УДК 377.031

DOI 10.18372/2786-5487.1.16652

Попов Петро Аркадійович,

кандидат фізико-математичних наук, доцент, викладач математичних дисциплін,
Відокремлений структурний підрозділ «Фаховий коледж інформаційних технологій та землевпорядкування Національного авіаційного університету»,
м. Київ, Україна

Костенко Галина Іванівна,

викладачка економічних дисциплін, викладач-методист,
Відокремлений структурний підрозділ «Фаховий коледж інформаційних технологій та землевпорядкування Національного авіаційного університету»,
м. Київ, Україна

ПРО МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ КУРСІВ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ОСНОВ ЕКОНОМІЧНОЇ ТЕОРІЇ

Анотація. *В роботі розглядаються питання, пов'язані з використанням нелінійних математичних моделей в курсах економічних дисциплін для студентів коледжів. На прикладі задач про оцінку ефективності інвестицій прослідковуються міжпредметні зв'язки між курсами вищої математики, основ економічної теорії та інформатики.*

Ключові слова: *алгебраїчне рівняння, комплексні числа, формули Кардано, інвестиційний проєкт, внутрішня норма дохідності, дисконтування, міжпредметні зв'язки.*

Annotation. *The paper deals with issues related to the use of nonlinear mathematical models in courses of economic disciplines for college students. The cross-curricular links between the courses of higher mathematics, basics of economic theory and computer science are traced on the example of tasks on the evaluation of investment efficiency.*

Keywords: *algebraic equation, complex numbers, Cardano formulas, investment project, internal rate of return, discounting, interdisciplinary links.*

В курсах вищої математики у фахових коледжах при вивченні алгебраїчного матеріалу основна увага приділяється системам лінійних рівнянь та пов’язаним з ними питанням теорії матриць та визначників. Цей математичний апарат знаходить застосування в різних економіко-математичних курсах (економетрика, економіко-математичне моделювання, математичне програмування тощо).

Проте в багатьох питаннях, зокрема, фінансової математики, виникають і використовуються нелінійні моделі. Тому видається доцільним використовувати такі теми для ознайомлення студентів з певними питаннями, які розширюють математичний кругозір та дають можливість використовувати міжпредметні зв’язки курсів математики, економічних дисциплін та інформатики.

В даній роботі розглянемо одну з таких нелінійних задач, що зводиться до розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих ступенів. На прикладі цієї задачі буде показано, як можна використовувати додаткові відомості з алгебри та здійснювати міжпредметні зв’язки, про які йшлося вище. Такий підхід буде корисним не лише студентам-економістам, а й студентам інших спеціальностей, які вивчають основи економічної теорії та інші дисципліни економічного циклу.

Будь-який інвестиційний процес об’єднує в собі два процеси: власне інвестиції та послідовне отримання доходу [1, с. 58]. Таким чином, розглядаються два грошові потоки, що не пов’язані у часі: інвестицій та доходів. Нехай у моменти часу $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_m$ здійснюються інвестиції обсягами $K_0, K_1, K_2, \dots, K_m$ відповідно. Всі величини інвестицій вважаються від’ємними:

$$K_j < 0, j = 0,1,2, \dots, m.$$

В моменти часу $T_1, T_2, \dots, T_r$ відбуваються отримання доходів на суми $S_1, S_2, \dots, S_r$ відповідно. Всі величини доходів в при цьому вважаються додатними:

$$S_l > 0, l = 1,2, \ldots, r.$$

Оскільки інвестиції, на відміну від поточних затрат на виробництво, дають віддачу не в тому ж періоді, а лише згодом, причому впродовж декількох років, залежно від того, в якій конкретній формі вони були здійснені, то порівняння інвестиційних затрат з результатами від них (доходами) вимагає зіставлення різночасових показників. Ця проблема вирішується шляхом дисконтування. Тобто всі грошові потоки дисконтуються на початковий момент часу $t_0 = 0$. Потенційний інвестор, приймаючи рішення щодо реалізації інвестиційного проєкту, має проаналізувати ряд показників, одним з яких є *внутрішня норма дохідності* (англ. *internal rate of return* — IRR). Внутрішня норма дохідності визначається як така процентна ставка i, при якій зведена величина інвестицій дорівнює зведеній величині доходів. Оскільки всі величини інвестицій від'ємні, а величини доходів — додатні, то це означає, що сума всіх дисконтованих на початковий момент часу інвестицій та доходів дорівнює нулю:

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{K_j}{(1+i)^j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{S_l}{(1+i)^l} = 0.$$

Таке рівняння відносно невідомої величини внутрішньої дохідності i рівносильне алгебраїчному рівнянню, тобто рівнянню виду

$$P_n(i) = 0,$$

де P_n є алгебраїчним многочленом степеня n. Як відомо, при $n \geqslant 5$ алгебраїчні рівняння в радикалах, взагалі кажучи, не розв'язуються. Тому якщо кількість періодів в інвестиційному процесі не менша п'яти, то для визначення внутрішньої норми дохідності використовуються різні чисельні методи [2, с. 34 — 50]. Якщо степінь $n = 2$, то рівняння відносно i є квадратним. Відповідно при степені $n = 3$ рівняння є кубічним. Його корені точно можна знаходити, наприклад, за формулами Кардано [3, с. 515 — 518]. Розглянемо на конкретному прикладі однієї задачі, яким чином це можна зробити.

