УДК 621.391: 519.213(045)

[1]**О. В. Гармаш**,
[2]**А. И. Красильников**, канд. физ.-мат. наук

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПИРСОНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ПУАССОНОВСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ КОЛМОГОРОВА ЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

[1]Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
e-mail: [1]oks.garmash@gmail.com, [2]tangorov@voliacable.com

Определено семейство пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей, являющихся решением дифференциального уравнения Пирсона. Обоснован метод пирсоновской аппроксимации пуассоновских спектральных плотностей линейных случайных процессов. С использованием предложенного метода получен закон распределения отклика низкочастотного RC-фильтра на воздействие пуассоновского белого шума с показательным распределением скачков.

Ключевые слова: негауссовские случайные процессы, линейные случайные процессы, безгранично делимые распределения, пуассоновская спектральная функция Колмогорова, пуассоновские спектральные моменты, дифференциальное уравнение Пирсона.

Введение. В последние десятилетия наблюдается повышенный интерес к исследованию и применению негауссовских моделей случайных величин и случайных процессов в различных задачах радиотехники и радиофизики [1 – 6]. К таким моделям относятся линейные случайные процессы [7 – 9], которые наиболее полно отражают физику возникновения флуктуационных сигналов [10].

Линейные случайные процессы имеют [11] безгранично делимые законы распределения, для которых плотность вероятностей может быть найдена в замкнутом виде лишь в некоторых частных случаях [12]. В связи с этим исследования законов распределения линейных случайных процессов целесообразно проводить на основе анализа параметров канонических представлений их характеристических функций, основным из которых является пуассоновская спектральная функция.

Исследования [13 – 15] пуассоновской спектральной функции Колмогорова выявили существенные проблемы ее точного нахождения в общем случае. В связи с этим возникает необходимость разработки и исследования приближенных методов получения пуассоновской спектральной функции, один из которых предложен в работе [16]. Несмотря на простоту и универсальность этого метода его недостатком является аппроксимация пуассоновской спектральной функции суммой, что не всегда удобно для дальнейших теоретических исследований.

Целью данной работы является обоснование применения семейства функций Пирсона для аппроксимации пуассоновской спектральной плотности линейных случайных процессов.

Постановка задачи. Рассмотрим стационарные линейные случайные процессы

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, d\eta(\tau), \tag{1}$$

у которых $\eta(\tau)$ – порождающий процесс является однородным стохастически непрерывным случайным процессом с независимыми приращениями, а неслучайная функция $h(t)$ называется ядром процессов (1) и удовлетворяет условию $h(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Характеристическая функция процессов (1) безгранично делима [11] и может быть представлена в канонической форме Колмогорова

$$f_\xi(u) = \exp\left\{ ium_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \frac{dK_\xi(x)}{x^2} \right\}, \qquad (2)$$

где $\{m_\xi, K_\xi(x)\}$ – параметры характеристической функции представления (2). Параметр m_ξ является математическим ожиданием процессов (1) и определяется формулой [11]:

$$m_\xi = m_\eta \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \ ,$$

в которой $m_\eta = \mathbf{M}[\eta(1)]$.

Функция $K_\xi(x)$ называется пуассоновской спектральной функцией Колмогорова и вычисляется по формуле [11]

$$K_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x,y) dK_\eta(y) \ , \qquad (3)$$

где $K_\eta(y)$ – пуассоновская спектральная функция Колмогорова порождающего процесса, а ядро преобразования [11]:

$$K_h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) E\left[x - yh(\tau)\right] d\tau, \qquad (4)$$

где $E(x)$ – единичная функция.

В общем случае при нахождении пуассоновской спектральной функции (3) возникают две проблемы. Первая проблема связана с получением ядра преобразования (4), которое может быть найдено в явном виде лишь для монотонных ядер $h(t)$, у которых обратная функция выражается аналитически. Вторая проблема определяется тем, что даже при найденных ядрах преобразования $K_h(x,y)$ решение интеграла (3) в общем случае не является тривиальной задачей.

