

УДК 539.4

В. М. КІНДРАЧУК

Інститут проблем матеріалознавства НАН України, м. Київ, Україна

МОДЕЛЬ ІЗОТРОПНОГО РУЙНУВАННЯ БЕТОНУ В УМОВАХ ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Запропонована реологічна модель для ізотропного руйнування бетону. Модель дозволяє прогнозувати руйнування як в умовах монотонного, так і циклічного навантаження, тобто зумовленого втомою матеріалу. Представлений алгоритм чисельного інтегрування рівнянь моделі а також приклад моделювання деформації бетону під дією одночасно циклічного та монотонного навантаження.

Ключові слова: в'язкопластичність, руйнування, реологічна модель, бетон.

Вступ. Добре відомо, що усталена деградація механічних властивостей характеризує ті сценарії навантаження, котрі пов'язані з аспектами довговічності. Циклічна довговічність бетону сягає мільйони циклів навантаження. Тому безпосереднє, цикл за циклом, моделювання усталеної деградації бетону пов'язане зі значними обчислюваними витратами і не вбачається доцільним. Як наслідок, більшість моделей довговічності базуються на емпіричних підходах для визначення деградації механічних властивостей матеріалу. Для прикладу, рівняння Періса описує швидкість докритичного розвитку тріщини [1]. Для зразків без надрізу втома моделюється кривою Веллера (кривою втоми), котра встановлює залежність між максимальним напруженням і кількістю циклів до руйнування. В режимі малоциклічної втоми, крива Веллера апроксимується емпіричним співвідношенням Кофіна-Менсона [2], а в режимі багатоциклічної втоми – емпіричним рівнянням Баскуїна [3]. У більш загальному випадку, коли амплітуди навантаження на зразок різняться, широко застосовується закон Пальмгрена-Мінера. Він постулює лінійне накопичення пошкоджуваності [4] і простий у застосуванні. Проте експериментально встановлено, що порядок, у котрому слідують навантаження різної амплітуди, також має значення на підсумкову довговічність. Для запобігання цьому недоліку були розвинуті моделі нелінійного накопичення деформації чи пошкоджуваності [5, 6]. Незважаючи на обчислювальну ефективність концепції Веллера, його недолік полягає у тому, що апроксимуючи довговічність не враховуються вплив погіршення механічних властивостей матеріалу і пластичної деформації вже набутих через втому. У свою чергу, цей недолік не дозволяє врахувати вплив крипу, вологості, термомеханічного навантаження, розмірних ефектів чи впливу швидкості навантаження на довговічність. Застосування тільки експериментальних методів недостатньо для визначення впливу перелічених факторів. Тому мета роботи полягає у розвитку реологічної моделі, котра реалістично відображатиме накопичення пошкоджуваності і деградацію механічних властивостей бетону у процесі його втоми до самого руйнування.

Традиційні реологічні моделі руйнування бетону застосовують тензор пошкоджуваності [7-10]. Нерідко пошкоджуваність комбінується з поруватістю чи пластичною течією [11, 12]. Такі моделі спроможні відображати поведінку бетону у режимі статичного навантаження, але вони не відтворюють процес накопичення

деформації і пошкоджуваності у процесі циклічного навантаження, – дисипативні процеси прогножуються тільки до настання усталеного циклу. Для врахування втоми, подібні моделі потребують уточнення. Одна з можливостей – це асоціювати тензор пошкоджуваності зі швидкістю вивільнення пружної енергії, як продемонстровано у [11, 13]. Ми пропонуємо моделювати втому як наслідок внутрішнього тертя і ковзання, тобто постулюємо залежність від швидкості деформації. Таким чином, ми komponуємо і взаємопов'язуємо пошкоджуваність і в'язкопластичність. Це узгоджується зі спостереженням залежності границь міцності бетону (як на стиск, так і особливо на розтяг) від швидкості деформації [14]. Окрім того, припущення в'язкопластичної природи деформації дозволяє моделювати експериментально підтверджену повзучість бетону.

