УДК 629.78

М.Ю. Ракушев, к.т.н., с.н.с.
А.А. Завада, к.т.н.
С.В. Ковбасюк, к.т.н., с.н.с.

ПРОГНОЗУВАННЯ РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА В ОСКУЛЮВАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТАХ МЕТОДОМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано числово-аналітичну обчислювальну схему інтегрування диференціального рівняння руху космічного апарата в оскулювальних елементах, яку розроблено на основі диференціально-тейлорівських перетворень. У моделі руху космічного апарата враховано збурення від центрального поля до 8×8 гармонік розкладу геопотенціалу Землі в ряд за сферичними функціями та сила аеродинамічного опору атмосфери згідно зі статичною моделлю густини атмосфери. Порівняно за точністю прогнозування руху космічного апарата зі штатними вітчизняними програмними комплексами балістико-навігаційного забезпечення польотів космічних апаратів.

The numerical-analytical computing scheme of integration of the differential equation of motion of space vehicle is offered in osculating elements, which is developed on a basis of Taylor differential transformations. In the model of motion of space vehicle indignations from the central field to 8×8 harmonics of decomposition of a geopotential of the Earth abreast on spherical functions and force of aerodynamic resistance of atmosphere are considered at static model of density of atmosphere. Comparison on accuracy of forecasting of movement of a space vehicle with regular domestic program complexes of ballistic navigational support of flights of space vehicles is spent.

диференціально-тейлорівські перетворення, космічний апарат, оскулювальний елемент, прогнозування, рух

Постановка проблеми

Центральне місце в технологічній послідовності вирішення задавдань балістико-навігаційного забезпечення (БНЗ) польотів космічних апаратів (КА) займає прогнозування руху КА, що є складовою частиною процесів планування цільового застосування КА, навігації наземних (повітряних, морських) об'єктів, оцінювання загальної космічної обстановки тощо.

Безпосередньо прогнозування руху КА виконують у вигляді закінченої процедури на ЕОМ, в якій на основі обраного методу інтегрування звичайних диференціальних рівнянь реалізовано обчислювальну схему розв'язання диференціального рівняння руху КА [1].

Наявність процедури прогнозування руху КА має також важливе значення для проведення деяких наукових досліджень, наприклад, під час розроблення та оцінювання ефективності нових методів оброблювання вимірювальної інформації від засобів контролю космічного простору.

Процедура прогнозування руху КА є невід'ємною складовою частиною програмних комплексів (ПК) БНЗ, які використовують у вітчизняних установах, наприклад, у Національному центрі управління та випробувань космічних засобів. Однак зазначені ПК БНЗ є комерційною власністю і тому їх використання для проведення наукових досліджень можливе лише як «чорної скриньки», що не завжди задовольняє дослідників. Прикладом зазначеного ПК є ПК БНЗ "Навігатор" [2].

Аналіз останніх досліджень

Натепер у вітчизняній практиці БНЗ найбільшого поширення для прогнозування руху КА набув числовий скінченнорізницевий метод Адамса сьомого порядку [1; 2].

Якщо розглянути останні дослідження щодо впровадження інших методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь у практику БНЗ, то можна зазначити, що одним з перспективних є метод диференціально-тейлорівських (ДТ) перетворень [3].

Основною особливістю ДТ-перетворень як математичного методу є реалізація рекурентного, методично простого (числово-аналітичного) визначення членів ряду Тейлора будь-якого порядку за відсутності методичних похибок [4].

Розрахунок похідних від функції за допомогою, наприклад, скінченнорізницевого методу неминуче вносить методичну похибку [5].

Метод ДТ-перетворень при прогнозуванні руху КА дозволяє розробляти обчислювальні схеми, які належать до однокрокових числоаналітичних обчислювальних схем, що використовують значення вищих похідних [5].

У праці [3] доведено можливість використання методу ДТ-перетворень для короткострокового (до одного витка) прогнозування руху КА у гринвицькій прямокутній системі координат (ГСК) з урахуванням у моделі руху КА збурень від другої та четвертої зональних гармонік розкладу геопотенціалу у ряд за сферичними функціями (поле 4×0).

Однак для проведення довгострокового прогнозування руху КА така модель непридатна, через неповноту врахування збурювальних факторів.

Таким чином, актуальним є проведення досліджень щодо розроблення обчислювальної схеми для прогнозування руху КА на основі ДТ-перетворень, яка більш повно враховує збурювальні фактори, що діють на КА у польоті.

Мета роботи − розроблення числово-аналітичної обчислювальної схеми для проведення довгострокового прогнозування руху КА на основі методу ДТ перетворень. У схемі необхідно врахувати збурення від несферичності Землі та аномалій сили тяжіння для розкладу геопотенціалу у ряд за сферичними функціями (поле до 8×8 гармонік), а також сили аеродинамічного опору атмосфери для її статичної моделі (ГОСТ-4401−64).