Поставим задачу аппроксимировать пуассоновскую спектральную функцию $K_\xi(x)$ линейных случайных процессов (1), считая заданными ядро $h(t)$ и пуассоновскую спектральную функцию $K_\eta(x)$ порождающего процесса $\eta(\tau)$.

Семейство пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей. Известно [12], что пуассоновская спектральная функция $K_\xi(x)$ представления (2) является неубывающей, непрерывной слева и $K_\xi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} K_\xi(x) = 0$, $K_\xi(\infty) = \lim_{x\to\infty} K_\xi(x) = \kappa_2$, где κ_2 – второй кумулянт процесса (1), $\kappa_2 = \mathbf{D}[\xi(t)]$.

Если функция $K_\xi(x)$ является абсолютно непрерывной, то существует пуассоновская спектральная плотность

$$k_\xi(x) = \frac{dK_\xi(x)}{dx}. \qquad (5)$$

Назовем *семейством пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей* спектральные плотности $k_\Pi(x)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению Пирсона [17].

$$\frac{dk_{\Pi}(x)}{dx} = \frac{a_0 + x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} k_{\Pi}(x), \tag{6}$$

где a_0, b_0, b_1, b_2 – некоторые действительные числа.

Отметим, что любые функции, являющиеся решением дифференциального уравнения (6), называются функциями Пирсона [17]. Впервые уравнение (6) введено К. Пирсоном в 1894 г. для аппроксимации эмпирических плотностей вероятностей теоретическими кривыми по методу моментов [18]. Следует отметить, что помимо указанной задачи уравнение Пирсона используется в теории марковских процессов [19] и при исследовании классических ортогональных многочленов [20].

Дифференциальное уравнение (6) определяет общие свойства пуассоновских спектральных плотностей $k_{\Pi}(x)$, которые состоят в следующем:

$$k_{\Pi}(x) \geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{\Pi}(x)\,dx = \kappa_2;$$

$$\max_x k_{\Pi}(x) = k_{\Pi}(-a_0);$$

$$\lim_{x\to-\infty} k_{\Pi}(x) = \lim_{x\to\infty} k_{\Pi}(x) = 0.$$

Детальные свойства пуассоновских спектральных плотностей $k_{\Pi}(x)$ можно получить из анализа общего решения дифференциального уравнения (6):

$$k_{\Pi}(x) = K_0 \exp\left[u(x)\right],$$

где $K_0 > 0$ – постоянная, определяемая из условия $\int_{-\infty}^{\infty} k_{\Pi}(x)\,dx = \kappa_2$,

$$u(x) = \int \frac{a_0 + x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\,dx. \tag{7}$$

Известно [21], что решения интеграла (7) определяются корнями x_1, x_2 уравнения

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0.$$

В зависимости от характера корней x_1, x_2 различаются 13 типов функций Пирсона, таблицы которых наиболее полно представлены в работе [22].

Таким образом, семейство пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей состоит из 13 четырехпараметрических функций $k_{\Pi}(x) = k_{\Pi}(x; a_0, b_0, b_1, b_2)$, являющихся решением дифференциального уравнения (6).

Метод пирсоновской аппроксимации пуассоновских спектральных плотностей линейных случайных процессов. Для решения задачи аппроксимации пуассоновских спектральных плотностей $k_{\xi}(x)$ линейных случайных процессов (1) пирсоновским семейством $k_{\Pi}(x)$ необходимо связать параметры $\{a_0, b_0, b_1, b_2\}$ функций $k_{\Pi}(x)$ с ядром $h(t)$ и пуассоновской спектральной функцией $K_{\eta}(x)$ процессов (1). С этой целью воспользуемся методом моментов, привлекая для этого пуассоновские спектральные моменты, определенные в работе [23].

