УДК 519.87(045)

[1]**А. Б. Горкуненко,**
[2]**С. А. Лупенко,** д-р. техн. наук,
[3]**Н. Р. Дем'янчук,**
[4]**Я. В. Литвиненко,** канд. техн. наук

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЦИКЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ВЕКТОРА ЦИКЛІЧНИХ РИТМІЧНО ПОВ'ЯЗАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя, e-mail:
[1]horkunenko@gmail.com, [2]lupenko@ua.fm, [3]dnr2@rambler.ru, [4]lytvynenko@tstu.edu.ua

Розглянуто метод комп'ютерного імітаційного моделювання взаємопов'язаних економічних циклічних процесів на базі їх моделі у вигляді вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів.

Ключові слова: економічні циклічні процеси, імітаційне моделювання, вектор циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, циклічний випадковий процесс.

Вступ і постановка завдання. Для проектування, створення і тестування автоматизованих інформаційних систем оброблення економічних даних, що відображають перебіг певних економічних процесів, зокрема економічних циклічних процесів, ефективним є застосування методів комп'ютерного імітаційного моделювання. Важливим етапом розроблення методів та програмних засобів імітації циклічних економічних процесів, зокрема взаємопов'язаних економічних циклічних процесів (ВЕЦП), є розроблення адекватної їм математичної моделі. У багатьох працях, присвячених математичному моделюванню циклічних економічних процесів, зокрема у працях [1 – 3], застосовуються моделі циклічних економічних процесів, що ґрунтуються на гіпотезі про їх стохастичну періодичність. Однак таке припущення не цілком відповідає дійсності, оскільки багато циклічних економічних процесів характеризуються наявністю варіації тривалостей їх циклів. Тому у працях [4 – 6] запропоновано підхід до аналізу ВЕЦП на базі математичної моделі у виглядів циклічного випадкового процесу та вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, у яких на відміну від існуючих їх моделей, одночасно враховуються стохастичність, циклічність, мінливість та спільність ритму компонент ВЕЦП.

У цій роботі розглядається метод комп'ютерного імітаційного моделювання ВЕЦП, на основі їх моделі у вигляді вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, що дає змогу виконувати імітаційне моделювання як одного економічного процесу, так і декількох пов'язаних циклічних економічних процесів, які характеризуються спільним ритмом.

Математична модель взаємопов'язаних економічних циклічних процесів. Згідно із працею [6] сукупність із N взаємопов'язаних циклічних економічних процесів у математичному сенсі трактується як вектор випадкових процесів $\mathbf{Y}_N(\omega,t) = \left\{ y_i(\omega,t), i=\overline{1,N}, \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W} \right\}$, кожну компоненту якого можна подати у вигляді такої суми:

$$y_i(\omega,t) = f_i(t) + \xi_i(\omega,t), i=\overline{1,N}, \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}, \quad (1)$$

де $\left\{ f_i(t), i=\overline{1,N}, t \in \mathbf{W} \right\}$ – сукупність трендових складових, а вектор випадкових процесів $\mathbf{\Theta}_N(\omega,t) = \left\{ \xi_i(\omega,t), i=\overline{1,N}, \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W} \right\}$ є вектором циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів.

Означення 1. Вектор $\mathbf{\Theta}_N(\omega,t)$ циклічних випадкових процесів $\{\xi_i(\omega,t), i=\overline{1,N}, \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ будемо називати вектором циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, а самі циклічні процеси – ритмічно пов'язаними, якщо існує така функція $T(t,n)$, яка задовольняє умови функції ритму, що скінченновимірні вектори $\{\xi_{i_1}(\omega,t_1),\ \xi_{i_2}(\omega,t_2),\ ...,\ \xi_{i_k}(\omega,t_k)\}$ та $\{\xi_{i_1}(\omega,t_1+T(t_1,n)),\xi_{i_2}(\omega,t_2+T(t_2,n)),...,\xi_{i_k}(\omega,t_k+T(t_k,n))\}$ $n\in\mathbf{Z}, i_1,...,i_k = =\overline{1,N}$, де $\{t_1,...,t_k\}$ – множина сепарабельності вектора $\mathbf{\Theta}_N(\omega,t)$ за всіх цілих $k\in\mathbf{N}$ є стохастично еквівалентними у широкому розумінні.

Областю визначення $\mathbf{W}$ вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів може бути або впорядкована дискретна $\mathbf{W}=\mathbf{D}=\{t_{ml}\in\mathbf{R}, m\in\mathbf{Z}, l=\overline{1,L}\}$ або неперервна $\mathbf{W}=\mathbf{R}$ множина дійсних чисел. У випадку дискретності області визначення $\mathbf{W}=\mathbf{D}$ для її елементів характерний такий тип лінійного упорядкування: $t_{m_1l_1}<t_{m_2l_2}$, якщо $m_2>m_1$, або якщо $m_2=m_1$, а $l_2>l_1$, в інших випадках $t_{m_1l_1}>t_{m_2l_2}$; $m_1,m_2\in\mathbf{Z}$, $l_1,l_2\in\overline{1,L}$. Причому $0<t_{m,l+1}-t_{m,l}<\infty$.