Диференціально-тейлорівські перетворення

ДТ-перетворення – це операційний метод, який ґрунтується на переведенні оригіналів в область зображень за допомогою операції диференціювання. Диференціально-тейлорівськими перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [4]:

$$z(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t_*}; \qquad (1)$$

$$z(t)\approx\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{t-t_*}{H}\right)^k z(k), \qquad (2)$$

де

$z(k)$ – дискретна функція за аргументом k;

k – цілочисловий аргумент $k = 0, 1,\ldots$;

t – аргумент, за яким проводиться перетворення;

t_* – значення аргумента, за якого проводиться перетворення;

$k_{\max}$ – максимальний номер урахованої при відновленні Т-дискрети;

H – відрізок аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$.

Вирази (1) визначає пряме, а вираз (2) обернене перетворення. Пряме перетворення дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти ДТ-зображення $z(k)$. Обернене перетворення відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді часткової суми відрізку ряду Тейлора.

Розрахунок (моделювання) з використанням ДТ-перетворень виконують за три етапи:

− пряме перетворення;

− проведення в області ДТ-спектрів необхідних викладок;

− обернене перетворення.

Для розв’язання задачі, яка розглядається, перші два етапи поєднуються в один.

Запишемо модель руху КА для довгострокового прогнозування руху КА. Ця модель в оскулювальних елементах для КА, що мають малий ексцентриситет орбіти ($e \le 0{,}1$) має вигляд [1]:

$$\begin{cases}
\dfrac{d\Omega}{dt}=\sqrt{\dfrac{p}{\mu_0}}W\,\dfrac{\sin u}{R\,\sin i};\\[2mm]
\dfrac{di}{dt}=\sqrt{\dfrac{p}{\mu_0}}W\,\dfrac{\cos u}{R};\\[2mm]
\dfrac{dp}{dt}=2\sqrt{\dfrac{p}{\mu_0}}Tr;\\[2mm]
\dfrac{du}{dt}=R^2\sqrt{\dfrac{\mu_0}{p^3}}\,\dfrac{1}{\gamma^*};\\[2mm]
\dfrac{dq}{dt}=\sqrt{\dfrac{p}{\mu_0}}\Big(S\sin u+\\
\quad+\left[\dfrac{(q+\cos u)}{R}+\cos u\right]T+W\,\dfrac{l\sin u}{R}\,\mathrm{ctg}\,i\Big);\\[2mm]
\dfrac{dl}{dt}=\sqrt{\dfrac{p}{\mu_0}}\Big(-S\cos u+\\
\quad+\left[\dfrac{(l+\sin u)}{R}+\sin u\right]T-W\,\dfrac{q\sin u}{R}\,\mathrm{ctg}\,i\Big);
\end{cases} \qquad (3)$$

$$R=1+q\cos u+l\sin u; \qquad (4)$$

$$r=\frac{p}{R}; \qquad (5)$$

$$S=S_1+S_2; \qquad (6)$$

$$T=T_1+T_2; \qquad (7)$$

$$W=W_1+W_2; \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\gamma^*}=1-\frac{p^2}{\mu_0 R^3}W\sin u\,\mathrm{ctg}\,i\,; \tag{9}$$

$$S_1=\frac{\partial U_n}{\partial r}\,; \tag{10}$$

$$T_1=\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial\varphi}\frac{\cos u}{\cos\varphi}\sin i+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U_n}{\partial\lambda}\frac{\cos i}{\cos\varphi}\,; \tag{11}$$

$$W_1=\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial\varphi}\frac{\cos i}{\cos\varphi}-\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U_n}{\partial\lambda}\frac{\cos u}{\sin\varphi}\sin i\,; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_n}{\partial r}=-\frac{\mu_0}{r^2}\Bigg(1+\sum_{n=2}^{N}(n+1)C_{n0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)+\\ +\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\Bigg\{(n+1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\times\\ \times\left[C_{nm}\cos(m\lambda)+d_{nm}\sin(m\lambda)\right]\Bigg\}\Bigg),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial\varphi}=\frac{\mu_0}{r^2}\Bigg(\sum_{n=2}^{N}C_{n0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n'(\sin\varphi)\cos\varphi+\\ +\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\Bigg\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi\times\\ \times\left[C_{nm}\cos(m\lambda)+d_{nm}\sin(m\lambda)\right]\Bigg\}\Bigg);\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U_n}{\partial\lambda}=\frac{\mu_0}{r^2}\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\Bigg\{m\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}\times\\ \times\left[-C_{nm}\sin(m\lambda)+d_{nm}\cos(m\lambda)\right]\Bigg\};\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}P_n(\sin\varphi)=\frac{1}{n}\big[-(n-1)P_{n-2}(\sin\varphi)+\\ +(2n-1)\sin\varphi P_{n-1}(\sin\varphi)\big];\end{aligned} \tag{16}$$