Для произвольного безгранично делимого распределения с абсолютно непрерывной пуассоновской спектральной функцией $K(x)$ начальные ν_s и центральные ρ_s пуассоновские спектральные моменты равны:

$$\nu_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \tilde{k}(x)\,dx; \tag{8}$$

$$\rho_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\nu_1)^s \tilde{k}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \tilde{k}(x+\nu_1)\,dx, \tag{9}$$

где $s = 0,1,2,\ldots,$

$$\tilde{k}(x) = \kappa_2^{-1} k(x), \tag{10}$$

$k(x) = K'(x)$.

Для упрощения дальнейших вычислений определим пирсоновскую пуассоновскую спектральную плотность

$$\overset{\circ}{k}_\Pi(x) = \tilde{k}_\Pi(x+\nu_1). \tag{11}$$

Очевидно, что функции $\overset{\circ}{k}_\Pi(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Пирсона, которое в данном случае примет вид

$$\frac{d\,\overset{\circ}{k}_\Pi(x)}{dx} = \frac{A_0 + x}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2}\overset{\circ}{k}_\Pi(x), \tag{12}$$

где постоянные уравнения (12) связаны с постоянными уравнения (6) соотношениями

$$A_0 = a_0 + \nu_1, \quad B_0 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_1^2, \quad B_1 = b_1 + 2b_2\nu_1, \quad B_2 = b_2. \tag{13}$$

Перепишем уравнение (12) в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^s \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2\right) d\,\overset{\circ}{k}_\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \left(A_0 + x\right) \overset{\circ}{k}_\Pi(x)\,dx \tag{14}$$

и, проинтегрировав левую часть равенства (14) по частям, получаем:

$$\begin{aligned} & x^s \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2\right) \overset{\circ}{k}_\Pi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[sB_0 x^{s-1} + (s+1)B_1 x^s + (s+2)B_2 x^{s+1} \right] \overset{\circ}{k}_\Pi(x)\,dx = \\ & = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} x^s\, \overset{\circ}{k}_\Pi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^{s+1}\, \overset{\circ}{k}_\Pi(x)\,dx. \end{aligned} \tag{15}$$

Предположим, что существуют начальные пуассоновские спектральные моменты $\overset{\circ}{\nu}_{s+2}$ пуассоновской спектральной плотности $\overset{\circ}{k}_\Pi(x)$. В этом случае выполняется условие [12]

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{s+2}\, \overset{\circ}{k}_\Pi(x) = 0. \tag{16}$$

Используя определение начальных пуассоновских моментов (8) и формулу (16), получаем из выражения (15) уравнение

$$sB_0\, \overset{\circ}{\nu}_{s-1} + \left[(s+1)B_1 + A_0\right] \overset{\circ}{\nu}_s + \left[(s+2)B_2 + 1\right] \overset{\circ}{\nu}_{s+1} = 0. \tag{17}$$

Из формул (8) – (11) видно, что $\overset{\circ}{\nu}_s = \rho_s$, $\rho_0 = 1$, $\rho_{-1} = \rho_1 = 0$. Учитывая это и полагая в формуле (17) последовательно $s = 0,1,2,3$, получаем окончательные выражения для нахождения коэффициентов A_0, B_0, B_1, B_2 уравнения (12) по известным центральным пуассоновским моментам ρ_s:

$$A_0 = \frac{\rho_3\left(\rho_4 + 3\rho_2^2\right)}{D}, \qquad B_0 = -\frac{\rho_2\left(4\rho_2\rho_4 - 3\rho_3^2\right)}{D}, \; B_1 = -A_0, \; B_2 = -\frac{2\rho_2\rho_4 - 3\rho_3^2 - 6\rho_2^3}{D}, \tag{18}$$

где $D = 10\rho_4\rho_2 - 18\rho_2^3 - 12\rho_3^2$.

