УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

[1]**А. В. Васильев,** канд. техн. наук,
[2]**В. В. Васильев,** д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины,
[3]**Л. А. Симак,** д-р техн. наук

ФРАКТОР КАК ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

[1]Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: oleksii.vasyliev@gmail.com
[2,3]Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: vsvv06@gmail.com

Рассмотрен сопоставительный анализ математических моделей классических двухполюсных элементов электрических цепей и фрактального двухполюсного элемента. Показано, что такой элемент является обобщением классических элементов. Предложены схемы замещения фрактального двухполюсного элемента для периодических режимов фрактальных электрических цепей. Обсуждаются размерности фрактора в системе единиц измерения СИ.

Ключевые слова: фрактор, фрактанс, элемент с постоянной фазой, дробное исчисление, электрическая цепь дробного порядка.

Введение. Известно, что теория линейных электрических цепей базируется на использовании трех основных двухполюсных элементов: резистора, конденсатора и катушки индуктивности [2; 3]. Переходные процессы в таких цепях описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, порядок которых определяется количеством ветвей, содержащих реактивные элементы. Для решения подобных уравнений широко используются операционные методы (в частности, преобразование Лапласа) [2; 5]. Периодические процессы в RLC- цепях исследуются с использованием преобразования Фурье (частным случаем которого является комплексное исчисление или метод комплексных амплитуд) [4]. С появлением в теоретической электротехнике методов математического анализа нецелых порядков (дробное исчисление) появились и понятия фрактора, фрактанса, элемента с постоянной фазой [7 – 11]. В даной работе рассматриваются математические модели и свойства фрактора. Определяются размерности фракторов в системе единиц измерения СИ [6]. Вопросы реализации фракторов, а также особенности анализа переходных и периодических процессов в таких цепях не входят в круг рассматриваемых вопросов.

Фрактор как обобщение классических элементов электрических цепей. Математическими моделями классических элементов электрических цепей являются интегро-дифференциальные зависимости токов и напряжений [2; 3; 5].

При использовании классификации математических моделей, приведенной в таблице, для фрактора может быть записана следующая система математических моделей. Для переходных процессов и мгновенных значений токов и напряжений:

$$i_{Fr}(t) = Fr\frac{d^{\beta}u_{Fr}(t)}{dt^{\beta}};, \tag{1}$$

$$u_{Fr}(t) = Fr^{-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} i_{Fr}(\tau)d\tau + u_{Fr0}. \tag{2}$$

Математические модели классических элементов линейных электрических цепей

	R	L	C
Для мгновенных значений токов и напряжений в переходных режимах	$i_R(t) = Gu_R(t);$ $u_R(t) = G^{-1}i_R(t) = Ri_R(t)$	$u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt};$ $i_L(t) = L^{-1}\int_0^t u_L(\tau)d\tau + i_{L0}$	$i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt};$ $u_C(t) = C^{-1}\int_0^t i_C(\tau)d\tau + u_{C0}$
Для комплексных амплитуд в периодических процессах	$\dot{I}_R(j\omega) = G\dot{U}_R(j\omega);$ $\dot{U}_R(j\omega) = G^{-1}\dot{I}_R(j\omega) = R\dot{I}_R(j\omega)$	$\dot{U}_L(j\omega) = j\omega L\dot{I}_L(j\omega);$ $\dot{I}_L(j\omega) = L^{-1}(j\omega)^{-1}\dot{U}_L(j\omega)$	$\dot{I}_C(j\omega) = j\omega C\dot{U}_C(j\omega);$ $\dot{U}_C(j\omega) = C^{-1}(j\omega)^{-1}\dot{I}_C(j\omega)$

В операционной области при использовании метода *S*-преобразований [1] получим следующие выражения для математических моделей фрактора:

$$\vec{\mathbf{I}}_{Fr} = Fr \cdot \mathbf{P}^{-\beta} \cdot \vec{\mathbf{U}}_{Fr}\,; \tag{3}$$

$$\vec{\mathbf{U}}_{Fr} = Fr^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\beta} \cdot \vec{\mathbf{I}}_{Fr} + u_{Fr0} \cdot \vec{\mathbf{1}}\,. \tag{4}$$

В выражениях (3), (4) $\mathbf{P}^{\beta}$ – операционная матрица интегрирования порядка β; $\vec{\mathbf{1}}$ – операционное изображение (вектор) константы 1.