$$P_0(\sin\varphi)=1\,; \tag{17}$$

$$P_1(\sin\varphi)=\sin\varphi\,; \tag{18}$$

$$\frac{P_m^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=(2m-1)\cos\varphi\frac{P_{m-1}^{m-1}(\sin\varphi)}{\cos\varphi}\,; \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=\frac{1}{n-m}\Bigg[-(n+m-1)\frac{P_{n-2}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}+\\ +(2n-1)\sin\varphi\frac{P_{n-1}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}\Bigg];\end{aligned} \tag{20}$$

$$P_n'(\sin\varphi)=\sin\varphi P_{n-1}'(\sin\varphi)+nP_{n-1}(\sin\varphi)\,; \tag{21}$$

$$\frac{P_1^1(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=1\,; \tag{22}$$

$$P_1'(\sin\varphi)=1\,; \tag{23}$$

$$\begin{aligned}P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi=(n+1)\sin\varphi\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}-\\ -(n+m-1)\frac{P_{n+1}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi};\end{aligned} \tag{24}$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\,; \tag{25}$$

$$\sin\varphi=\frac{z}{r}\,; \tag{26}$$

$$\cos\lambda=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \tag{27}$$

$$\sin\lambda=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\cos(m\lambda)=\cos([m-1]\lambda)\cos\lambda-\\ -\sin([m-1]\lambda)\sin\lambda;\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\sin(m\lambda)=\sin([m-1]\lambda)\cos\lambda+\\ +\cos([m-1]\lambda)\sin\lambda;\end{aligned} \tag{30}$$

$$x=x_i\cos s+y_i\sin s\,; \tag{31}$$

$$y=-x_i\sin s+y_i\cos s\,; \tag{32}$$

$$z=z_i\,; \tag{33}$$

$$s=s_0+1{,}0027378119\,\Omega_0 t\,; \tag{34}$$

$$x_i=r(\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i)\,; \tag{35}$$

$$y_i=r(\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i)\,; \tag{36}$$

$$z_i=r\sin u\sin i\,; \tag{37}$$

$$S_2=-S_b\rho v v_S\,; \tag{38}$$

$$T_2 = -S_b \rho v v_T ; \qquad (39)$$

$$W_2 = -S_b \rho v v_W ; \qquad (40)$$

$$v = \sqrt{v_S^2 + v_T^2 + v_W^2} ; \qquad (41)$$

$$v_S = v_r ; \qquad (42)$$

$$v_T = v_n - \Omega_0 r \cos i ; \qquad (43)$$

$$v_W = \Omega_0 r \cos u \sin i ; \qquad (44)$$

$$v_r = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} \left(q \sin u - l \cos u \right) ; \qquad (45)$$

$$v_n = \sqrt{\frac{\mu_0}{p}} R ; \qquad (46)$$

$$h = r - \frac{\bar{a}_3 \sqrt{1 - \bar{e}_3^2}}{\sqrt{1 - \bar{e}_3^2 \cos^2 \varphi}} ; \qquad (47)$$

$$\rho = A_j \exp\left[k_{1j} \left(h - h_j \right)^2 - k_{2j} \left(h - h_j \right) \right], \qquad (48)$$

де

Ω, i, p, u, q, l – елементи орбіти КА: довгота висхідного вузла, нахил, фокальний параметр, аргумент широти та лапласові елементи відповідно;

$S_{(1,2)}$, $T_{(1,2)}$, $W_{(1,2)}$ – проекції збурювального прискорення в орбітальній системі координат (індекси: 1 – за рахунок нецентральності та аномалій сили притягання Землі, 2 – за рахунок аеродинамічної сили лобового опору);

U_n – потенціал Земного притягання;

Ω_0 = 0,7292115805$\cdot 10^{-4}$ рад/с – кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі; μ_0 – гравітаційний параметр Землі;

μ_0 = 3,986$\cdot 10^5$ км^3/с^2;

r_0 – середній екваторіальний радіус Землі;

r_0 = 6378,388 км;

r, φ, λ – геоцентричний радіус, широта та довгота КА у ГСК;

$P_n(\sin\varphi)$, $P_n'(\sin\varphi)$, $P_n^m(\sin\varphi)$, $P_n^{m/}(\sin\varphi)$– поліноми Лежандра, їх похідні та приєднані сферичні функції і їх похідні відповідно;

N – номер старшого члена ряду розкладу геопотенціалу в ряд за сферичними функціями (для поля до $N \times N$ гармонік);