Формулы (18) позволяют находить пуассоновскую спектральную плотность $\overset{\circ}{k}_{\Pi}(x)$, решая уравнение (12). Для нахождения пуассоновской спектральной плотности $k_{\Pi}(x)$ можно использовать исходное уравнение (6), в котором коэффициенты a_0, b_0, b_1, b_2 необходимо выразить через пуассоновские спектральные моменты ρ_s, используя соотношения (13) и (18). Однако такой переход приводит к громоздким формулам, поэтому искомую пуассоновскую спектральную плотность $k_{\Pi}(x)$ проще получить, используя выражения (10) и (11):

$$k_{\Pi}(x) = \kappa_2 \overset{\circ}{k}_{\Pi}(x - \nu_1). \qquad (19)$$

Таким образом, получены формулы (18) и (19), позволяющие находить пуассоновскую спектральную плотность $k_{\Pi}(x)$ по известным центральным пуассоновским спектральным моментам ρ_s, $s = \overline{2,4}$. Для завершения решения поставленной задачи необходимо связать коэффициенты A_0, B_0, B_1, B_2, определенные формулами (18), с параметрами линейного случайного процесса (1).

В работе [23] показано, что пуассоновские спектральные моменты ρ_s связаны с кумулянтными коэффициентами γ_s безгранично делимых распределений следующим образом:

$$\rho_s = \kappa_2^{s/2} \sum_{k=0}^{s} C_s^k (-\gamma_3)^{s-k} \gamma_{k+2}, \qquad (20)$$

где κ_s – кумулянты порядка s,

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{\kappa_2^{s/2}}. \qquad (21)$$

Расписывая в явном виде формулу (20) для $s = \overline{2,4}$, получаем необходимые формулы

$$\rho_2 = \kappa_2 (\gamma_4 - \gamma_3^2); \quad \rho_3 = \kappa_2^{3/2} (2\gamma_3^3 - 3\gamma_3\gamma_4 + \gamma_5); \quad \rho_4 = \kappa_2^2 (6\gamma_3^2\gamma_4 - 3\gamma_3^4 - 4\gamma_3\gamma_5 + \gamma_6). \qquad (22)$$

Для рассматриваемых линейных случайных процессов (1) кумулянты κ_s легко найти, используя формулу [7]:

$$\kappa_s = \kappa_s[\eta] \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t)\,dt, \qquad (23)$$

$\kappa_s[\eta]$ – кумулянты порождающего процесса, которые равны [23]:

$$\kappa_1[\eta] = \mathbf{M}[\eta(1)], \;\; \kappa_s[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} x^{s-2} dK_{\eta}(x), \; s = 2, 3, ...$$

Полученные результаты составляют основу *метода пирсоновской аппроксимации пуассоновских спектральных плотностей* линейных случайных процессов, для реализации которого необходимо выполнить следующие этапы.

1. Найти кумулянтные коэффициенты процессов (1), используя формулы (21) и (23).
2. Вычислить пуассоновские спектральные моменты по формуле (22).
3. Получить коэффициенты дифференциального уравнения (12) по формуле (18).
4. Найти пирсоновскую пуассоновскую спектральную плотность

$$\overset{\circ}{k}_{\Pi}(x) = \overset{\circ}{K}_0 \exp\left[\overset{\circ}{u}(x)\right], \qquad (24)$$

где $\overset{\circ}{K}_0 > 0$ – постоянная, определяемая из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{k}_{П}(x)\,dx = 1, \tag{25}$$

$$\overset{\circ}{u}(x) = \int \frac{A_0 + x}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2}\,dx. \tag{26}$$

5. Получить пуассоновскую спектральную плотность $k_\xi(x)$ линейных случайных процессов (1), используя выражение

$$k_\xi(x) = k_{\Pi}(x) = \kappa_2\, \overset{\circ}{k}_{\Pi}(x - \nu_1), \tag{27}$$

в котором начальный пуассоновский спектральный момент ν_1 равен [23]:

$$\nu_1 = \kappa_2^{1/2}\gamma_3. \tag{28}$$

Пуассоновская спектральная функция $K_\xi(x)$ с использованием формулы (5) равна

$$K_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} k_\xi(x)\,dx,$$

где пуассоновская спектральная плотность $k_\xi(x)$ определена выражением (27).

