

*В. В. Ставицкий, канд. техн. наук., доц.,  
П. Л. Носко, д-р техн. наук., проф.*

### **МЕТОД АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ**

Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля

*Предложен метод определения коэффициента полезного действия высокоскоростных зубчатых передач, базирующийся на аналитических зависимостях потерь мощности вследствие аэродинамического сопротивления вращению зубчатых колес, периодического сжатия и расширения маслораздушной смеси в пространстве между зубьями, трения скольжения и качения в зацеплении и подшипниках зубчатой передачи от ее основных параметров и условий эксплуатации.*

**Вступление.** В настоящее время в связи с бурным развитием энергетического, химического и транспортного машиностроения остро ощущается необходимость в большом количестве редукторов для компрессорных станций газопроводов, компрессоров аммиака в технологических циклах производства удобрений и синтетических волокон, гидравлических, паровых и газовых турбогенераторов, детандергенераторных установок и коробок передач двигателей внутреннего сгорания. С целью снижения массы и габаритов, обеспечение высокого коэффициента полезного действия наблюдается тенденция увеличения частоты вращения как турбо- так и электромашин. Например, в современных турборедукторах окружная скорость достигает 150 м/с, а передаваемая мощность – сотен мегаватт. При таких передаваемых мощностях потери составляют 1 МВт и более. Для снижения потерь необходимо провести тщательный анализ источников диссипации энергии и установить влияние на них геометрических параметров зубчатых передач и условий их эксплуатации.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Потери энергии в зубчатых передачах условно разделяют на две группы: а) потери, зависящие от передаваемой нагрузки (потери на трение скольжения и качения контактирующих поверхностей зубчатой пары и подшипников); б) потери, независящие от передаваемой нагрузки (аэрогидродинамического сопротивления вращению зуб-

чатых колес). Удельный вес этих потерь составляет: 40 % – потери на трение в зубчатом зацеплении; 50 % – потери на трение в подшипниках; 10 % – потери мощности аэродинамического сопротивления вращению зубчатых колес [1]. Однако, другие источники отмечают иное относительное распределение потерь мощности. Например, авторы [2] провели экспериментальное исследование потерь на установке полностью имитирующей процессы в зубчатой передаче в диапазоне скоростей 0–15000 об/мин и нагрузок 0–3,7 кВт. Результаты исследований показали, что при нагрузке, составляющей 33–100 % максимальной и скоростях 83–100 % максимальной, аэродинамические потери становятся практически равными потерям на трение в зубчатом зацеплении. Результаты большинства исследований, имеющих в открытой печати, приводятся в виде эмпирических зависимостей, в которых практически отсутствует оценка влияния геометрических параметров зубчатых колес на потери мощности, независимые от передаваемой зубчатой передачей нагрузки.

**Цель работы** – разработка аналитического метода анализа эффективности высокоскоростных зубчатых передач энергетических машин, позволяющего с минимальными затратами вычислительных усилий количественно оценивать влияние на эффективность различных видов потерь мощности. Для достижения поставленной цели необходимо провести оценку удельного веса различных источников диссипации энергии: аэрогидродинамическое сопротивление вращению зубчатых колес, периодическое сжатие и расширение масловоздушной смеси в пространстве между головками и ножками зубьев колес, находящихся в зацеплении, механическое трение скольжения и качения в зацеплении и подшипниках.

**Разработка метода.** Предлагаемый метод анализа эффективности высокоскоростных зубчатых передач энергетических машин заключается в определении коэффициента полезного действия (КПД) зубчатой передачи на номинальном режиме эксплуатации с введением корректирующих коэффициентов для учета частичности режимов работы. Ранее на основании разработанных авторами математических моделей [3–8] получены аналитические выражения для расчета независимых от передаваемой нагрузки потерь мощности:

– потери вследствие аэродинамического сопротивления масловоздушной смеси вращению зубчатых колес

$$P_{A_i} = p_a \cdot k \cdot O_i \cdot M_{окр}^2 \cdot \sum_{i=1}^l (C_n + C_M + C_\tau + C_R), \quad (1)$$