C_{n0}, C_{nm}, d_{nm} – безрозмірні сталі, що характеризують форму та гравітаційне поле Землі;

x_i, y_i, z_i, x, y, z – координати КА у інерціальній прямокутній системі координат (ІСК) та ГСК відповідно;

s, s_0 – зоряний час та зоряний час у середню гринвіцьку північ для заданої дати;

v – модуль вектора відносної швидкості КА;

v_r, v_n – радіальна та нормальна складові вектора швидкості КА відповідно;

v_S, v_T, v_W – проекції вектора відносної швидкості КА в орбітальній системі координат;

S_b – балістичний коефіцієнт;

h – висота КА над поверхнею Землі;

$\bar{a}_3$ – велика піввісь загального земного еліпсоїда;

$\bar{a}_3$ = 6378,136 км;

$\bar{e}_3$ – перший ексцентриситет загального земного еліпсоїда;

$\bar{e}_3$ = 0,081819221;

ρ – густина повітря;

h_j, A_j, k_{1j}, k_{2j} – сталі, що характеризують густину повітря для i-го шару.

У наведеній моделі руху КА (3)−(48) використана:

− модель гравітаційного поля Землі, яка враховує полярне стиснення Землі та поле $N \times N$ гармонік розкладу у ряд за сферичними функціями (13)−(15) [1];

− статична модель атмосфери відповідно до ГОСТ-4401−64 – залежність (48) [1].

У вітчизняній практиці БНЗ найбільше поширена модель поля до 8×8 гармонік [2].

Прогнозування руху КА виконують інтегруванням диференціального рівняння руху КА (3)−(48).

Для побудови обчислювальної схеми для прогнозування руху КА методом ДТ-перетворень (аналогічно числовим скінченно-різницевим методам інтегрування) необхідно ввести на часовому інтервалі прогнозу

$t_{\text{поч}} = t_0 \le t \le t_{\text{кін}}$

сітку ω_i з кроком $H_i = t_{i+1} - t_i$ і вузлами $t_i \in \omega_i$ [5] та задати початкові умови (ПУ) руху КА:

$$\Omega(t_0) = \Omega_0 ,\ i(t_0) = i_0 ,\ p(t_0) = p_0 ,$$
$$q(t_0) = q_0 ,\ l(t_0) = l_0 ,\ u(t_0) = u_0 . \qquad (49)$$

Розглянемо етапи розв’язування задачі побудови обчислювальної схеми прогнозування руху КА методом ДТ-перетворень.

1. Пряме перетворення – перехід з області оригіналів в область Т-спектрів, тобто застосування на сітці ω_i до виразів (3)−(48) прямого перетворення з виразу (1):

$$\begin{cases} i(0)=i(t_i),\ p(0)=p(t_i),\ q(0)=q(t_i),\ l(0)=l(t_i); \\ \Omega(0)=\Omega(t_i),\ u(0)=u(t_i),\ H_i=t_{i+1}-t_i; \\ \Omega(k+1)=\dfrac{H_i}{k+1}\dfrac{p^{1/2}(k)}{\sqrt{\mu_0}} * \left|\dfrac{W(k)}{R(k)}\right| * \left|\dfrac{s_u(k)}{s_i(k)}\right|; \\ i(k+1)=\dfrac{H_i}{k+1}\dfrac{p^{1/2}(k)}{\sqrt{\mu_0}} * \left|\dfrac{W(k)}{R(k)}\right| * c_u(k); \\ p(k+1)=2\dfrac{H_i}{k+1}\dfrac{p^{1/2}(k)}{\sqrt{\mu_0}} * T(k) * r(k); \\ q(k+1)=\dfrac{H_i}{k+1}\dfrac{p^{1/2}(k)}{\sqrt{\mu_0}} * \Big(S(k) * s_u(k) + \\ \quad +\left[\left|\dfrac{q(k)+c_u(k)}{R(k)}\right| + c_u(k)\right] * T(k) + \\ \quad + \left|\dfrac{W(k)}{R(k)}\right| * l(k) * s_u(k) * \left|\dfrac{c_i(k)}{s_i(k)}\right| \Big); \\ l(k+1)=\dfrac{H_i}{k+1}\dfrac{p^{1/2}(k)}{\sqrt{\mu_0}} * \Big(-S(k) * c_u(k) + \\ \quad -\left[\left|\dfrac{l(k)+s_u(k)}{R(k)}\right| + s_u(k)\right] * T(k) - \\ \quad - \left|\dfrac{W(k)}{R(k)}\right| * q(k) * s_u(k) * \left|\dfrac{c_i(k)}{s_i(k)}\right| \Big); \\ u(k+1)=\dfrac{H_i}{k+1}\sqrt{\mu_0} \left|\dfrac{R^2(k)}{p^{1/2}(k)}\right| * \left|\dfrac{\gamma(k)}{p(k)}\right|; \end{cases} \tag{50}$$