Припустимо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ здійснюється разова інвестиція I_0. Протягом наступних трьох років планується отримати доходи

S_1, S_2, S_3. Тоді рівняння для визначення внутрішньої норми дохідності матиме вигляд

$$\frac{S_1}{1+i}+\frac{S_2}{(1+i)^2}+\frac{S_3}{(1+i)^3}-I_0=0,$$

або

$$I_0(1+i)^3-S_1(1+i)^2-S_2(1+i)-S_3=0.$$

Приклад. Початкові інвестиції становлять 500 тис. грн. Доходи протягом трьох років становлять 100 тис. грн., 200 тис. грн та 800 тис. грн. в кінці років. Знайти внутрішню норму дохідності.

Розв'язання. Складаємо рівняння:

$$\frac{100}{1+i}+\frac{200}{(1+i)^2}+\frac{800}{(1+i)^3}-500=0.$$

Для зменшення коефіцієнтів в рівнянні розділимо його почастинно на 100 і введемо нову невідому за формулою $i+1=y$. Звідси, очевидно, невідома внутрішня норма дохідності виражається за формулою

$$i=y-1. \tag{1}$$

Таким чином, вихідне рівняння набуде вигляду

$$\frac{8}{y^3}+\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}-5=0.$$

Домножимо спочатку почастинно це рівняння на $(-y^3)$ і отримаємо кубічне рівняння:

$$5y^3-y^2-2y-8=0.$$

Діленням обох частин рівняння на 5 приведемо рівняння до зведеного:

$$y^3-\frac{1}{5}y^2-\frac{2}{5}y-\frac{8}{5}=0.$$

Для розв'язування кубічного рівняння треба зробити його неповним. Це досягається за допомогою заміни змінної

$$y=x+\frac{1}{15} \tag{2}$$

Через невідому x, згідно (1) та (2), шукана внутрішня норма дохідності виражається за формулою

$$i = x - \frac{14}{15}. \qquad (3)$$

Отже, маємо:

$$\left(x + \frac{1}{15}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{15}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{15}\right) - \frac{8}{5} = 0.$$

Розкриємо в цьому рівнянні дужки та зведемо подібні доданки:

$$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{15} + 3x \cdot \frac{1}{15^2} + \frac{1}{15^3} - \frac{1}{5}\left(x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{1}{225}\right) - \frac{2}{5}x - \frac{2}{75} - \frac{8}{5} = 0,$$

$$x^3 + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{75} + \frac{1}{3375} - \frac{x^2}{5} - \frac{2}{75}x - \frac{1}{1125} - \frac{2}{5}x - \frac{2}{75} - \frac{8}{5} = 0.$$

В останньому рівняння зникають доданки, що містять квадрат невідомої. Одержуємо, отже, таке рівняння:

$$x^3 - \frac{31}{75}x - \frac{5492}{3375} = 0. \qquad (4)$$

Це рівняння є неповним кубічним рівнянням виду

$$x^3 + px + q = 0,$$

в якому коефіцієнти є дійсними числами: $p = -\frac{31}{75}, q = -\frac{5492}{3375}$. Обчислимо дискримінант цього рівняння:

$$D = -27q^2 - 4p^3 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Підставляючи значення коефіцієнтів рівняння (4), знайдемо:

$$D = -108\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{5492^2}{3375^2} - \frac{1}{27} \cdot \frac{31^3}{75^3}\right) = -108\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{30162064}{(15^3)^2} - \frac{1}{3^3} \cdot \frac{31^3}{75^3}\right) =$$

$$= -108\left(\frac{7540516}{15^6} - \frac{31^3}{225^3}\right) = -108\left(\frac{7540516}{15^6} - \frac{29791}{15^6}\right) = -108 \cdot \frac{7510725}{15^6} =$$

$$= -108 \cdot \frac{25 \cdot 81 \cdot 3709}{15^6} = -108 \cdot \frac{5^2 \cdot 3^4 \cdot 3709}{5^6 \cdot 3^6} = -108 \cdot \frac{3709}{5^4 \cdot 3^2}.$$