Для комплексных амплитуд токов и напряжений в периодических режимах модели имеют вид:

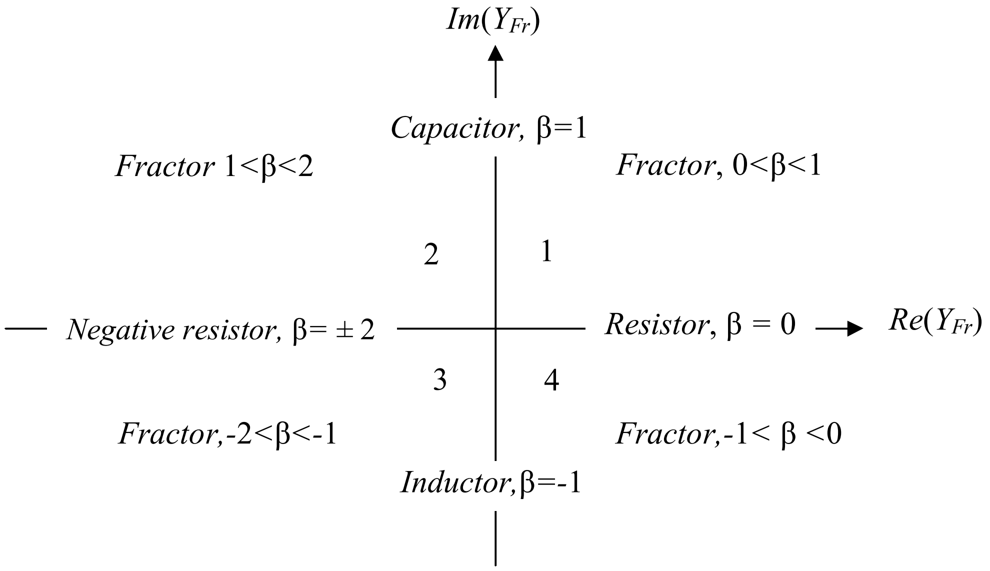
$$\dot{I}_{Fr}(j\omega) = Fr(j\omega)^{\beta}\dot{U}_{Fr}(j\omega); \tag{5}$$

$$\dot{U}_{Fr}(j\omega) = Fr^{-1}(j\omega)^{-\beta}\dot{I}_{Fr}(j\omega). \tag{6}$$

Анализируя математические модели (1) – (6), нетрудно установить, что при $\beta = 0$ формула (1) принимает вид, аналогичный закону Ома для мгновенных значений тока и напряжения, а (3 – 6) становятся выражениями закона Ома в комплексной форме для резистора, если константа *Fr* равна проводимости *G*. При $\beta = +1$ получаем уравнения математических моделей идеального конденсатора с константой *Fr* = *C*. Аналогичные рассуждения для $\beta = -1$ приводят к математическим моделям идеального индуктора с константой *Fr*, равной обратному значению индуктивности *L* – $Fr = 1/L$. Иллюстрация областей существования классических элементов электрических цепей и фрактора приводится на рисунке.

Таким образом, фрактор можно считать обобщением двухполюсных элементов электрических цепей. Размерность константы *Fr* фрактора в системе СИ [6], как это следует из уравнений (5) или (6), определится выражением:

$$[Fr] = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{с}^{\beta} = \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot a^{2} \cdot \text{с}^{3+\beta}\,.$$



Области существования фрактора и классических элементов электрических цепей

Свойства фрактора в частотной области. Поведение фрактора в частотной области определяется зависимостью от частоты его комплексной проводимости. Эта зависимость с учетом различных форм представления комплексных чисел имеет вид:

$$\dot{Y}_{Fr} = Fr\left(j\omega\right)^{\beta} = Fr\omega^{\beta}e^{\frac{j\pi\beta}{2}} = Fr\omega^{\beta}\left(\cos\frac{\pi\beta}{2} + j\sin\frac{\pi\beta}{2}\right). \quad (7)$$

Модуль и фазовый угол комплексной проводимости фрактора определяются выражениями:

$$\left|Y_{Fr}\right| = Fr\omega^{\beta};, \quad (8)$$

$$\arg(Y_{Fr}) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\right) = \frac{\pi\beta}{2}. \quad (9)$$