$$R(k)=\text{ъ}(k)+q(k) * c_u(k)+l(k) * s_u(k); \tag{51}$$

$$r(k)= \left|\frac{p(k)}{R(k)}\right| ; \tag{52}$$

$$R^2(k)=R(k) * R(k); \tag{53}$$

$$S(k)=S_1(k)+S_2(k); \tag{54}$$

$$T(k)=T_1(k)+T_2(k); \tag{55}$$

$$W(k)=W_1(k)+W_2(k); \tag{56}$$

$$\gamma(k)=\text{ъ}(k)- -\frac{1}{\mu_0} \left|\frac{p^2(k)}{R^3(k)}\right| * W(k) * s_u(k) * \left|\frac{c_i(k)}{s_i(k)}\right| ; \tag{57}$$

$$R^3(k)=R(k)^2 * R(k); \tag{58}$$

$$s_\Omega(k)=\underline{\sin}[\Omega(k)] \ldots c_\Omega(k)=\underline{\cos}[\Omega(k)]; \tag{59}$$

$$s_i(k)=\underline{\sin}[i(k)] \ldots c_i(k)=\underline{\cos}[i(k)]; \tag{60}$$

$$s_u(k)=\underline{\sin}[u(k)] \ldots c_u(k)=\underline{\cos}[u(k)]; \tag{61}$$

$$S_1=b_r(k); \tag{62}$$

$$T_1(k)=b_\varphi(k) * \left|\frac{c_u(k)}{c_\varphi(k)}\right| * s_i(k)+b_\lambda(k) * \left|\frac{c_i(k)}{c_\varphi(k)}\right|; \tag{63}$$

$$W_1(k)=b_\varphi(k) * \left|\frac{c_i(k)}{c_\varphi(k)}\right| - -b_\lambda(k) * \left|\frac{c_u(k)}{s_\varphi(k)}\right| * s_i(k), \tag{64}$$

$$b_r(k)= \left|\frac{\text{м}_0\text{ъ}(k)}{r^2(k)}\right| * * \Big(\text{ъ}(k)+\sum_{n=2}^{N}(n+1)C_{n0}r_r^n(k) * P_n(k)+ + \sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\Big\{(n+1)r_r^n(k) * P_n^m(k) * c_\varphi(k) * * \big[C_{nm}c_{m\text{л}}(k)+d_{nm}s_{m\text{л}}(k)\big]\Big\}\Big), \tag{65}$$

$$b_\varphi(k)= \left|\frac{\text{м}_0\text{ъ}(k)}{r^2(k)}\right| * \Big(\sum_{n=2}^{N}C_{n0}r_r^n(k) * P_n'(k)+ + \sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\Big\{r_r^n(k) * P_n^{m/}(k) * * \big[C_{nm}c_{m\text{л}}(k)+d_{nm}s_{m\text{л}}(k)\big]\Big\}\Big), \tag{66}$$

$$b_\text{л}(k)= \left|\frac{\text{м}_0\text{ъ}(k)}{r^2(k)}\right| * \sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\Big\{mr_r^n(k) * P_n^m(k) * * \big[-C_{nm}s_{m\text{л}}(k)+d_{nm}c_{m\text{л}}(k)\big]\Big\} \tag{67}$$

$$r_r^n(k)=r_r^{n-1}(k) * r_r(k); \tag{68}$$

$$r_r(k)= \left|\frac{r_0\text{ъ}(k)}{r(k)}\right| ; \tag{69}$$

$$r^2(k)=r(k) * r(k); \tag{70}$$

$$P_n(k)=\frac{1}{n}\times \times\big[-(n-1)P_{n-2}(k)+(2n-1)s_\varphi(k) * P_{n-1}(k)\big]; \tag{71}$$

$$P_0(k)=\text{ъ}(k); \tag{72}$$

$$P_1(k)=s_\varphi(k); \tag{73}$$

$$P_m^m(k)=(2m-1)P_{m-1}^{m-1}(k)*c_\varphi(k); \tag{74}$$

$$P_1^1(k)=\text{ъ}(k); \tag{75}$$

$$P_n^m(k)=\frac{1}{n-m}\times$$
$$\times\left[-(n+m-1)P_{n-2}^m(k)+(2n-1)s_\varphi(k)*P_{n-2}^m(k)\right]; \tag{76}$$

$$P_n'(k)=s_\varphi(k)*P_{n-1}'(k)+nP_{n-1}(k); \tag{77}$$

$$P_1'(k)=\text{ъ}(k); \tag{78}$$

$$P_n^{m/}(k)=(n+1)s_\varphi(k)*P_n^m(k)-$$
$$-(n+m-1)P_{n+1}^m(k); \tag{79}$$

$$c_\varphi(k)=\left|\frac{r_{xy}(k)}{r(k)}\right|; \tag{80}$$

$$s_\varphi(k)=\left|\frac{z(k)}{r(k)}\right|; \tag{81}$$

$$s_{m\lambda}(k)=s_{(m-1)\lambda}(k)*c_\lambda(k)+c_{(m-1)\lambda}(k)*s_\lambda(k); \tag{82}$$