Функція ритму $T(t,n)$ визначає закон зміни часових інтервалів між однофазними значеннями вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів. Функція ритму задовольняє такі умови:

$$\begin{aligned} &T(t,n)>0,\ \text{якщо } n>0;\ T(t,1)<\infty;\\ &T(t,n)=0,\ \text{якщо } n=0;\\ &T(t,n)<0,\ \text{якщо } n<0;\ t\in\mathbf{W}. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Для будь-яких $t_1\in\mathbf{W}$ і $t_2\in\mathbf{W}$, для яких $t_1<t_2$, для функції $T(t,n)$ виконується строга нерівність:

$$T(t_1,n)+t_1<T(t_2,n)+t_2, \forall n\in\mathbf{Z}. \tag{2}$$

2. Функція $T(t,n)$ є найменшою за модулем $(|T(t,n)|\le|T_\gamma(t,n)|)$ серед усіх таких функцій $\{T_\gamma(t,n),\gamma\in\mathbf{\Gamma}\}$, які задовольняють умови (1) та (2).

В окремому випадку, якщо функція ритму $T(t,n)=nT(T=\text{const}>0, n\in\mathbf{Z})$, то вектор $\mathbf{\Theta}_N(\omega,t)$ є вектором T – періодично пов'язаних випадкових процесів.

Для сумісної k-вимірної функції розподілу вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів справджується

$$F_{k_{\xi_{i_1}...\xi_{i_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)=$$
$$F_{k_{\xi_{i_1}...\xi_{i_k}}}(x_1,...,x_k;t_1+T(t_1,n),...,t_k+T(t_k,n)), n\in\mathbf{Z}, i_1,...,i_k=\overline{1,N}, t_1,...,t_k\in\mathbf{W}.$$

Змішана центральна моментна функція порядку $p=\sum_{j=1}^{k}R_j$:

$$r_{p_{\xi_{i_1}...\xi_{i_k}}}(t_1,...,t_k)=\mathbf{M}\left\{\left(\xi_{i_1}(\omega,t_1)-m_{\xi_{i_1}}(t_1)\right)^{R_1}\cdot...\cdot\left(\xi_{i_p}(\omega,t_k)-m_{\xi_{i_k}}(t_k)\right)^{R_k}\right\}=$$
$$r_{p_{\xi_{i_1}...\xi_{i_k}}}(t_1+T(t_1,n),...,t_k+T(t_k,n)), t_1,...,t_k\in\mathbf{W}, t_1,...,t_k\in\mathbf{W}, i_1,...,i_k=\overline{1,N}, n\in\mathbf{Z}.$$

Сумісне статистичне оброблдення сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів. Статистична оцінка

$$\hat{c}_{p_{\xi_1\ldots\xi_{i_k}}}\left(t_1,\ldots,t_k\right)=\frac{1}{M-M_1+1}\cdot\sum_{n=0}^{M-M_1}\left[\xi_{i_{1_\omega}}{}^{R_1}\left(t_1+T\left(t_1,n\right)\right)\cdot\ldots\cdot\xi_{i_{k_\omega}}{}^{R_k}\left(t_k+T\left(t_k,n\right)\right)\right],$$

$$t_1\in\mathbf{W}_{c_1},t_2,\ldots,t_k\in\bigcup_{m=1}^{M_1}\mathbf{W}_{c_m},i_1,\ldots,i_k=\overline{1,N},$$

збігається у середньоквадратичному сенсі до змішаної початкової моментної функції порядку $p=\sum_{j=1}^{k}R_j$ ВЕЦП, а статистична оцінка:

$$\hat{r}_{p_{\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}}}(t_1,\ldots,t_k)=\frac{1}{M-M_1}\sum_{n=0}^{M-M_1}\left(\xi_{i_{1_\omega}}{}^{R_1}\left(t_1+T\left(t_1,n\right)\right)-\hat{m}_{\xi_{i_1}}\left(t_1+T\left(t_1,n\right)\right)\right)^{R_1}\times\ldots\times$$

$$\times\left(\xi_{i_{k_\omega}}{}^{R_k}\left(t_k+T\left(t_k,n\right)\right)-\hat{m}_{\xi_{i_k}}\left(t_k+T\left(t_k,n\right)\right)\right)^{R_k},t_1\in\mathbf{W}_{c_1},t_2,\ldots,t_k\in\bigcup_{m=1}^{M_1}\mathbf{W}_{c_m},i_1,\ldots,i_k=\overline{1,N}$$

збігається у середньоквадратичному сенсі до змішаної центральної моментної функції порядку $p=\sum_{j=1}^{k}R_j$ ВЕЦП.