Модуль комплексной проводимсти (8) изменяется с частотой по степенному закону с дробным показателем степени, тогда как фазовый угол (9) не зависит от частоты и линейно изменяется с дробным порядком β. Независимость от частоты фазового угла послужило основанием называть фрактор также элементом с постоянной фазой. Такое определение, по-видимому, нельзя признать удачным, поскольку фазовые углы классических элементов электрических цепей также не зависят от частоты. Амплитудно-частотные характеристики фрактора в логарифмическом масштабе имеют вид прямых с наклоном 20β децибел/декаду. Фазовые характеристики являются горизонтальными прямыми в соответствии с (9). Выражение комплексной проводимости фрактора (7) в алгебраической форме позволяет предложить схему замещения фрактора в периодических режимах электрических цепей с фракторами в виде частотно зависимых активных и реактивных проводимостей, соединенных параллельно:

$$\mathrm{Re}(\dot{Y}_{Fr}) = Fr\cos\frac{\pi\beta}{2}\omega^{\beta}, \quad (0)$$

$$\mathrm{Im}(\dot{Y}_{Fr}) = Fr\sin\frac{\pi\beta}{2}\omega^{\beta}. \quad (11)$$

При изменении порядка β в диапазоне $1 < \left|\beta\right| < 2$ (2 и 3 квадранты координатной плоскости на рисунке) в соответствии с выражениями (10) и (11) фрактор представим комбинациями частотно-зависимых конденсатора и катушки индуктивности и частотно–зависимого резистора с отрицательным сопротивлением.

Выводы. В работе показано, что фрактальный элемент электрической цепи со степенной зависимостью комплексной проводимости от частоты с дробным показателем степени является обобщением классических двухполюсных элементов электрических цепей. Предложены эквивалентные схемы замещения фрактора для периодических режимов электрических цепей в виде параллельного соединения частотно-зависимых резисторов, конденсаторов или катушек индуктивности. Получено выражение размерности фрактора в системе единиц измерения СИ. Схемы замещения могут найти применение при расчетах переходных и периодических режимов электрических цепей дробного порядка.

Список литературы

1. *Васильев В. В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В.Васильев, Л. А.Симак. – К.: НАН Украины. – 2008. – 256 с.
2. *Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2004. – Т.1 – 463 с.
3. *Новиков Ю. Н.* Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа: учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2005. – 384 с.
4. *Пухов Г. Е.* Комплексное исчисление и его применение / Г. Е. Пухов – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 231 с.
5. *Пухов Г. Е.* Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей / Г. Е. Пухов – К.: Наук. думка, 1967. – 568 с.
6. *Яворский Б. М.* Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф – М.: Наука, 1974. – 942 с.
7. *Bohannan G. W.* Introducing a New Class of Electronic Circuit Element: the Fractor / G. W. Bohannan // 6800 Graduate Colloquim, UK, April 19th, 2003. – 3 p.
8. *NanoDotTek™* What is Fractance and why is it Useful? / NanoDotTek™, Report NDT24-11-2007. – 37 p. // www.nanodottek.com.
9. *Pu Y.,Yuan X. Liao K.* Structuring analog fractance circuit for ½ order fractional calculus / Pu Y.,Yuan X. Liao K. et al. // Proc. Of the 6th Int. Conference on ASIC (ASICON'05). – 2005. – Vol. 2. – P. 1136–1139. Shanghai, China.
10. *Uchaikin V.* Memory regeneration phenomenon in dielectrics: the fractional derivative approach / V. Uchaikin, R. Sibatov, D. Uchaikin // Phys. Scr. – 2009. – Vol.136 – P. 01402–01407.
11. *Westerlund S.* Capacitor theory / S. Westerlund, L. Ekstam //IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation. – 1994. – No1 – P. 826–839.

О. В. Васильєв, В. В. Васильєв, Л. О. Сімак

Фрактор як узагальнення класичних елементів електричних кіл

Розглянуто порівняльний аналіз математичних моделей класичних двополюсних елементів електричних кіл і фрактального двополюсного елемента. Показано, що такий елемент є узагальненням класичних елементів. Запропоновано схеми заміщення фрактального двополюсного елемента для періодичних режимів фрактальних електричних кіл. Обговорюється розмірності фрактора в системі одиниць СІ.

A. V. Vasylyev, V. V. Vasylyev, L. A. Simak

Fractor as generalization of classical electrical components

In this paper the comparative analysis of mathematical models of the classical two-terminal elements of electrical circuits and two-terminal fractal element. It is shown that such an element is a generalization of the classical elements. Equivalent circuits of a fractal element for the periodic modes of fractal circuits are proposed. Fractor's dimension in CI unit system is also discussed.