$$s_\lambda(k)=\left|\frac{y(k)}{r_{xy}(k)}\right|; \tag{83}$$

$$c_{m\lambda}(k)=c_{(m-1)\lambda}(k)*c_\lambda(k)-s_{(m-1)\lambda}(k)*s_\lambda(k); \tag{84}$$

$$c_\lambda(k)=\left|\frac{x(k)}{r_{xy}(k)}\right|; \tag{85}$$

$$r_{xy}^2(k)=x(k)*x(k)+y(k)*y(k); \tag{86}$$

$$r_{xy}(k)=r_{xy}^{2\,1/2}(k); \tag{87}$$

$$x(k)=x_i(k)*c_s(k)+y_i(k)*s_s(k); \tag{88}$$

$$y(k)=-x_i(k)*s_s(k)+y_i(k)*c_s(k); \tag{89}$$

$$z(k)=z_i(k); \tag{90}$$

$$s_s(k)=\frac{(\Omega_0 H_i)^k}{k!}\times$$
$$\times\sin\left[\frac{\pi k}{2}+s_0+1{,}0027378119\,\Omega_0 t_i\right]; \tag{91}$$

$$c_s(k)=\frac{(\Omega_0 H_i)^k}{k!}\times$$
$$\times cos\left[\frac{\pi k}{2}+s_0+1{,}0027378119\,\Omega_0 t_i\right]; \tag{92}$$

$$x_i(k)=r(k)*$$
$$*\left[c_\Omega(k)*c_u(k)-s_\Omega(k)*s_u(k)*c_i(k)\right]; \tag{93}$$

$$y_i(k)=r(k)*$$
$$*\left[s_W(k)*c_u(k)+c_W(k)*s_u(k)*c_i(k)\right]; \tag{94}$$

$$z_i(k)=r(k)*s_u(k)*s_i(k); \tag{95}$$

$$S_2(k)=-S_b\rho(k)*v(k)*v_S(k); \tag{96}$$

$$T_2(k)=-S_b\rho(k)*v(k)*v_T(k); \tag{97}$$

$$W_2(k)=-S_b\rho(k)*v(k)*v_W(k); \tag{98}$$

$$v(k)=v^{2\,1/2}(k); \tag{99}$$

$$v^2(k)=v_S(k)*v_S(k)+$$
$$+v_T(k)*v_T(k)+v_W(k)*v_w(k); \tag{100}$$

$$v_S(k)=v_r(k) \tag{101}$$

$$v_T(k)=v_n(k)-\Omega_0 r(k)*c_i(k); \tag{102}$$

$$v_W(k)=\Omega_0 r(k)*c_u(k)*s_i(k); \tag{103}$$

$$v_r(k)=\sqrt{\mu_0}\left|\frac{q(k)*s_u(k)-l(k)*c_u(k)}{p^{1/2}(k)}\right|; \tag{104}$$

$$v_n(k)=\sqrt{\mu_0}\left|\frac{R(k)}{p^{1/2}(k)}\right|; \tag{105}$$

$$\rho(k)=A_i\,\overline{\exp}\left[f(k)\right]; \tag{106}$$

$$f(k)=k_{1i}\left[h(k)-h_i\text{ъ}(k)\right]*\left[h(k)-h_i\text{ъ}(k)\right]-$$
$$-k_{2i}\left[h(k)-h_i\text{ъ}(k)\right]; \tag{107}$$

$$h(k)=r(k)-\left|\frac{\bar a_3\sqrt{1-\bar e_3^2}\,\text{ъ}(k)}{d^{2\,1/2}(k)}\right|; \tag{108}$$

$$d^2(k)=\text{ъ}(k)-\bar e_3^2 c_\varphi(k)*c_\varphi(k), \tag{109}$$

Таблиця 1

Відповідність оригіналів з виразів (3)-(48) та позначень для їх ДТ-зображень для виразів (50)-(110)