где  $C_n = z_i \cdot \bar{b}_i \cdot \frac{tg^2 \alpha_a - tg^2 \alpha_c}{2} \cdot \bar{p}_a \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^4 \alpha$  – безразмерный момент аэросопротивления;  $M_{окр} = V_{окр} / c$  – относительная окружная скорость зубчатого колеса;  $\bar{p}_a = \rho_a / \rho$  – относительная плотность масловоздушной смеси во впадинах зубчатого колеса;  $p_a$  – атмосферное давление, МПа;  $c = \sqrt{k \cdot p_a / \rho}$  – скорость звука в масловоздушной смеси при нормальных условиях, м/с;  $k$  – показатель адиабаты масловоздушной смеси;  $V_{окр} = \omega_i \cdot r_i$  – окружная скорость зубчатого колеса, м/с;  $\omega_i$  – угловая скорость зубчатого колеса, рад/с;  $r_i$  – радиус делительной окружности зубчатого колеса, м;  $\alpha$  – угол станочного зацепления, рад;  $\beta$  – угол наклона линии зубьев, рад;  $\alpha_a = \arccos(r_{b_i} / r_{a_i}) = \arccos(l / A_i)$  – угол профиля эвольвенты на окружности вершин, рад;  $A_i = r_{a_i} / r_{b_i} = [l + 2 \cdot (h_a^* + x_i) / z_i] / \cos \alpha$  – относительный радиус окружности вершин зубчатого колеса;  $\varphi_i = \pi / z_i - 2 \cdot (2 \cdot x_i + 1) \cdot tg \alpha + 2 \cdot (\alpha + inv \alpha_a)$  – центральный угол, опирающийся на ширину впадин по окружности вершин;  $h_a^*$  – коэффициент высоты головки зуба;  $x_i$  – коэффициент смещения режущего инструмента;  $r_{b_i}$  – радиус основной окружности, м;  $r_{a_i}$  – радиус окружности вершин, м;  $l$  – число зубчатых колес в передаче;  $\alpha_{c_i} = \arccos(1 + 4 \cdot tg \alpha_2 \cdot (tg \alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1^2)^{-0,5}$ ;  $b_i$  – ширина зубчатого венца, м;  $\mu$  – динамическая вязкость масловоздушной смеси, Па·с;  $C_{\tau_i} = \frac{[z_i^{1,25} \cdot \bar{p}_a \cdot (\bar{b}_i)^{0,75} \cdot (tg \alpha_{a_i} - \varphi_i / 2) \cdot \varphi_i \cdot \cos^5 \alpha \cdot \cos \beta]}{\sqrt{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{Re_i} \cdot tg^2 \alpha \cdot \sin^{1,5} \alpha}$  – безразмерный момент сопротивления вследствие вязкостного трения эвольвентных поверхностей зубьев;  $\bar{b}_i = b_i / r_i$  – относительная ширина зубчатого венца;  $Re_i = \frac{\rho \cdot \omega_i \cdot r_i^2}{\mu}$  – число Рейнольдса;

$$C_{M_i} = \frac{a_R^{лам}}{(5-2 \cdot b_R^{лам}) \cdot Re_{кр}^{b_R^{лам}}} \cdot \left(\frac{r_{кр}}{r}\right)^5 + \frac{a_R^{myp}}{(5-2 \cdot b_R^{myp}) \cdot Re} \cdot \left[ \frac{1}{Re^{b_R^{myp}}} - \frac{1}{Re_{кр}^{b_R^{myp}}} \cdot \left(\frac{r_{кр}}{r}\right)^5 \right] - \text{без-}$$

размерный момент сопротивления вследствие вязкостного трения торцевых поверхностей колес;  $a_R^{myp} = 0,146$ ;