Як вище згадувалось, застосування реологічних моделей для прогнозування втоми ускладнюється суттєвими обчислювальними витратами. Їм можна запобігти застосувавши методи інтегрування, що розрізняють дві часові шкали – гомогенну та осциляторну. У найбільш спрощеному розгляданні, такі методи шукають точний розв'язок на осциляторній часовій шкалі і екстраполюють на гомогенну. Знайдений розв'язок з потрібною точністю апроксимує циклічну втому, а необхідні обчислювальні ресурси скорочуються на порядки. Таким чином, реологічні моделі у поєднанні з багатощкалевими методами у часі постають ефективною альтернативою емпіричним методам для розв'язання задач пов'язаних з довговічністю і втомою. Надалі увага приділяється розробці реологічної моделі для прогнозування втоми і повзучості у бетоні. Для більш детального ознайомлення з багатощкалевими методами у часі читачеві рекомендуються публікації [15–17].

Реологічна модель

Ефективне напруження. Механіка суцільного середовища розглядає бетон як гомогенний континуум. Для адаптації поняття руйнування континууму застосовується певний принцип еквівалентності, – зазвичай принцип еквівалентності деформації. Він стверджує, що напруження σ викликає у гомогенному, пошкодженому матеріалі таку ж деформацію яку викликає у непошкодженому матеріалі ефективне напруження $\tilde{\sigma}$. Таким чином, усі реологічні співвідношення для непошкодженого матеріалу продовжують мати місце з точністю до заміни номінального напруження на ефективне. Найширше застосування знайшов взаємозв'язок між $\tilde{\sigma}$ та σ запропонований у роботах Качанова та Роботнова [18, 19]:

$$\tilde{\sigma} = (1 - d)^{-1} \cdot \sigma, \quad (1)$$

де скаляр d ($0 \leq d < 1$) характеризує міру ізотропної пошкоджуваності матеріалу. Зокрема $d \rightarrow 1$ відповідає стану цілком зруйнованого матеріалу. Для крихких матеріалів пошкоджуваність має анізотропну природу і макроскопічно може бути описана не скаляром, а тензором другого або четвертого рангу D . Для спрощення, ми надалі обмежимося рівнянням (1) ізотропної пошкоджуваності в умовах стиску, – найбільш реальний сценарій навантаження бетону.

Згідно принципу еквівалентності деформації, закон Гука виконується для ефективного напруження:

$$\tilde{\sigma} = C : \varepsilon^e, \quad (2)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ – тензор пружної деформації, $\mathbf{C}$ є матрицею пружності для ізотропного матеріалу, тобто визначається коефіцієнтом Пуассона ν та модулем Юнга E неушкодженого бетону ($d = 0$). У наближенні малих деформацій, тензор пружної деформації отримуємо з різниці повної $\boldsymbol{\varepsilon}$ і в'язкопластичної $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ деформації

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}. \quad (3)$$

Закони течії та руйнування. У якості поверхні течії ми використовуємо поверхню Друкера-Прагера $f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$

$$f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\beta}{3} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}') - H, \quad J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}') = \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}, \quad (4)$$

де $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'$ – девіатор тензору ефективного напруження, β та H є параметрами. В'язкопластична течія відбувається одразу, як тільки виконується умова $f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) > 0$. Для швидкості течії ми обираємо модель течії запропоновану Дуват-Ліонсом [20]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\text{sgn} \langle f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \rangle_+}{\eta} \mathbf{C}^{-1} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\mathbf{P}}). \quad (5)$$

Значення дужок $\langle \dots \rangle_+$ рівне 0 для від'ємного аргументу і рівне самому аргументу якщо він додатний. Напруження $\tilde{\mathbf{P}}$ лежить на поверхні течії і досягається у тому граничному випадку, коли параметр в'язкості близький до нуля $\eta \rightarrow 0$. Тобто $\tilde{\mathbf{P}}$ є ефективним напруженням у пластичному наближенні і тому задовольняє асоціативному закону течії