Метод імітаційного моделювання взаємопов'язаних економічних циклічних процесів. Метод імітаційного моделювання взаємопов'язаних економічних циклічних процесів ґрунтується на формулі (1), а саме: полягає в імітації трендових компонент $\{f_i(t),i=\overline{1,N}\}$ та компонент вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\{\xi_i(\omega,t),i=1,N\}$. Згідно із роботою [7] метод імітаційного моделювання вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\left\{\xi_i\left(\omega,t,\right),i=\overline{1,N},\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}\right\}$ із послідовності стохастично еквівалентних базових циклів $\left\{g_{i,m}\left(\omega,t_0\right),\omega\in\mathbf{\Omega},t_0\in\mathbf{W}_{c_0},m\in\mathbf{Z},i=\overline{1,N}\right\}$ грунтується на зображенні випадкового вектора

$$\left\{\left(t,\xi_i(\omega,t)\right),t\in\mathbf{W}\right\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\left\{\left(t,\xi_{i,m}\left(\omega,t\right)\right),t\in\mathbf{W}_{c_m}\right\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\left\{\left(y_m\left(t_0\right),g_{i,m}\left(\omega,t_0\right)\right),t_0\in\mathbf{W}_{c_0}\right\},i=\overline{1,N}$$

і полягає у виконанні таких етапів.

1. Визначають імовірнісні характеристики базових циклів $\left\{g_{i,m}\left(\omega,t_0\right),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t_0\in\mathbf{W}_{c_0},\right.$ $\left.m\in\mathbf{Z},i=\overline{1,N}\right\}$ через відповідні ймовірнісні характеристики вектора циклічних випадкових процесів $\left\{\xi_i\left(\omega,t,\right),i=\overline{1,N},\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}\right\}$.

2. Використовуючи відомі алгоритми імітаційного моделювання множини базових циклів, отримують реалізації $\left\{g_{i,m_\omega}\left(t_0\right),t_0\in\mathbf{W}_{c_0},m\in\mathbf{Z},i=\overline{1,N}\right\}$ базових циклів $\left\{g_{i,m}\left(\omega,t_0\right)\right\}$.

3. Використовуючи формулу

$$y_m\left(t_0\right)=t_0+T\left(t_0,m\right)\in\mathbf{W}_{c_m},t_0\in\mathbf{W}_{c_0},m\in\mathbf{Z},$$

віднаходять множину функцій перетворення шкали $\left\{y_m\left(t_0\right)\in\mathbf{W}_{c_m},m\in\mathbf{Z}\right\}$ операторів перетворення шкали $\left\{\mathbf{G}_{y_m(t_0)}\left[\cdot\right],m\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. Застосовуючи множину операторів перетворення шкали $\left\{\mathbf{G}_{y_m(t_0)}[\cdot],\ m\in\mathbf{Z}\right\}$ до реалізацій $\left\{g_{i,m_\omega}(t_0), t_0\in\mathbf{W}_{c_0}, m\in\mathbf{Z}, i=\overline{1,N}\right\}$ базових циклів $\left\{g_{i,m}(\omega,t_0)\right\}$, моделюють реалізації випадкових векторів $\left\{\xi_{i,m}(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}_{c_m}, m\in\mathbf{Z}, i=\overline{1,N}\right\}$, а саме:

$$\xi_{i,m_\omega}\left(y_m(t_0)\right)=g_{i,m_\omega}(t_0), t_0\in\mathbf{W}_{c_0}.$$

5. Формують реалізацію циклічного випадкового вектора $\left\{\xi_i(\omega,t), i=\right.$ $\left.=\overline{1,N}, \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\right\}$, а саме:

$$\left\{\left(t,\xi_{i_\omega}(t)\right), t\in\mathbf{W}\right\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\left\{\left(t,\xi_{i,m_\omega}(t)\right), t\in\mathbf{W}_{c_m}\right\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\left\{\left(y_m(t_0), g_{i,m_\omega}(t_0)\right), t_0\in\mathbf{W}_{c_0}\right\}.$$

Застосуємо наведений вище метод імітаційного моделювання вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів для імітаційного моделювання ВЕЦП. Для спрощення будемо вважати базові цикли стохастично незалежними, а функцію ритму $T(t,n)$ кусково-лінійною, тобто:

$$T(t_0,m)=(\alpha_m-1)\cdot t_0+s_m, t_0\in\mathbf{W}_{c_0}, m\in\mathbf{Z}.$$

У цьому разі функції перетворення шкали $\left\{y_m(t_0)\in\mathbf{W}_{c_m}, m\in\mathbf{Z}\right\}$ є лінійними функціями, а саме:

$$y_m(t_0)=\alpha_m t_0+s_m, t_0\in\mathbf{W}_{c_0}, m\in\mathbf{Z},$$

де $\left\{\alpha_m>0, m\in\mathbf{Z}\right\}$ – множина масштабних коефіцієнтів; $\left\{s_m, m\in\mathbf{Z}\right\}$ – множина зсувних коефіцієнтів, які підбирають таким чином, щоб сукупність областей $\left\{\mathbf{W}_{c_m}, m\in\mathbf{Z}\right\}$, які є областями значень функцій $\left\{y_m(t_0), t_0\in\mathbf{W}_{c_0}, m\in\mathbf{Z}\right\}$, утворювали розбиття множини $\mathbf{W}$.