Таким чином,

$$D = -108 \cdot \frac{3709}{5^4 \cdot 3^2}.$$

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння (4) має один дійсний та два комплексні корені. Якщо позначити

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{D}{108}}}, \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{D}{108}}},$$

то всі корені рівняння (4) можуть бути знайдені за формулою Кардано:

$$x = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{D}{108}}}.$$

Оскільки в полі комплексних чисел існує три значення кубічного кореня з числа, то кожен із кубічних коренів у формулі Кардано дає три можливих значення. Проте об'єднувати у пари можна лише ті з них, що задовольняють умові

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3} = \frac{31}{225}.$$

Спочатку знайдемо дійсний корінь рівняння. Для цього обчислимо радикали:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{2746}{15^3} + \sqrt{\frac{3709}{5^4 \cdot 3^2}}} = \sqrt[3]{\frac{2746}{15^3} + \frac{\sqrt{3709}}{5^2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{2746}{15^3} + \frac{\sqrt{3709}}{75}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2746 + 45\sqrt{3709}}{15^3}} = \frac{\sqrt[3]{2746 + 45\sqrt{3709}}}{15},$$

і аналогічно

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{2746 - 45\sqrt{3709}}}{15}.$$

Таким чином, знайдено дійсні значення радикалів:

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{2746 + 45\sqrt{3709}}}{15}, \beta = \frac{\sqrt[3]{2746 - 45\sqrt{3709}}}{15}.$$

За формулою Кардано дійсний корінь рівняння є таким числом:

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{2746 + 45\sqrt{3709}}}{15} + \frac{\sqrt[3]{2746 - 45\sqrt{3709}}}{15}.$$

Згідно формули (3) визначаємо внутрішню норму дохідності:

$$i=\frac{\sqrt[3]{2746+45\sqrt{3709}}+\sqrt[3]{2746-45\sqrt{3709}}-14}{15}.$$

Наближено це число дорівнює $i \approx 0{,}35966631$. Тобто приблизно $35{,}97\%$.

Два інші корені рівняння (4) є комплексними і не мають економічного змісту. Проте їх теж легко знайти за формулою Кардано:

$$x_2=-\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sqrt{3}\frac{\alpha-\beta}{2}, x_3=-\frac{\alpha+\beta}{2}-i\sqrt{3}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

В цих формулах через i позначено уявну одиницю $(i^2=-1)$, а не внутрішню норму дохідності. Враховуючи знайдені величини радикалів, маємо:

$$x_2=-\frac{\sqrt[3]{2746+45\sqrt{3709}}+\sqrt[3]{2746-45\sqrt{3709}}}{30}+$$
$$+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{2746+45\sqrt{3709}}-\sqrt[3]{2746-45\sqrt{3709}}}{30},$$

$$x_3=-\frac{\sqrt[3]{2746+45\sqrt{3709}}+\sqrt[3]{2746-45\sqrt{3709}}}{30}-$$
$$-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{2746+45\sqrt{3709}}-\sqrt[3]{2746-45\sqrt{3709}}}{30}.$$

Таким чином, знайдено точне значення величини внутрішньої норми дохідності. Слід зауважити, що електронні таблиці мають вбудовну функцію для знаходження цієї величини. Так, у вільному офісному пакеті LibreOffice Calc є вбудована функція IRR, яка і дає можливість наближено обчислити внутрішню норму дохідності. Синтаксис цієї функції простий: IRR (<діапазон комірок>). При цьому величини інвестицій потрібно вводити від'ємними, а доходів — додатними. Так, в прикладі, що був розв'язаний за формулою Кардано, можна заповнити комірки A1, A2, A3 та A4 значеннями $-500, 100{,}200{,}800$ відповідно. В комірці A5 прописати функцію

= IRR (A1 : A4).

Результат, що буде отримано з точністю до двох знаків після коми, є, звісно, таким самим: $35{,}97\%$.

Висновки. Звісно, використання формули Кардано для точного знаходження величини внутрішньої норми дохідності в процесі оцінки ефективності реалізації інвестиційного проєкту не є доцільним з практичної точки зору. Але з метою мотивації студентів до вивчення математичних дисциплін бажано наблизити освітній процес до майбутньої професійної діяльності студентів та, використовуючи міждисциплінарні зв'язки між алгеброю, чисельними методами, економікою та інформатикою, стимулювати прагнення до саморозвитку та самонавчання.

Список використаних джерел

1. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика: Навч. посіб. Вид. друге, доп. — К.: Кондор-Видавництво, 2012. — 250 с.

2. Чисельні методи: Навчальний посібник до лабораторних занять / Мазманішвілі О.С. — Харків: НТУ «ХПІ», 2010. — 219 с.

3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособ. для пед. институтов. — М.: Высш. школа, 1979. — 559 с.