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\pi}, \\ \Delta\boldsymbol{\pi} &= \Delta p \frac{\partial f^{vp}(\tilde{\mathbf{P}})}{\partial \tilde{\mathbf{P}}}, \\ \Delta p &\geq 0, \quad f^{vp}(\tilde{\mathbf{P}}) \leq 0, \quad \Delta p \cdot f^{vp}(\tilde{\mathbf{P}}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Напруження $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ і $\tilde{\mathbf{P}}$ співпадають у пружній області, $f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 0$. Якщо ж $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ знаходиться за межами пружної області, $f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \geq 0$, то $\Delta\boldsymbol{\pi}$ є інкремент тензору пластичної деформації, необхідний щоб повернути напруження $\tilde{\mathbf{P}}$ на поверхню течії (return mapping). На відміну від $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, котре можна поміряти, напруження $\tilde{\mathbf{P}}$ є фіктивним. Воно є проекцією $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ на поверхню течії у сенсі (6).

Згідно припущенню цієї моделі, пошкоджувальність виникає унаслідок в'язкопластичної течії. Тому накопичення пошкоджувальності асоціюється не з певною поверхнею руйнування, а з накопиченою в'язкопластичною деформацією

$$\dot{d} = (1 - d) \cdot \frac{\dot{\kappa}}{e}, \quad \dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}}, \quad (7)$$

де κ є ефективна накопичена в'язкопластична деформація, а параметр e характеризує в'язкість руйнування бетону.

Реологічні співвідношення містять нерівності у (6). Доцільно переформулювати ці співвідношення моделі таким чином, щоб вони мали форму виключно рівнянь. Це спрощує застосування апарату класичних чисельних

методів розвинутих для розв'язання диференціальних і алгебраїчних рівнянь. Для цього ми замінюємо (6) еквівалентними рівняннями відносно невідомої змінної v , як запропоновано у [21]

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\pi}, \\ \Delta \boldsymbol{\pi} &= \langle v \rangle_+ \frac{\partial f^{vp}(\tilde{\mathbf{P}})}{\partial \tilde{\mathbf{P}}}, \\ E \langle v \rangle_- - f^{vp}(\tilde{\mathbf{P}}) &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Тут визначення для $\langle v \rangle_-$ згідно рівнянню $\langle v \rangle_- = v - \langle v \rangle_+$.

Інтегрування рівнянь моделі. Розглянемо інтервал часу $[t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$ і припустимо, що на момент t_1 ми знаємо усі величини моделі і інкремент деформації $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$. Невідомим є напруження $\boldsymbol{\sigma}_2$ в момент t_2 . Надалі індекси 1 та 2 позначають момент часу t_1 чи t_2 , для котрого розглядається та чи інша величина. Рівняння для ефективних напружень у момент часу t_2 випливають з закону Гука

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}), \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 &= \tilde{\mathbf{P}}_1 + \Delta \tilde{\mathbf{P}}, \quad \Delta \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\pi}), \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 &= \tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1^{vp}).\end{aligned}\quad (9)$$

Очевидно, що достатньо визначити інкремент тензору напружень $\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, котрий залежить від невідомого інкременту тензору в'язкопластичної деформації $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}$. Останній впливає з еволюційних рівнянь (5) і (8). Тоді ми отримуємо систему рівнянь відносно невідомих $\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $\Delta \tilde{\mathbf{P}}$ і v_2

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta t \frac{\text{sgn} \langle f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \rangle_+}{\eta} \cdot (\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta \tilde{\mathbf{P}}) - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{0}, \\ \Delta \tilde{\mathbf{P}} + \langle v_2 \rangle_+ \mathbf{C} : \frac{\partial f^{vp}(\tilde{\mathbf{P}})}{\partial \tilde{\mathbf{P}}} \bigg|_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \Delta \tilde{\mathbf{P}}} - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{0}, \\ E \langle v_2 \rangle_- - f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \Delta \tilde{\mathbf{P}}) &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Це система з тринадцяти рівнянь і тринадцяти невідомих. Вона встановлює взаємозв'язок між $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ та $\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Ефективне напруження $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2$ отримується з (9) та розв'язку системи (10) як

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1^{vp}) + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (11)$$