$a_R^{лам} = 0,578 \cdot \pi \cdot \cos^4 \alpha \cdot (A_i^4 - C_i^4)$ ;  $b_R^{лам} = 0,5$ ;  $b_R^{myp} = 0,2$ ;  $Re_{кр} = 3 \cdot 10^5$  –

критическое значение числа Рейнольдса смены режимов с ламинарного на турбулентный;  $r_{кр} = \sqrt{\frac{\mu \cdot Re_{кр}}{\rho_a \cdot \omega}}$  – критическое значение радиуса зубчатого колеса, разделяющего зоны ламинарного и турбулентного режимов, м;

$$C_{R_i} = \gamma_i \cdot A_i^2 \cdot \bar{b}_i \cdot \left[ \frac{1}{Re \cdot \bar{S}_R} + \frac{\bar{S}_R}{2 \cdot \varphi_a \cdot k \cdot M_{окп}^2} \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_{окп}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \right] \cdot \cos^2 \alpha -$$

безразмерный момент сопротивления вследствие вязкостного трения периферии головок зубьев;  $\bar{S}_{R_i} = \frac{S_{R_i}}{r_{a_i}}$  – относительный радиальный зазор между головками зубьев и корпусом передачи;  $\gamma_i$  – угол, стягивающий дугу минимального зазора;

– потери мощности вследствие периодического сжатия и расширения масловоздушной смеси в замкнутом между зубьями пространстве

$$P_{cp} = O_i \cdot \omega_1 \cdot k \cdot \frac{1+u}{8 \cdot u} \cdot \bar{b}^2 \cdot M_{окп}^2 \cdot p_a \cdot \cos^2 \alpha \cdot \Lambda, \quad (2)$$

где  $\Lambda = \left\{ 1 / \left[ (2 \cdot \chi_2 - 1) \cdot \left[ 1 - \frac{(k-1)}{2} \cdot \left( \frac{\bar{b} \cdot M_{окп}}{(2 \cdot \chi_2 - 1) \cdot \tau_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{(2 \cdot \chi_1 - 1)} \right] \right\}$ ;  $u$  – пе-

редаточное отношение;  $\chi_1 = \frac{tg \alpha_{a1} - tg \alpha_w}{\tau_1}$ ;  $\chi_2 = \frac{tg \alpha_{a2} - tg \alpha_w}{\tau_2}$ ;  $\tau_1$  и  $\tau_2$

– угловые шаги шестерни и колеса, соответственно.

Аналитические зависимости (1) и (2) показали, что несвязанные с передаваемой нагрузкой потери мощности прямо пропорциональны объему, занимаемому зубчатыми колесами передачи  $O_i = b \cdot r_{i2}^2$ . Следовательно, потери будут минимальными при минимальных габаритах зубчатой передачи, которые в свою очередь определяются условиями прочности. На основании известной фор-

мулы Герца-Беляева прочностного расчета по контактным напряжениям [9] минимальный объем определяется следующим образом

$$O_i = \frac{T_1^{max} \cdot K_H}{[\sigma_H]^2 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{(u+1)}{u} \cdot \frac{\cos \beta}{\varepsilon \cdot \sin 2\alpha} \cdot \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{\pi \cdot [E_1 \cdot (1-\nu_2^2) + E_2 \cdot (1-\nu_1^2)]}, \quad (3)$$

где  $T_1^{max}$  – максимальный крутящий момент на ведущем валу передачи, Нм;  $\varepsilon = \chi_1 + \chi_2$  – коэффициент перекрытия;  $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости материалов сопряженных зубчатых колес, МПа;  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – коэффициенты Пуассона материалов сопряженных зубчатых колес;  $[\sigma_H]$  – допускаемые контактные напряжения, МПа;  $K_H$  – коэффициент нагрузки.