Функція	Позначення			
Оригінал Зображення	Ω $\Omega(k)$	i $i(k)$	p $p(k)$	q $q(k)$
Оригінал Зображення	l $l(k)$	u $u(k)$	$S_{(1,2)}$ $S_{(1,2)}(k)$	$T_{(1,2)}$ $T_{(1,2)}(k)$
Оригінал Зображення	$\sqrt{p}$ $p^{\underline{1/2}}(k)$	r $r(k)$	R $R(k)$	$W_{(1,2)}$ $W_{(1,2)}(k)$
Оригінал Зображення	$\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$ $r_r^{\underline{n}}(k)$	$\frac{1}{\gamma^*}$ $\gamma(k)$	$\mathrm{tg}\,i$ $\left\vert\frac{s_i(k)}{c_i(k)}\right\vert$	
Оригінал Зображення	$\frac{\partial U_n}{\partial r}$ $b_r(k)$	$\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial \varphi}$ $b_\varphi(k)$	$\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U_n}{\partial \lambda}$ $b_\lambda(k)$	
Оригінал Зображення	$P_n(\sin\varphi)$ $P_n(k)$		$\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}$ $P_n^m(k)$	
Оригінал Зображення	$P_n'(\sin\varphi)$ $P_n'(k)$		$P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi$ $P_n^{m/}(k)$	
Оригінал Зображення	x $x(k)$	y $y(k)$	z $z(k)$	x_i $x_i(k)$
Оригінал Зображення	y_i $y_i(k)$	z_i $z_i(k)$	$\sin s$ $s_s(k)$	$\cos s$ $c_s(k)$
Оригінал Зображення	$\sin\varphi$ $s_\varphi(k)$	$\cos\varphi$ $c_\varphi(k)$	$\sin(m\lambda)$ $s_{m\lambda}(k)$	$\cos(m\lambda)$ $c_{m\lambda}(k)$
Оригінал Зображення	v $v(k)$	v_s $v_s(k)$	v_T $v_T(k)$	v_W $v_W(k)$
Оригінал Зображення	v_r $v_r(k)$	v_n $v_n(k)$	h $h(k)$	ρ $\rho(k)$
Оригінал Зображення	$\sqrt{x^2+y^2}$ $r_{xy}(k)$		$\sqrt{1-\bar{e}_3^2\cos^2\varphi}$ $d(k)$	
Оригінал Зображення	$k_{1j}(h-h_j)^2-k_{2j}(h-h_j)$ $f(k)$			

де ъ(k)– тейлорівська одиниця, «теда»:

$$ъ(k)=\begin{cases}1, \text{якщо} & k=0\\ 0, \text{якщо} & k>0;\end{cases}$$

$*$ – для області ДТ-зображень операція добутку в області оригіналів, наприклад, для оригіналів $z(t)=x(t)\,y(t)$:

$$z(k)=x(k)*y(k)=\sum_{g=0}^{k}x(k-g)y(g);$$

$\left\vert-\right\vert$ – для області ДТ-зображень операція ділення в області оригіналів, наприклад, для оригіналів $z(t)=x(t)/y(t)$:

$$z(k)=\left\vert\frac{x(k)}{y(k)}\right\vert=\frac{x(k)-\sum\limits_{g=1}^{k}z(k-g)y(g)}{y(0)};$$

$\underline{\frac{1}{2}}$ – для області ДТ-зображень операція взяття квадратного кореня в області оригіналів, наприклад, для оригіналів $z(t)=\sqrt{x(t)}$:

$$z(k)=x^{\underline{\frac{1}{2}}}(k)=\frac{1}{2}\frac{x(k)-\sum\limits_{g=1}^{k-1}z(k-g)x(g)}{z(0)},$$

$$\text{якщо } z(0)=\sqrt{x(0)};$$

$\underline{2}$, $\underline{3}$, – для області ДТ-зображень операція возведення у ступінь в області оригіналів;

$\underline{\sin}[\ ]$, $\underline{\cos}[\ ]$ – для області ДТ-зображень операція взяття синуса та косинуса відповідно в області оригіналів, наприклад, для оригіналів $s_x(t)=\sin[x(t)]$ та $c_x(t)=\cos[x(t)]$:

$$\begin{cases}s_x(k)=\underline{\sin}[x(k)]=\sum\limits_{g=0}^{k}\frac{g+1}{k}z(k-g-1)c_x(g+1),\\ \qquad \text{якщо} \quad s_x(0)=\sin[x(0)]\\ c_x(k)=\underline{\cos}[x(k)]=-\sum\limits_{g=0}^{k-1}\frac{g+1}{k}z(k-g-1)s_x(g+1),\\ \qquad \text{якщо} \quad c_x(0)=\cos[x(0)]\end{cases}$$

$\underline{\exp}[\ ]$ – для області ДТ-зображень операція взяття експоненціальної функції в області оригіналів, наприклад, для оригіналів $z(t)=A\exp[x(t)]$:

$$z(k)=A\underline{\exp}[x(k)]=A\sum_{g=0}^{k-1}\frac{g+1}{k}z(k-g-1)x(g+1),$$

$$\text{якщо } z(0)=A\exp[x(0)].$$

Відповідність функцій (оригіналів) та їх ДТ-зображень наведена у табл. 1.

Пряме перетворення рівнянь (50)−(109) являє собою систему рекурентних рівнянь відносно Т-дискет для моделі (3)−(48). Із цієї системи можна послідовно визначити значення дискет ДТ-спектра, для $k = 0 \ldots k_{\max}$, задаючи величину цілочислового аргументу k починаючи з $k = 0$ до ($k_{\max} - 1$).