Перерахунок з ефективного в номінальне напруження дається рівнянням Качанова (1) та розв'язком (7)

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1-d_1}{1+\xi} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2, \quad \xi = \frac{\Delta \kappa}{e}, \quad \Delta \kappa = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}}. \quad (12)$$

Відзначимо, що $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}$ обчислюється з розв'язку (10)

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp} = \Delta t \frac{\text{sgn} \langle f^{vp}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \rangle_+}{\eta} \cdot \mathbf{C}^{-1} : (\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta \tilde{\mathbf{P}}). \quad (13)$$

Приклад моделювання. Розрахуємо напруження σ_{11} у матеріальній точці з наступними граничними умовами: $\dot{\epsilon}_{11} = -6,25 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ та $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ МПа. При цьому, через регулярні інтервали деформації ми будемо моделювати розвантаження і повторне навантаження. Це дозволить спостерігати за динамікою модуля Юнга, а відтак і пошкоджуваності на різних етапах навантаження.

Для інтегрування рівнянь (10) був застосований метод Ньютона-Рафсона. Результат у вигляді залежності $\sigma_{11}(\epsilon_{11})$ зображено на рис. При напруженні нижче -15 МПа починається в'язкопластична течія, котра супроводжується накопиченням пошкоджуваності d . При деформації близько $-0,0025$ спостерігається макроскопічне зменшення. При подальшому розвантаженні-навантаженні спостерігається зменшення нахилу кривої, що характеризує зменшення модуля Юнга.

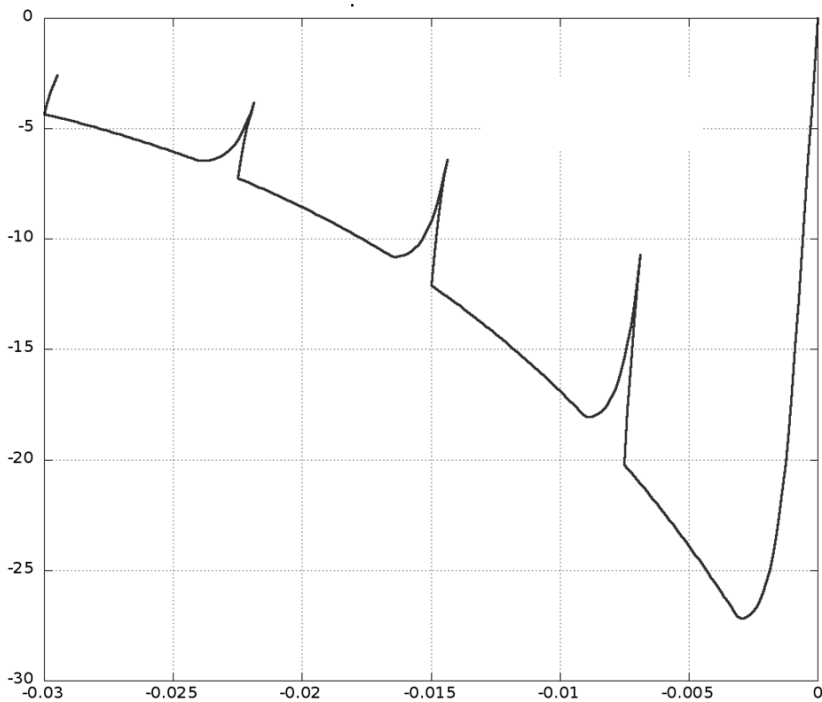


Рис. Залежність напруження від деформації за одновісного стискування

Висновки. У роботі розроблена реологічна модель для ізотропного руйнування бетону. Руйнування асоціюється з в'язкопластичною течією. Для поверхні течії вибрано добре відому поверхню Друкера-Прагера, а сама течія моделюється законом Дуват-Ліонса. Співвідношення моделі сформульовано у вигляді виключно рівнянь, що дозволяє реалізувати пошук чисельного розв'язку без застосування алгоритмів типу «предиктор-коректор».