После подстановки (3) в (1) и (2) и соответствующих преобразований коэффициенты потерь мощности, независимых от передаваемой нагрузки, определяются следующими выражениями:

– коэффициент потерь вследствие аэродинамического сопротивления масловоздушной смеси вращению пары зубчатых колес

$$\psi_n = \frac{k}{\pi} \cdot N \cdot \Pi \cdot M_{окр}^2 \cdot \bar{p}_a, \quad (4)$$

где  $N = \frac{z_1 \cdot (\Gamma_1 + u^3 \cdot \Gamma_2) \cdot K_H \cdot (u+1)}{\delta \cdot \varepsilon \cdot u} \cdot \cos^3 \beta \cdot \sin \alpha$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров зубчатой передачи;

$\Pi = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot p_a}{[E_1(1-\nu_2^2) + E_2(1-\nu_1^2)] \cdot [\sigma_H]^2}$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от материалов и термообработки зубчатых колес, а также условий эксплуатации;

$\Gamma_i = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_{a_i} - \operatorname{tg}^2 \alpha_{c_i}}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;

– коэффициент потерь вследствие вязкостного трения масловоздушной смеси на эвольвентных поверхностях зубьев

$$\psi_\tau = \frac{k}{\pi} \cdot \frac{\bar{p}_a \cdot \Pi \cdot M_{окр}^2}{\sqrt{Re}} \cdot I, \quad (5)$$

где  $I = \frac{z_1^{1,25} \cdot K_H \cdot \cos^2 \beta}{b^{0,25} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin \alpha \cdot \sin^2 2\alpha}} \cdot \frac{(u+1)}{u} \cdot (\Phi_1 + u^{1,25} \cdot \Phi_2)$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров зубчатой передачи;

$\Phi_i = \frac{(\operatorname{tg} \alpha_{a_i} - \varphi_i / 2) \cdot \varphi_i}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;

– коэффициент потерь вследствие вязкостного трения масло-воздушной смеси на торцевых поверхностях зубчатых колес

$$\psi_M = \frac{k}{\pi} \bar{\rho}_a \cdot E \cdot (C_{M1} + u^2 \cdot C_{M2}) \cdot \Pi \cdot M_{окр}^2, \quad (6)$$

где  $E = \frac{K_H}{4 \cdot \bar{b} \cdot \cos^3 \alpha} \cdot \frac{(u+1)}{u} \cdot \frac{\cos \beta}{\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha}$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров зубчатой передачи;

– коэффициент потерь вследствие вязкостного трения масло-воздушной смеси в радиальном зазоре между головками зубьев и корпусом зубчатой передачи

$$\psi_R = \frac{k}{\pi} \bar{\rho}_a \cdot \Theta \cdot \Pi \cdot M_{окр}^2 \cdot \left[ \frac{1}{Re} + \frac{\bar{S}_R^2}{2 \cdot k \cdot M_{окр}^2 \cdot \varphi_a} \cdot \left( 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_{окр}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \right], \quad (7)$$

где  $\Theta = \frac{K_H}{2} \cdot \frac{(u+1)}{u} \cdot \frac{\cos \beta}{\bar{S}_R \cdot \varepsilon \cdot \sin \alpha} \cdot k \cdot (\gamma_1 \cdot A_1^2 + \gamma_2 \cdot u^2 \cdot A_2^2)$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров зубчатой передачи;

– коэффициент потерь вследствие периодического сжатия и расширения масловоздушной смеси в замкнутом между головками и ножками зубьев пространстве

$$\psi_{cp} = \frac{k}{\pi} \cdot \Pi \cdot M_{окр}^2 \cdot \Omega, \quad (8)$$

где  $\Omega = \frac{\bar{b}^2 \cdot K_H}{16 \cdot \varepsilon} \cdot \left( \frac{u+1}{u} \right)^2 \cdot \frac{\cos^3 \beta}{\sin \alpha} \cdot \Delta$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров зубчатой передачи.