Пример применения метода пирсоновской аппроксимации. Рассмотрим низкочастотный RC-фильтр, импульсная характеристика $h(t)$ которого равна

$$h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_0}}E(t), \tag{29}$$

где $A > 0$, $\tau_0 > 0$ некоторые постоянные.

Предположим, что на вход фильтра воздействует пуассоновский белый шум

$$\pi'(t) = \sum_{k=1}^{\nu_t} \eta_k \delta(t - t_k),$$

где ν_t – однородный простой процесс Пуассона с параметром λ; $\delta(t)$ – дельта-функция; t_k – случайные моменты времени, являющиеся однородным пуассоновским потоком событий; η_k – взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от t_k.

Будем считать, что случайные величины η_k имеют показательный закон распределения с параметром β.

В рассматриваемом случае отклик $\xi(t)$ фильтра равен

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\pi'(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,d\pi(\tau), \tag{30}$$

т. е. является линейным случайным процессом с ядром (29) и пуассоновским порождающим процессом

$$\pi(\tau) = \sum_{k=1}^{\nu_\tau} \eta_k E(\tau - t_k). \tag{31}$$

Найдем пуассоновскую спектральную плотность $k_\xi(x)$ процесса (30), применяя метод пирсоновской аппроксимации.

Кумулянты порождающего процесса (31) равны [24]:

$$\kappa_s[\eta] = \frac{\lambda s!}{\beta^s}. \tag{32}$$

Подставляя выражения (29) и (32) в формулу (23), находим кумулянты линейного случайного процесса (30)

$$\kappa_s = \lambda\tau_0 (s-1)!\left(\frac{A}{\beta}\right)^s . \tag{33}$$

Получим кумулянтные коэффициенты, подставляя равенство (33) в формулу (21)

$$\gamma_s = (\lambda\tau_0)^{1-s/2}(s-1)!. \tag{34}$$

Найдем центральные пуассоновские спектральные моменты, используя формулы (22), (33) и (34):

$$\rho_2 = 2\left(\frac{A}{\beta}\right)^2, \qquad \rho_3 = 4\left(\frac{A}{\beta}\right)^3, \qquad \rho_4 = 24\left(\frac{A}{\beta}\right)^4 . \tag{35}$$

Используя формулы (18) и (35), получаем параметры уравнения (12)

$$D = 144\left(\frac{A}{\beta}\right)^6, \; A_0 = -B_1 = \frac{A}{\beta}, \; B_0 = -2\left(\frac{A}{\beta}\right)^2, \; B_2 = 0 . \tag{36}$$

Найдем пирсоновскую пуассоновскую спектральную плотность $\overset{\circ}{k}_{\Pi}(x)$, используя формулы (24) – (26). Выражение (26) с учетом формулы (36) принимает вид

$$\overset{\circ}{u}(x) = \int \frac{A_0 + x}{B_0 + B_1 x}dx = \int \frac{x - B_1}{B_0 + B_1 x}dx . \tag{37}$$

Преобразуя выражение (37) к виду

$$\overset{\circ}{u}(x) = \frac{1}{B_1}\int\left(1 - \frac{B_1 + B_0/B_1}{x + B_0/B_1}\right)dx$$

и используя табличные интегралы [21], получаем

$$\overset{\circ}{u}(x) = \frac{x}{B_1} - \left(1 + \frac{B_0}{B_1^2}\right)\ln\left(x + \frac{B_0}{B_1}\right) + \text{const} . \tag{38}$$

В последнем выражении $x \in \left[-\frac{B_0}{B_1};\infty\right)$, поскольку согласно уравнению (36) $\frac{B_0}{B_1} > 0$.