Модель може бути застосована як для розрахунків статичного так й циклічного навантаження. У подальшому вбачається доцільним уточнення закону Дуват-Ліонса для можливості прогнозування повзучості.

Список літератури

1. Paris P., Gomez M., Anderson W. A rational analytic theory of fatigue // The Trend in Engineering. – 1961. – №13. – P. 9-14.

2. Coffin L. F. Jr. The effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal // *ASTME Trans.* – 1954. – №76. – P. 931-950.
3. Basquin O. The exponential law of endurance tests // *Proceedings of ASTM ASTEA.* – 1910 – №10. – P. 625-630.
4. Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern // *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.* – 1924. – 68, №14. – P. 339-341.
5. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials // *Int. J. Of Fatigue.* – 1998. – №20. – P. 9-34.
6. Taheri S., Vincent L., Le-roux J. A New Model for Fatigue Damage Accumulation of Austenitic Stainless Steel Under Variable Amplitude Loading // *Int. J. Of Fatigue.* – 2012. – №42. – P. 71-81.
7. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // *J. Appl. Mech.* – 1988. – №55. – P. 280-286.
8. Chow L. and Wang J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics // *Int. J. Fract.* – 1987. – №33. – P. 3-16.
9. Betten J. Net-stress analysis in creep mechanics // *Ingenieur-Archiv.* – 1982. – №52. – P. 405-419.
10. Murakami S. *Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture* – Springer, 2012. – P. 402.
11. Lemaitre J., Desmorat R. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures* – Springer, 2005. – P. 404.
12. Voyiadjis G., Taqieddin Z., Kattan P. Anisotropic damage-plasticity model for concrete // *Int. J. Plasticity.* – 2008. – №24. – P. 1946-1965.
13. Alliche A. Damage model for fatigue loading of concrete // *Int. J. Fatigue.* – 2004. – №26. – P. 915-921.
14. Lu Y., Xu K. Modelling of dynamic behaviour of concrete materials under blast loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – №41-1. – P. 131-143.
15. Ladevèze P., Passieux J.-C., Neron D. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2010. – №199. – P. 1287-1296.
16. Oskay C., Fish J. Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2004. – №61-3. – P. 329-359.
17. Cojocaru D., Karlsson A. A simple numerical method of cycle jumps for cyclically loaded structures // *Int. J. Of Fatigue.* – 2006. – №28-12. – P. 1677-1689.
18. Качанов Л. О времени разрушения в условиях ползучести / Качанов Л. // *Изв. АН СССР. ОTH.* – 1958. – №8. – С. 26 – 34.
19. Rabotnov Y. Creep rupture // *Proc. Appl. Mech. Conf.* – 1968. – P. 342-349.
20. Simo J., Hughes T. *Computational Inelasticity.* – Springer, 1998. – P. 412.
21. Kindrachuk V., Galanov B. An efficient approach for numerical treatment of some inequalities in solid mechanics on examples of Kuhn–Tucker and Signorini–Fichera conditions // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2014. – №63. – P. 432-450.

Стаття надійшла до редакції 30.05.2014

V. M. KINDRACHUK

AN ISOTROPIC DAMAGE MODEL FOR CYCLIC CONCRETE DETERIORATION

This work refers to the macroscale approach, which assumes a homogeneous material and relies on the domain of continuum damage mechanics. Coupling of the damage constitutive models with plasticity is nowadays well established and realistically reproduces irreversible flow of concrete with degradation of its stiffness. The focus of this paper is twofold: to incorporate rate-dependent effects in constitutive modelling of concrete degradation and to provide a robust integration scheme for the constitutive relations. The Drucker-Prager yield surface is introduced, which bounds the elasticity domain and activates the rate-dependent yielding. It drives the compressive damage mechanism too. In this formulation the model is able to predict both static and cyclic responses. Finally, a numerical example is given.

Keywords: viscoplasticity, continuum damage mechanics, concrete.

Кіндрачук Віталій Мирославович – канд. техн. наук, науковий співробітник відділу 44, Інститут проблем матеріалознавства НАН України, м. Київ, Україна, vkindrachuk@web.de.