Ранее авторами получены выражения для коэффициентов потерь мощности вследствие трения скольжения и качения в зависимости от окружной скорости и вязкости смазочного масла [10]:

$$\psi_f = \frac{0,0464 \left( \frac{1+u}{u} \right)^{0,75} \tau_l^{0,75} \left[ \chi_1^{1,75} + \chi_2^{1,75} \right] + \left[ (1-\chi_1)^{1,75} + (1-\chi_2)^{1,75} \right]}{\nu^{0,25} \cdot V_{окр}^{0,5} \cdot \left[ 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_w + \tau_l \cdot (\chi_1^2 + \chi_2^2) \cdot \frac{u-1}{2 \cdot u} \right]^{0,25}}, \quad (9)$$

$$\psi_k = \frac{A_k}{A_3} = 3 \cdot \frac{[\sigma_H]}{E_{np}^*} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \cos \alpha}{\pi \cdot u \cdot K_H \cdot \cos \beta}} \cdot \frac{(u+1)^2}{4 \cdot \tau_1} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_w \cdot H. \quad (10)$$

Для определения потерь мощности вследствие механического и вязкостного трения в подшипниках пары зубчатых колес предложены следующие выражения

$$\psi_F = \frac{P_a}{[\tau_k] \cdot \Pi} \cdot T, \quad (11)$$

$$\psi_{\text{вязк}} = \frac{\sum_{i=1}^m f_{0i}}{[\tau_k]} \cdot \begin{cases} 5 \cdot 10^{-7} \cdot (v_0 \cdot n)^{2/3} & v_0 \cdot n \geq 2000 \\ 8 \cdot 10^{-5} & v_0 \cdot n \leq 2000 \end{cases}, \quad (12)$$

где  $T = 256 \cdot \frac{\text{tg} \alpha_w}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{b \cdot \varepsilon \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{K_H} \cdot \frac{u}{(u+1)} \cdot \sum_{i=1}^m f_{1i}$  – безразмерный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров зубчатой передачи;

$f_1 = z \left( \frac{F_s}{C_s} \right)^y$  – безразмерный коэффициент [11], зависящий только от типа подшипника и его относительной нагрузки;  $F_s$  – эквивалентная статическая нагрузка, Н;  $C_s$  – базовая (каталожная) грузоподъемность подшипника, Н;  $z, y$  – эмпирические коэффициенты [11];  $[\tau_k]$  – допускаемое напряжение валов зубчатой передачи на кручение, МПа;  $f_{0i}$  – безразмерный коэффициент [11], зависящий от конструкции подшипника и типа его смазывания;  $v_0$  – кинематическая вязкость смазывающего масла, сСт;  $n$  – число оборотов вала в подшипнике, об/мин;  $m$  – число подшипников в зубчатой передаче.

Окончательно коэффициент полезного действия зубчатой передачи, как основной критерий эффективности ее эксплуатации

$$\eta = 1 - \left[ k_t \cdot (\psi_n + \psi_\tau + \psi_M + \psi_R + \psi_{cp}) + \psi_f + \psi_k + \psi_F + \psi_{\text{вязк}} \right], \quad (13)$$

где  $k_t = T_I^{\text{max}} / T_I$  – коэффициент, учитывающий частичность режима передаваемой нагрузки;  $T_I^{\text{max}}$  – максимальный момент, развиваемый зубчатой передачей, Нм.

Анализ выражения (13) показал, что КПД зависит как от условий эксплуатации (передаваемой нагрузки, окружной скорости, температуры и вязкости смазочного масла), так и геометрических параметров зубчатой передачи. Потери мощности, несвязанные с передаваемой нагрузкой, растут с увеличением окружной

скорости в передаче, при этом потери на трение скольжения и качения уменьшаются. Такая закономерность делает правомерной постановку и решение оптимизационной задачи при выборе скоростных режимов эксплуатации зубчатых передач.