Вхідна інформація для моделювання незалежних економічних процесів. Оцінки математичних сподівань, дисперсій, функції ритму і трендових кривих циклічних компонент економічних процесів, які використовувались як вхідні дані для імітаційного моделювання незалежних економічних циклічних процесів, показано на рис. 1.

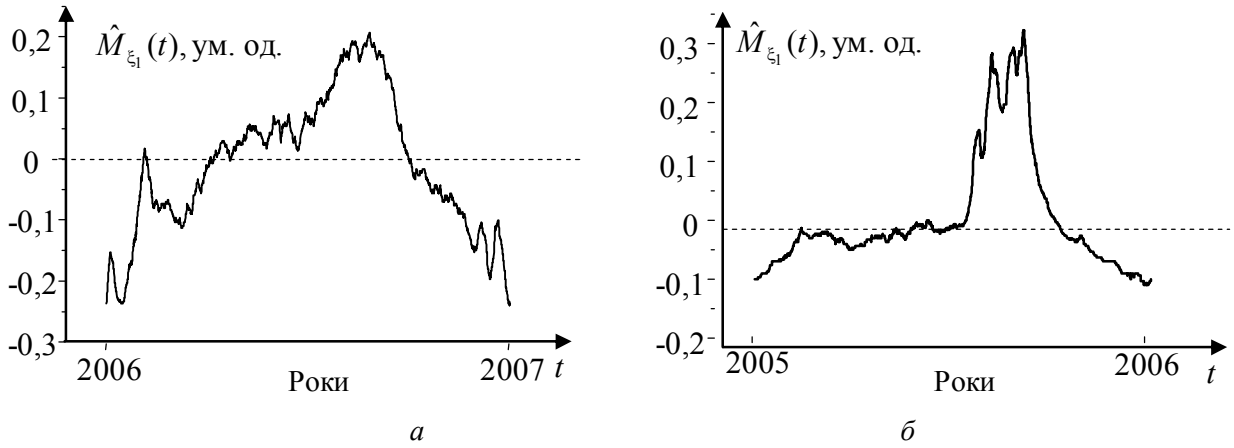

Рис. 1. Оцінки математичних сподівань циклічних компонент економічних циклічних процесів: *а* – індекс активності автофінансування США; *б* – індекс комп'ютерних та електронних показників США; оцінки дисперсій: *в* – індекс активності автофінансування США; *г* – індекс комп'ютерних та електронних показників США; функції ритму: *д* – індекс активності автофінансування США; *е* – індекс комп'ютерних та електронних показників США; трендові криві: *ж* – індекс активності автофінансування США; *к* – індекс комп'ютерних та електронних показників США