Подставляя выражение (38) в формулу (24), получаем пуассоновскую спектральную плотность

$$\overset{\circ}{k}_{\Pi}(x) = \overset{\circ}{K}_0 \, e^{\frac{x}{B_1}}\left(x + \frac{B_0}{B_1}\right)^{-1-B_0/B_1^2} E\left(x + \frac{B_0}{B_1}\right). \tag{39}$$

Постоянную $\overset{\circ}{K}_0$ находим, используя формулы (25), (39) и табличные интегралы [21]:

$$\overset{\circ}{K}_0 = \frac{\exp\left(\frac{B_0}{B_1^2}\right)}{(-B_1)^{-1-\frac{B_0}{B_1^2}}\,\Gamma\left(-\frac{B_0}{B_1}\right)}, \tag{40}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Пуассоновская спектральная плотность (39) с учетом (40) принимает вид

$$\overset{\circ}{k}_{\Pi}(x)=\frac{\exp\left\{\frac{1}{B_1}\left(x+\frac{B_0}{B_1}\right)\right\}}{\left(-B_1\right)^{-1-\frac{B_0}{B_1^2}}\Gamma\left(-\frac{B_0}{B_1}\right)}\left(x+\frac{B_0}{B_1}\right)^{-1-B_0/B_1^2}E\left(x+\frac{B_0}{B_1}\right). \tag{41}$$

Подставляя параметры (36) в выражение (41) и упрощая его, получаем

$$\overset{\circ}{k}_{\Pi}(x)=\left(\frac{\beta}{A}\right)^2\left(x+2\frac{A}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{A}\left(x+2\frac{A}{\beta}\right)}E\left(x+2\frac{A}{\beta}\right). \tag{42}$$

Из формулы (33) находим кумулянт

$$\kappa_2=\lambda\tau_0\left(\frac{A}{\beta}\right)^2. \tag{43}$$

Начальный пуассоновский спектральный момент ν_1 находим, подставляя в уравнение (28) формулы (34) и (43):

$$\nu_1=2\frac{A}{\beta}. \tag{44}$$

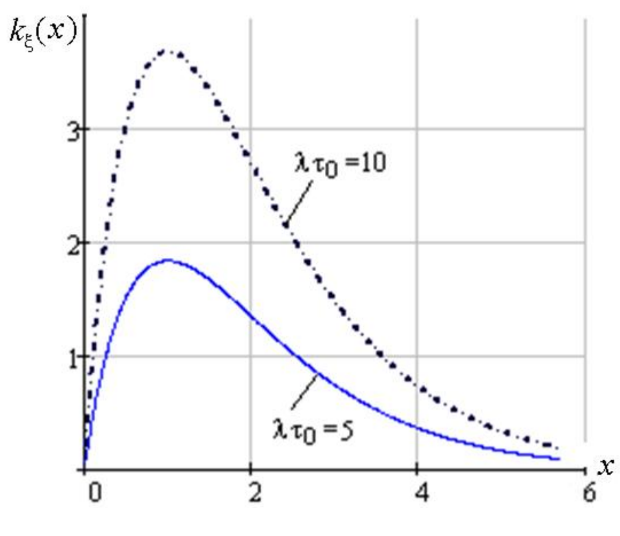
Подставляя (42) – (44) в формулу (27), получаем окончательное выражение для нахождения пуассоновской спектральной плотности $k_\xi(x)$ линейного случайного процесса (30)