#### Список литературы:

1. *Heingartner P.* Determination Power Losses in the Helical Gear Mesh. / P. Heingartner, D. Mba // *Gear Technology*. – Sept. 2005.
2. *Handschuh R. F.* / Preliminary Comparison of Experimental and Analytical Efficiency Results of High-Speed Helical Gear Trains./ R.F. Handschuh, C. J. Kilmain // *DETC'03, ASME, Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*.– 2003. – Vol. 4B. – pp. 949 – 955.
3. *Ставицкий В. В.* / Исследование аэродинамических потерь энергии в высокоскоростных прямозубых цилиндрических передачах // В. В. Ставицкий, П.Л. Носко // *Вестник НТУ «ХПИ»* – Харьков: ХПИ, 2010. – №27. – С. 167–173.
4. *Stavitsky V. V.* Determination du rendement de la transmission cylindrique dentee developante / V. V. Stavitsky, P. L. Nosko, O. Benaissa // *Вісник нац. у-ту ім. В. Даля*.– 2007. – №9 (115). – С. 188 –191.
5. *Ставицкий В. В.* Анализ аэрогидродинамических потерь в зубчатых передачах/ В.В. Ставицкий, П.Л. Носко, П.В. Філь // *Вісник нац. у-ту ім. В. Даля*. – 2009. – №12 (142).– С. 125–131.
6. *Ставицкий В. В.* Анализ составляющих потерь мощности вследствие аэродинамического сопротивления вращению зубчатых колес/ В. В. Ставицкий, П. Л. Носко, С.И. Лиходеев // *Вестник НТУ «ХПИ»* – Харьков: ХПИ. – 2011. – №41. – С. 297–302.
7. *Stavytskyy V. V.* A model for the prediction of windage losses in geared transmissions – preliminary resultants / V. V. Stavitsky, P. L. Nosko // *ТЕКА Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture Poland, Lublin, Polish Academy of Sciences Branch in Lublin*. – 2010. – V. XC. – p. 316–323.
8. *Stavytskyy V. V.* Power losses by the air-pumping phenomena in high-speed spur gears / V. V. Stavitsky, P. L. Nosko // *ТЕКА Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture Poland, Lublin, Polish Academy of Sciences Branch in Lublin*. – 2010. – V. XC. – p. 324-331. Poland, Lublin, Polish Academy of Sciences Branch in Lublin.
9. *Иосилевич Г. Б.* Детали машин / Г. Б. Иосилевич – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.

10. *Ставицький В.В.* Оценка потерь мощности в высокоскоростных цилиндрических передачах / В. В. Ставицький, П. Л. Носко // Вестник НТУ «ХПИ» – Харьков: ХПИ, 2011. – №28. – С. 137-149.

11. *Harris T. A.* Rolling Bearing Analysis / T. A. Harris – 4th ed. – NY: John Wiley & Sons, 2001.

*Ставицький В. В., Носко П. Л.* **Метод аналізу ефективності високошвидкісних зубчастих передач** // Проблеми тертя та зношування: наук.-техн. зб. – К.: НАУ, 2011. – Вип. 55. – С.166–174.

Запропоновано метод визначення коефіцієнту корисної дії швидкісних зубчастих передач, який базується на аналітичних залежностях втрат потужності внаслідок аеродинамічного опору обертанню зубчастих коліс, періодичного стиснення та розширення маслоповітряної суміші між зубцями, тертя ковзання та кочення в зачепленні та підшипниках зубчастої передачі від її основних параметрів та умов її експлуатації.

Список літ.: 11 найм.

*Stavitsky V. V., Nosko P. L.* **Method of analysis of high-speed geared transmission efficiency**

The method of determination of high-speed geared transmission efficiency has been obtained. The method being based on analytical dependences of power windage losses, air-oil-pumping power losses, sliding and rolling frictions power losses in meshing gears and bearings from its basic parameters and its exploitation conditions. Factors affecting influencing on efficiency have been discussed.

**Ключевые слова:** коэффициент полезного действия, потери мощности, зубчатая передача, трение, аэродинамическое сопротивление, сжатие расширение масловоздушной смеси.

Стаття надійшла до редакції 16.11.2011