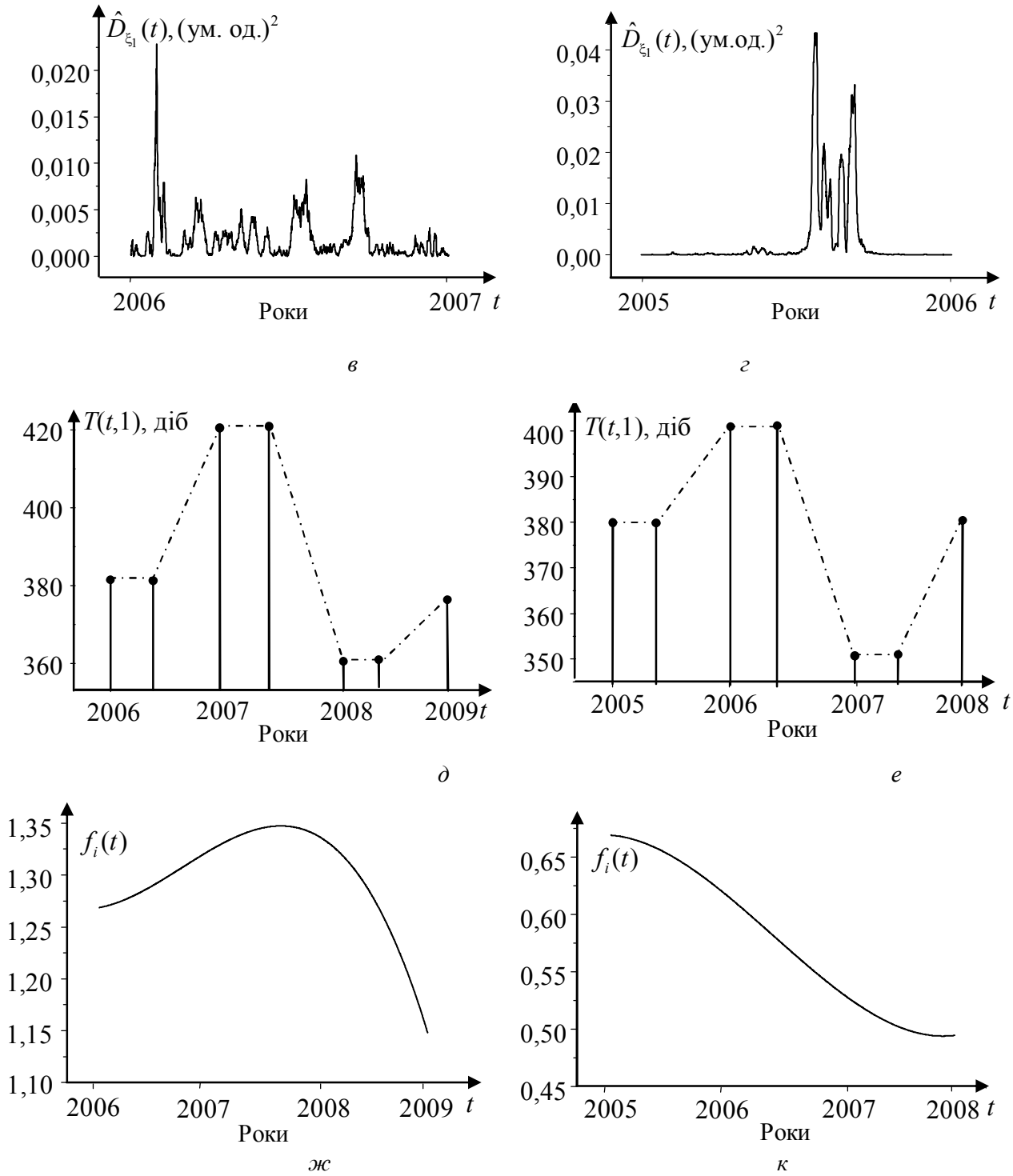

Рис. 1. Закінчення. (Див. також с. 136)

Результати моделювання незалежних економічних циклічних процесів. На рис. 2 подано приклади моделювання незалежних економічних циклічних процесів (*а*, *б*, *в*, *г*), також подано довірчі інтервали (*д*, *ж*), що з довірчою ймовірністю 0,9997 накривають циклічні компоненти змодельованих економічних процесів.

Вхідна інформація для моделювання взаємозалежних економічних циклічних процесів. На рис. 3 подано оцінки математичних сподівань, дисперсій, функції ритму, трендових кривих циклічних компонент економічних процесів, які використовувались як вхідні дані для імітаційного моделювання взаємозалежних економічних циклічних процесів.