2. Обернене перетворення – відновлення отриманого ДТ-спектра в область оригіналів, тобто отримання на сітці ω_i на основі оберненого перетворення рівняння (2) апроксимації траєкторії КА у ГСК у вигляді $k_{\max}$-ї часткової суми відрізку ряду Тейлора

$$\begin{cases} \Omega(t_{i+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} \Omega(k); \\ i(t_{i+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} i(k); \\ p(t_{i+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} p(k); \\ q(t_{i+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} q(k); \\ l(t_{i+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} l(k); \\ u(t_{i+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} u(k), \end{cases} \qquad (110)$$

де

$k_{\max}$ – номер старшої ДТ-дискрети, що враховується при відновленні.

Пряме та обернене ДТ-перетворення у рівняннях (50)−(110) визначають обчислювальну схему інтегрування диференціального рівняння руху КА (3)−(48). Ця схема дозволяє послідовно (починаючи з $i = 0$ при ПУ (49)) виконати прогнозування руху КА в оскулювальних елементах – визначити у вузлах ω_i значення функції, що приймається за наближення значення прогнозованого положення КА.

Для перевірки працездатності запропонованої числово-аналітичної обчислювальної схеми прогнозування руху КА та оцінювання її ефективності для проведення довгострокового прогнозування руху КА (до 14 діб) у середовищі Delphi було розроблено процедуру для прогнозування руху КА, що реалізує запропонований підхід.

За допомогою розробленої процедури проведено прогнозування руху КА з параметрами орбіти, близькими до вітчизняного КА дистанційного зондування Землі «Сич-1» ($h_{ka} \approx$ 600 км, $e \leq$ 0,01, S_b = 0,06).

У моделі руху КА задано поле до 8×8 гармонік розкладу геопотенціалу Землі у ряд за сферичними функціями відповідно до праці [1], а при врахуванні сили аеродинамічного опору атмосфери використано її статичну модель відповідно до ГОСТ-4401−64.

Результати порівняння прогнозування руху КА (табл. 2) на основі запропонованої обчислювальної схеми (48)−(110) та за допомогою програми ЕА 100 «Прогнозування параметрів руху КА» (ЕА 100 є програмною компонентою штатного ПК БНЗ «Навігатор») [2].

Таблиця 2

Максимальні значення модуля відхилу між прогнозованим положенням КА

Модуль відхилу	Часовий інтервал прогнозу, д		
	3	7	14
За положенням КА, км	0,007070	0,010236	0,014339
За швидкістю КА, км/с	0,000007	0,000010	0,000015

Для прогнозування параметрів руху КА крок інтегрування методом Адамса встановлено 100 с.

Для проведення прогнозування руху КА використовували обчислювальну схему (50)−(110), з характеристиками, які забезпечували однакову точність прогнозування та становили:

H_i = 40 с для $k_{\max}$ = 4;

H_i = 400 с для $k_{\max}$ = 8;

H_i = 700 с для $k_{\max}$ = 12;

H_i = 800 с для $k_{\max}$ = 20,

де

$k_{\max}$ – максимальний номер Т-дискрети, що враховується при відновленні.

Висновки

Наведені результати доводять адекватність розробленої моделі руху КА. Обчислювальна схема (50)−(100) дозволяє проводити прогнозування руху КА з точністю, не меншою за точність штатної моделі руху КА. Запропонована обчислювальна схема є однокроковою. Відомо, що саме однокрокові схеми найбільш ефективні, але проведення прогнозування руху КА зі змінним кроком та порядком [5]. Наведені результати ілюструють можливість варіювання характеристиками запропонованої схеми – величиною кроку та порядком при прогнозуванні руху КА. Розроблена обчислювальна схема, виходячи з властивостей ДТ-перетворень, дозволяє отримувати не сіткову, а кусково-визначену на підвідрізках між вузлами сітки функцію, що дає змогу проводити прогнозування без прив'язки до заданої сітки (якщо є така потреба) і застосування процедури інтерполяції.

Література

1. *Мамон В.А.* Баллистическое обеспечение космических польотов / В.А. Мамон , В.И. Половников , С.К. Слезкинский.− Л.: ВИКК им. А.Ф. Можайского , 1990.

2. *Космический* аппарат «Сич-1»: Положение по баллистико-навигационному обеспечению полёта космического апарата. − «Сич-1» 39.5072.114 ПЛ. − 9 с.

3. *Ковбасюк С.В.* Прогнозирование неуправляемого движения космического аппарата методом дифференциальных преобразований / С.В. Ковбасюк , М.Ю. Ракушев // Двойные технологии. – 2003. – № 4. – С. 16–20.

4. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов. – К.: Наук. думка, 1986. – 159 с.

5. *Холл Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл , Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 321 с.

Стаття надійшла до редакції 04.06.09.