$$k_\xi(x)=k_\Pi(x)=\lambda\tau_0 x e^{-\frac{\beta}{A}x}E(x). \tag{45}$$

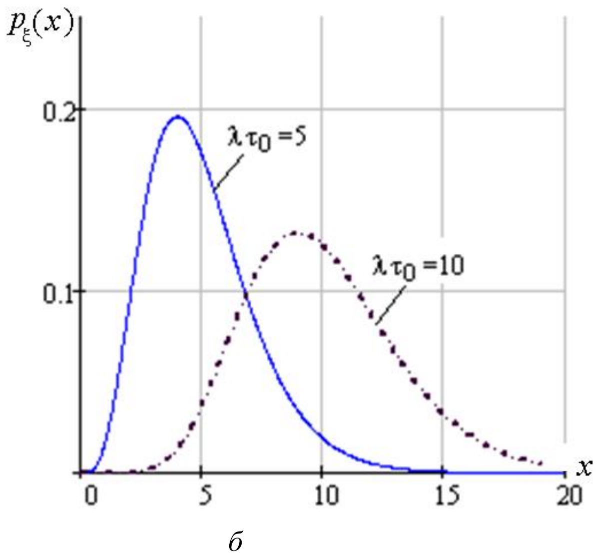
Пуассоновская спектральная плотность (45) соответствует гамма-распределению [12] с параметрами масштаба $\frac{A}{\beta}$ и формы $\lambda\tau_0$, поэтому в рассмотренной задаче можно получить точное выражение для плотности вероятностей

$$p_\xi(x)=\left(\frac{A}{\beta}\right)^{-\lambda\tau_0}\frac{1}{\Gamma(\lambda\tau_0)}x^{\lambda\tau_0-1}e^{-\frac{\beta}{A}x}. \tag{46}$$

Графики пуассоновской спектральной плотности (*а*) и плотности вероятностей (*б*) процесса (30) для разных значений параметра $\lambda\tau_0$ показаны на рисунке.



а



б

Пуассоновская спектральная плотность (*а*) и плотность вероятностей (*б*) отклика низкочастотного RC-фильтра при воздействии пуассоновского белого шума

Отметим, что формулы (45) и (46) совпадают с результатами работы [24], в которой пуассоновская спектральная плотность получена непосредственно по формулам (3) и (4).

Выводы

1. Определено семейство пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей, состоящее из 13 четырехпараметрических функций, являющихся решением дифференциального уравнения Пирсона.
2. С использованием пуассоновских спектральных моментов получены выражения, связывающие параметры пирсоновских пуассоновских спектральных плотностей с кумулянтами линейных случайных процессов.
3. Предложен метод пирсоновской аппроксимации пуассоновских спектральных плотностей линейных случайных процессов и сформулированы этапы его реализации.
4. С использованием метода пирсоновской аппроксимации найдена пуассоновская спектральная плотность отклика низкочастотного RC-фильтра при воздействии стационарного пуассоновского белого шума с показательным распределением скачков.

Список литературы

1. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований / А. Н. Малахов. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
2. *Чабдаров Ш. М.* Основы статистической теории радиосвязи. Полигауссовы модели и методы: учеб. пособие / Ш. М. Чабдаров, Н. З. Сафиуллин, А. Ю. Феоктистов. – Казань: Казан. авиац. ин-т им. Туполева, 1983. – 87 с.
3. *Пугачев В. С.* Стохастические дифференциальные системы / В. С Пугачев, И. Н. Синицын. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. *Шелухин О. И.* Негауссовские процессы в радиотехнике / О. И. Шелухин. – М.: Радио и связь, 1999. – 287 с.
5. *Кунченко Ю. П.* Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. 1. Стохастические полиномы, их свойства и применения для нахождения оценок параметров. / Ю. П. Кунченко. – Черкассы: ЧИТИ, 2001. – 133 с.
6. *Кузнецов В. В.* Математическое моделирование негауссовских случайных процессов на основе моментных функций высших порядков: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.13.18 / Самар. гос. техн. ун-т. / В. В. Кузнецов. – Самара, 2010. – 20 с.
7. *Марченко Б. Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике / Б. Г. Марченко. – К.: Наук. думка, 1973. – 192 с.
8. *Марченко Б. Г.* Линейные случайные процессы и их приложения / Б. Г. Марченко, Л. Н. Щербак. – К.: Наук. думка, 1975. – 144 с.
9. *Марченко Б. Г.* Вероятностные модели случайных сигналов и полей в прикладной статистической радиофизике / Б. Г. Марченко, В. А. Омельченко. – К.: УМК ВО, 1988. – 176 с.
10. *Горовецкая Т. А.* Модели и законы распределения флуктуационных сигналов / Т. А. Горовецкая, А. И. Красильников, Х. Д. Чан // Электроника и связь. – 2000. – № 9. – С. 5–14.
11. *Красильников А. И.* Исследование импульсных гидроакустических сигналов методом характеристических функций: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.06 / А. И. Красильников – К., 1982. – 171 с.
12. *Лукач Е.* Характеристические функции: пер. с англ. / Е. Лукач. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
13. *Красильников А. И.* Особенности вычисления спектральной функции скачков линейных случайных процессов / А. И. Красильников // Электроакустика и звукотехника. – 1987. – Вып. 11.– С. 29–32.