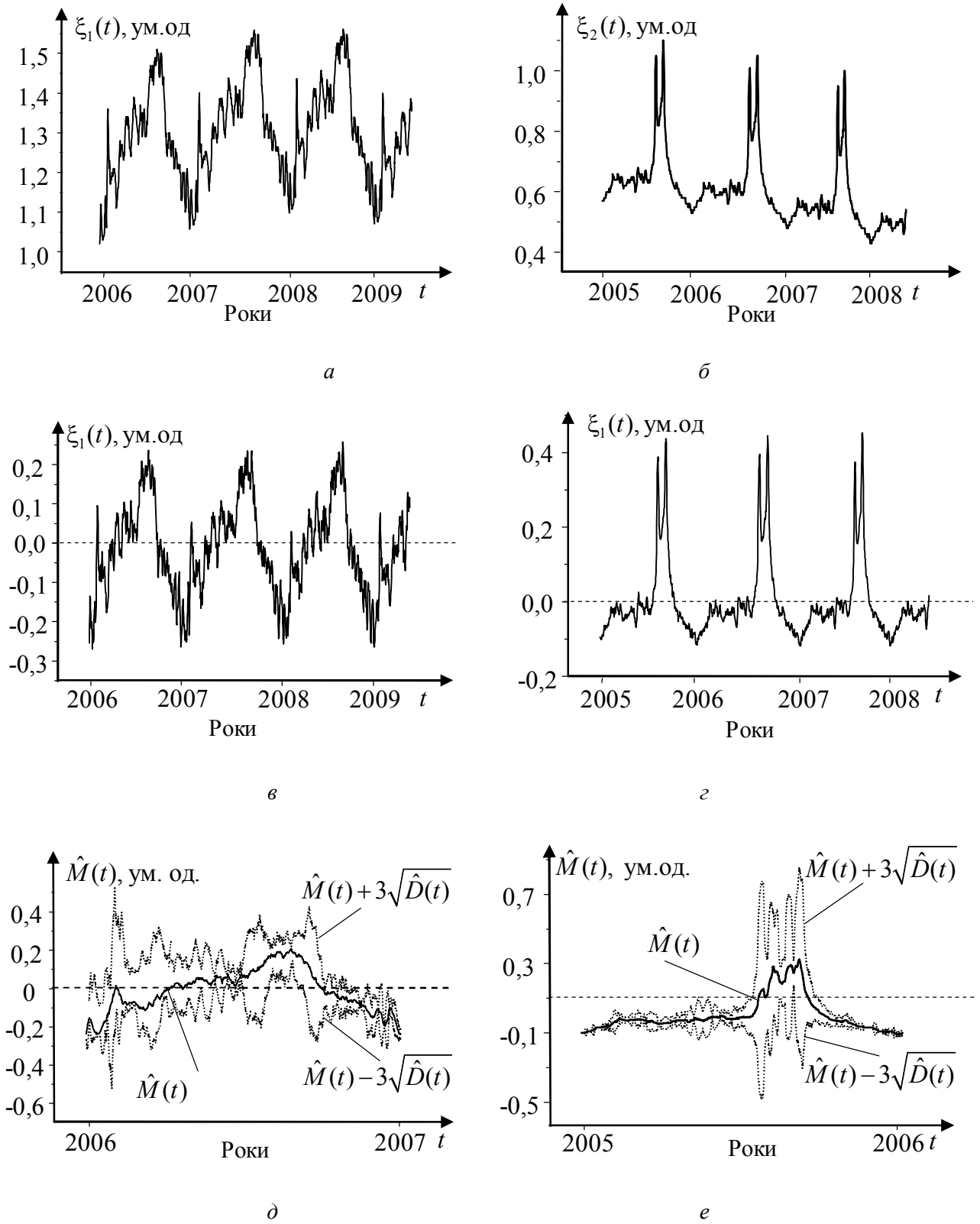

Рис. 2. Результати імітаційного моделювання незалежних економічних циклічних процесів: змодельовані сигнали з трендовою кривою: *а* – індекс активності автофінансування США; *б* – індекс комп'ютерних та електронних показників США; змодельовані циклічні компоненти: *в* – індекс активності автофінансування США; *г* – змодельована трендова крива індексу комп'ютерних та електронних показників США; довірчі інтервали: *д* – індекс активності автофінансування США; *е* – індекс комп'ютерних та електронних показників США

