметрів стопи, а також можливості коригування типу колодки. Подальша деформація форми колодки включатиме коригування окремих її ділянок у відповідності до особливостей форми стопи та конструктивно-технологічних особливостей взуття.

#### Література

1. *Ільюшин С.В.* Разработка методики проектирования обуви в формате 3d с использованием технологий обратного инжиниринга // Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук, - Москва, 2014 – 21 с.;
2. *Özgül Hafizoglu Özkan A* research on footwear and foot interaction through anatomy and human engineering / Izmir, 2005 – 155 p. [in English];
3. *Shuping Xiong, Jianhui Zhao, Zuhua Jiang, Ming Dong* (2009) A computer-aided design system for footfeature - based shoe last customization/ Hong Kong, 2009 – p. 11-19 [in English];
4. *L. Kos and J. Duhovnik.* A system for footwear fitting analysis. In Proc. International Design. Conference Design, 2002. P. 1187–1192, [in English];
5. *M. Mochimaru, M. Kouchi, and M. Dohi.* Last customization from an individual foot form and design dimensions. Ergonomics, 2000 43(9): p.1301–1313, [in English];
6. *A. Luximon, R. S. Goonetilleke, and K. L. Tsui.* Foot landmarking for footwear customization. Computer-Aided Design and Applications, 2005, 2(1): p.11–18, [in English].
7. *Фукин В.А.* Развитие теории и методологии проектирования внутренней формы обуви / Фукин В.А., Буй В.Х. Москва, 2015. – 410 с.

#### References

1. *Yl'yushyn S.V.* Razrabotka metodyky proektyrovanyya obuvy v formate 3d s yspol'zovanyem tekhnolohyy obratnoho ynzhynerynha // Avtoreferat dysertatsiyi na zdobuttya vchenoho stupenya kandydata tekhnichnykh nauk, - Moskva, 2014 – 21 s.;

2. *Özgül Hafizoglu Özkan* A research on footwear and foot interaction through anatomy and human engineering / Izmir, 2005 – 155 r. [in English];
3. *Shuping Xiong, Jianhui Zhao, Zuhua Jiang, Ming Dong* (2009) A computer-aided design system for footwear - based shoe last customization/ Hong Kong, 2009 – r. 11-19 [in English];
4. *L. Kos and J. Duhovnik*. A system for footwear fitting analysis. In Proc. International Design. Conference Design, 2002. R. 1187–1192, [in English];
5. *M. Mochimaru, M. Kouchi, and M. Dohi*. Last customization from an individual foot form and design dimensions. Ergonomics, 2000 43(9): r.1301–1313, [in English];
6. *A. Luximon, R. S. Goonetilleke, and K. L. Tsui*. Foot landmarking for footwear customization. Computer-Aided Design and Applications, 2005, 2(1): r.11–18, [in English].
7. *Fukyn V.A.* Razvitye teoryy y metodolohyy proektyrovaniya vnutrenney formy obuvy / Fukyn V.A., Buy V.Kh. Moskva, 2015. – 410 s.

*Аннотация*

*Липский Т.Н., Чертенко Л.П., Гаркавенко С.С. Математические основы разработки пространственной формы обувной колодки с использованием метода обратного инжиниринга. Работа посвящена вопросу разработки алгоритма способа моделирования новой формы колодки по индивидуальному заказу в графической 3д среде и математической модели ее деформации в соответствии с основными параметрами стопы и фасоном колодки.*

*Моделирование колодки методом обратного инжиниринга предусматривает сканирование исходной колодки, которая является основой для создания новой формы путем выполнения определенных деформаций исходной формы. Такие деформации можно математически описать в виде матриц геометрических преобразований: перемещение, вращение, масштаб и т.д.*

*В работе для проектирования новой формы колодки предложен способ расчета параметров деформирования базовой формы колодки в соответствии с фасоном и теоретическими параметрами колодки, полученными на основе размеров стопы заказчика. На основе этих расчетов разработан алгоритм способа моделирования новой колодки с использованием метода обратного инжиниринга и рассчитана математическая модель геометрической деформации ее сложной пространственной формы, выполняемой в процессе моделирования.*

*Ключевые слова:* обувная колодка, математическая модель, геометрическая деформация, обратный инжиниринг, стопа, обувь по индивидуальному заказу, облако точек, 3d среда, САПР.

*Abstract*

**Lypskiy T, Chertenko L., Garkavenko S. The mathematic basics of developing a 3d shoe last shape using the reverse engineering method.** A shoe making industry which can offer shoes that fit consumer needs has a decided advantage over its competitors. Next to fashion, shoe fitness and foot comfort is an important selection criterion. The shoe last is the main element that provides the of comfort shoes.

Most of the scientific researches devoted to the topic of computer-aided design of lasts, are focused on finding the optimal ratio of the foot and shoe shape, on the selection of the most suitable last. However, the features of tailor made shoe production often require the creation of a new shoe last shape based on the customer's foot parameters.

This paper is devoted to the development of an algorithm for the method of a new last shape designing for the tailor made shoes in a graphical 3D CAD environment and a mathematic model of its deformation in accordance with the basic parameters of the foot and the last style.

The modeling of the last by reverse engineering involves scanning the original last, which is the basis for creating a new shape by performing some deformations of the original shape. Such deformations can be described mathematically as geometric transformation matrices: displacement, rotation, scale, etc.

In the article for designing a new last shape, the method of calculating the parameters of deformation of the base last shape in accordance with the style and theoretical parameters of the last, obtained based on the foot sizes of the consumer, is proposed. Based on these calculations, an algorithm for the method of modeling a new shoe last using the reverse engineering method was developed and a mathematical model of the geometric deformation of its complex 3d shape, which is performed in the 3d CAD designing process, was calculated.

*Keywords:* shoe last, mathematic model, geometric deformation, reverse engineering, foot, tailor-made shoes, point cloud, 3D environment, CAD.

Стаття надійшла в редакцію 21.08.2019 р.

Стаття прийнята до друку 30.09.2019 р.