14. *Красильников А. И.* Метод пуассоновских спектров и его применение / А. И. Красильников // Акустичний симпозіум «Консонанс-2003»: зб. праць Київ. ін-ту гідромеханіки НАН України. – 2003. – С. 95–100.
15. *Красильников А. И.* Некоторые свойства пуассоновской спектральной функции Колмогорова линейных случайных процессов / А. И. Красильников // Электроника и связь. – 2005. – № 26. – С. 17–22.
16. *Красильников А. И.* Формула прямоугольников для численного нахождения пуассоновской спектральной функции флуктуационных сигналов / А. И. Красильников, О. Ю. Савчук // Электроника и связь. – 2002. – № 17. – С. 83–88.
17. *Данилов В. А.* Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби / В. А. Данилов, А. Н. Иванова, Е. К. Исакова и др. – М.: Физматлит, 1961. – 440 с.
18. *Кендалл М.* Теория распределений / М. Кендалл, А. Стьюарт / пер. с англ. В. В. Сазонова, А. Н. Ширяева; под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
19. *Тихонов В. И.* Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
20. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
21. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 119 с.
22. *Марченко В. Б.* Ортогональные функции дискретного аргумента и их применение в геофизике / В. Б. Марченко. – К.: Наук. думка, 1992. – 210 с.
23. *Красильников А. И.* Пуассоновские моменты безгранично делимых распределений / А. И. Красильников // Электроника и связь. – 2002. – № 15. – С.84 – 89.
24. *Горовецкая Т. А.* Вероятностные характеристики кавитационного шума / Т. А. Горовецкая, А. И. Красильников, Б. В. Тимофеенко // Электроника и связь. – 2001. – № 11. – С. 91–94.

О. В. Гармаш, О. І. Красильніков

Застосування функцій Пірсона для апроксимації пуассонівської спектральної щільності Колмогорова лінійних випадкових процесів

Визначено сім’ю пірсонівських пуасонівських спектральних щільностей, які є розв’язком диференціального рівняння Пірсона. Обґрунтовано метод пірсонівської апроксимації пуасонівських спектральних щільностей лінійних випадкових процесів. З використанням запропонованого методу отримано закон розподілу відгуку низькочастотного RC-фільтра на вплив пуасонівського білого шуму з показниковим розподілом стрибків.

O. V. Garmash, A. I. Krasilnikov

The application of Pearson functions for approximation of Poisson spectral Kolmogorov's density of the linear stochastic processes

A family of Pearson’s Poisson spectral densities, which are solutions of differential Pearson equations defined. The method of Pearson's approximation of Poisson spectral densities of linear stochastic processes justified. By using the proposed method obtained the distribution of low-frequency RC-filter response on the impact of the Poisson white noise with exponential distribution of jumps.