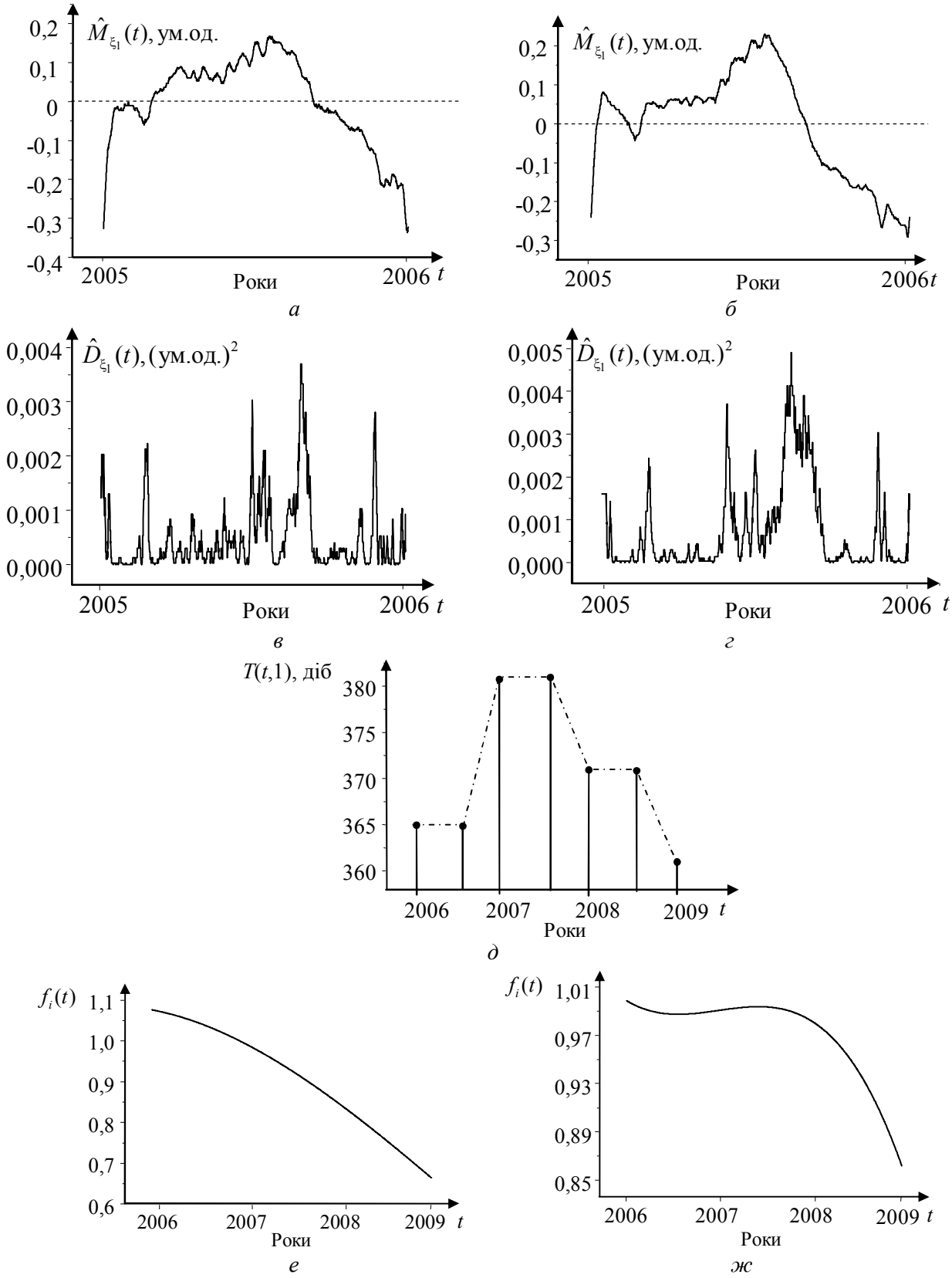

Рис. 3. Оцінки математичних сподівань циклічних компонент економічних циклічних процесів: *а* – індекс активності нерухомого майна США; *б* – індекс активності рентного доходу США; оцінки дисперсій: *в* – індекс активності нерухомого майна США; *г* – індекс активності рентного доходу США; спільна функція ритму: *д* – індекс активності нерухомого майна США та індекс активності рентного доходу США; трендові криві: *е* – індекс активності нерухомого майна США; *ж* – індекс активності рентного доходу США

Результати моделювання взаємопов'язаних економічних циклічних процесів. На рис. 4 подано приклади моделювання взаємопов'язаних економічних циклічних процесів (*а*, *б*, *в*, *г*) зі спільною функцію ритму, також подано довірчі інтервали (*д*, *е*), що з довірчою імовірністю 0,9997 накривають циклічні компоненти змодельованих взаємопов'язаних економічних процесів.

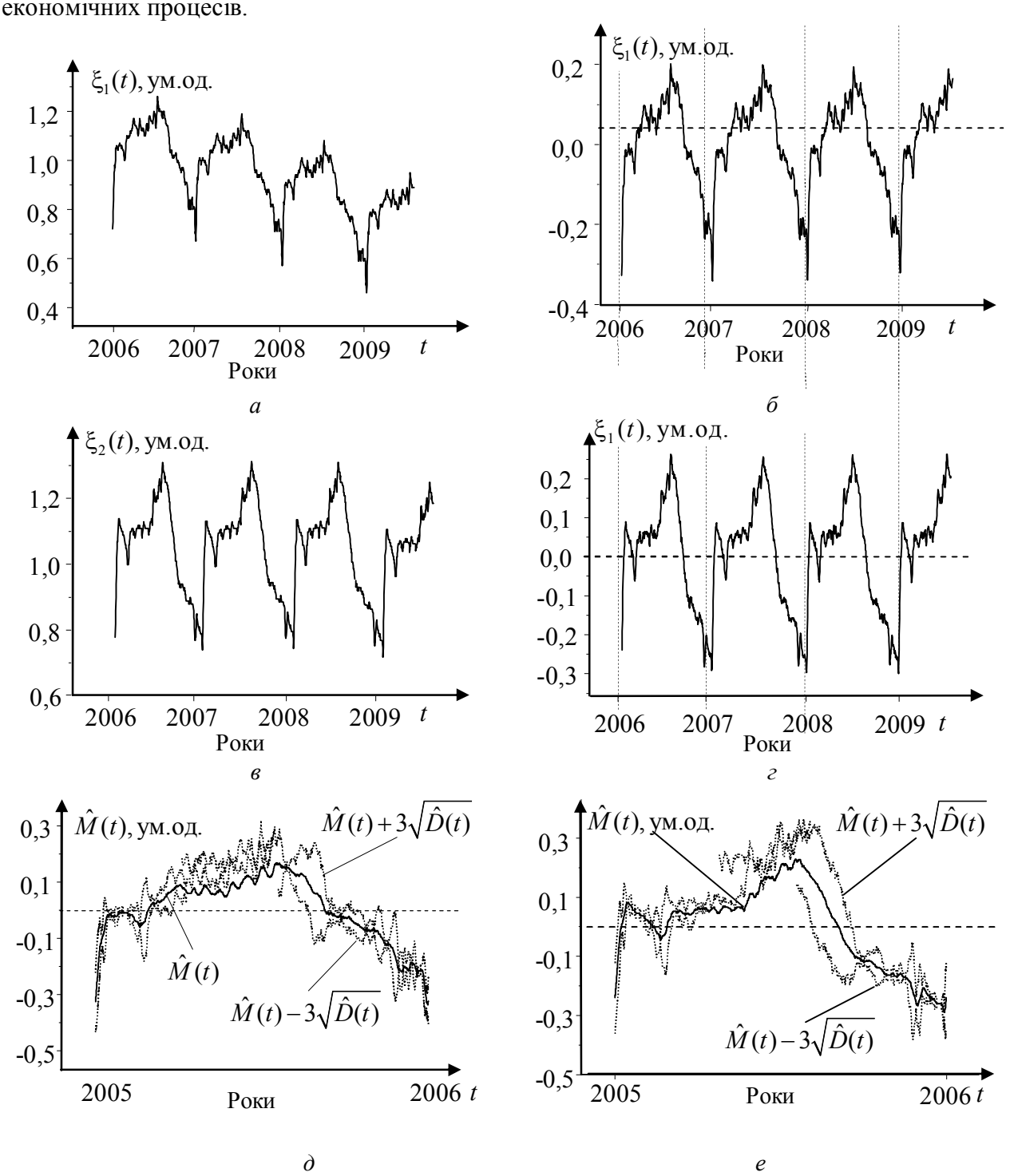

Рис. 4. Результати імітаційного моделювання ВЕЦП: *а* – сигнал з трендовою кривою – індекс активності нерухомого майна США; *б* – циклічна компонента – індекс активності нерухомого майна США; *в* – сигнал з трендовою кривою – індекс активності рентного доходу США; *г* – циклічна компонента – індекс активності рентного доходу США; довірчі інтервали: *д* – індекс активності нерухомого майна США; *е* – циклічна компонента – індекс активності нерухомого майна США

Метод імітаційного моделювання ВЕЦП було втілено в програмний комплекс для оброблення та імітаційного моделювання економічних циклічних процесів, який може використовуватись як складова частина спеціалізованого програмного забезпечення автоматизованої інформаційної системи аналізу, прогнозу та імітації економічних циклічних процесів на базі ЕОМ.

Висновки. Обґрунтовано метод імітаційного моделювання ВЕЦП, який враховує їх стохастичність, циклічність, мінливість, спільність ритму та трендові складові. Цей метод може бути використаний для формування тестових сигналів під час дослідження (тестування) алгоритмів оброблення економічних циклічних процесів у сучасних системах обробки економічних даних.

Список літератури

1. *Ghysels E.* On the periodic structure of the busness cycle / E. Ghysels // Cowles Foundation, Yale Universiti. – 1992. – N 1028.
2. *Ghysels E.* On periodic structures and testing for seasonal unit roots / E. Ghysels, A. Hall, H. S. Lee // Journal of the American Statistical Association 91. – 1996. – P. 1551–1559.
3. *Gardner W. A.* Cyclostationarity: Half a century of research / W. A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura // Signal Processing. – 2005. – № 86 (2006). – P. 639 – 697.
4. *Лупенко С.* Математичне моделювання циклічних економічних явищ на базі циклічного випадкового процесу для задач їх автоматизованого аналізу та прогнозу / С. Лупенко, А. Горкуненко: матеріали всеукр. наук. конф. Терноп. держ. техн. ун-ту ім. Івана Пулюя (Тернопіль, 13–14 трав. 2009). – Тернопіль, 2009. – 122 с.
5. *Горкуненко А. Б.* Математичне моделювання економічних циклічних процесів для їх автоматизованого аналізу та прогнозу // А. Б. Горкуненко, С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. – 2010. – № 3. – С. 269 – 275.
6. *Горкуненко А. Б.* Математичне моделювання та статистичний сумісний аналіз взаємопов'язаних економічних циклічних процесів // А. Б. Горкуненко, А. М. Луцків, С. А. Лупенко // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. – 2011. – №1. – С. 137 – 143.
7. *Литвиненко Я. В.* Імітаційне моделювання синхронно зареєстрованих сигналів серця на основі вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів у задачах кардіодіагностики / Я. В. Литвиненко, С. А. Лупенко, Н. Р. Дем'янчук, А. С. Сверстюк // Електроніка та системи управління – К.: НАУ – 2009. – № 4 (22). – С. 141 – 148.

А. Б. Горкуненко, С. А. Лупенко, Н. Р. Дем'янчук, Я. В. Литвиненко

Имитационное моделирование взаимосвязаних экономических циклических процессов на базе вектора циклических ритмически связанных случайних процессов

Рассмотрен метод компьютерного имитационного моделирования взаимосвязанных экономических циклических процессов на базе их модели в виде вектора циклических ритмически связанных случайных процессов.

A. B. Horkunenko, S. A. Lupenko, N. R. Demyanchuk, Ya.V. Lytvynenko

Imitational modeling of interrelated economical cyclic processes on the basis of the vector of rhythmically related cyclic probability processes

This paper is regarded to the method of computer simulation of interrelated economical cyclic processes, which is based on their vector of cyclic rhythmically related probability processes.