УДК 681.3: 004.451.45(045)

Е. В. Киркач, асп.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ

Институт аэрокосмических систем управления НАУ, e-mail: kyrkach@voliacable.com

Рассмотрено применение операционного метода неклассического типа к аппроксимационному решению нелинейных дифференциальных уравнений целого и дробного порядков. Представлены программы и результаты вычислительных экспериментов в среде системы Mathematica.

Ключевые слова: аппроксимация, операционное исчисление, нелинейная динамическая система.

Введение. Существующие операционные методы анализа, такие как преобразования Лапласа и Фурье, предназначены для исследования линейных динамических систем. Кроме того, в последнее время значительно возрос интерес к исследованию динамических систем дробного порядка. В большинстве случаев трудно найти решения нелинейных дифференциальных уравнений целого и дробного порядков, особенно аналитически.

В этой работе предложен метод нахождения аппроксимационного решения нелинейных дифференциальных уравнений целого и дробного порядков на основе операционного метода неклассического типа.

Постановка задачи. Применение операционных методов для анализа динамических систем позволяют алгебраизировать дифференциальные уравнения, которыми описываются динамические системы. Операционные исчисления неклассического типа (S-преобразования) порождаются при использовании методов полиномиальных аппроксимаций [1]. В основу метода полиномиальной аппроксимации положено представление сигнала на конечном интервале изменения аргумента обобщенным полиномом по некоторой системе линейно-независимых базисных функций.

Применяя неклассическое операционное исчисление к линейным дифференциальным уравнениям, получаем систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме, которая легко решается при помощи правил матричной алгебры. В результате получаем значение коэффициентов аппроксимирующего полиномиального спектра и, используя обратное преобразование, находим аппроксимационное решение уравнения.

Алгоритм решения нелинейных дифференциальных уравнений операционным методом неклассического типа рассмотрим на примере нелинейного дифференциального уравнения с производной по Капуто. Производная нецелого порядка по Капуто определяется выражением [2]

$$ {}_{C}D^{\beta}_{a,t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau , \tag{1}$$

где β – порядок производной; Γ – гамма-функция. Наличие в уравнении производной по Капуто позволяет учитывать начальные условия.

Рассмотрим несколько иллюстративных примеров.

Пример 1. Возьмем нелинейное дифференциальное уравнение с производной по Капуто, которое имеет точное решение: ${}_{C}D^{1,5} y(t) + y^2(t) = f(t)$, $y_0 = y'_0 = 0$, где $f(t) = 9,02704t^{1,5} - 21,6649t^{2,5} + 10,3166t^{3,5} + \left(2t^3 - 3t^4 + t^5\right)$. Точное решение уравнения имеет вид: $y(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3$.

Используя определение производной Капуто (1), получим преобразованное уравнение

$$J^{0,5}(y''(t)) + y^2(t) = f(t).$$

Заменяем вторую производную искомой функции новой функцией:

$$y''(t) = u(t),\ y'(t) = y_0' + \int_0^t u(\tau)d\tau,\ y(t) = y_0 + y_0't + \int_0^t\int_0^t u(\tau)d\tau^2. \qquad (2)$$

Подставив уравнение (3) в (2), получим выражение

$$J^{0,5}u(t) + \left(\int_0^t\int_0^t u(\tau)d\tau^2 + y_0 + y_0't\right)^2 = f(t).$$

Применяя к уравнениям (3) и (4) *S*-преобразование, перейдем в операционное пространство:

$$\mathbf{P}^{0,5}\cdot\vec{\mathbf{U}} + \left(\mathbf{P^2}\cdot\vec{\mathbf{U}} + y_0\vec{\mathbf{1}} + y_0'\vec{\mathbf{t}}\right)^2 = \vec{\mathbf{F}}, \qquad (3)$$

где $\vec{\mathbf{F}}$ – изображение правой части уравнения.

Далее вычисляем матрицы интегрирования порядков 0,5 и 2, а искомую функцию записываем в явном виде, т. е. в виде вектора неизвестных коэффициентов $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$.

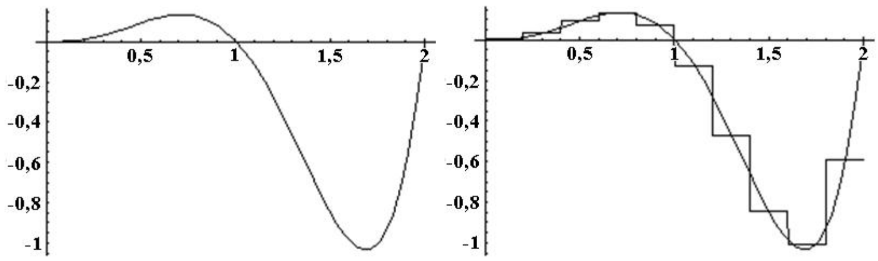
Подставляя вектор коэффициентов в уравнение (3), перемножая его с найденными матрицами интегрирования и складывая полученные вектора, получаем систему нелинейных уравнений.

Найдя корни системы нелинейных уравнений методом Ньютона, с помощью уравнений (2) находим изображения искомой функции и, применяя обратное операционное преобразование, получаем аппроксимационное решение нелинейного дифференциального уравнения. Следует отметить, что из всех корней системы нелинейных уравнений необходимо брать только действительные корни.

Вычислительные эксперименты. Ниже без комментариев приведена программа рассмотренного метода в программной среде системы Mathematica. Решение рассматривается на интервале $0 \le t \le 2$. Точное решение уравнения показано на рис. 1. В качестве базисных функций используется локальные базисные системы на основе смещенных полиномов Лежандра нулевого порядка.

```
In[4]:= m = 10; h = 2 / 10; a := 0; b := 2;
In[5]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
In[6]:= V = Table[v[t, i, h], {i, 1, m}];
In[7]:= IntegrMatrBPF = Function[{a, b, m, β}, h = (b - a)/m;
          h^β/Gamma[β + 2] *
           Table[Which[i < j, 0, i == j, 1, i > j,
             (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)], {i, 1, m}, {j, 1, m}]];
In[8]:= β = 0.5;
In[9]:= P05 = IntegrMatrBPF[a, b, m, β];
In[10]:= β = 2;
In[11]:= P2 = IntegrMatrBPF[a, b, m, β];
In[12]:= U = Table[Y_i, {i, 1, m}];
In[13]:= f =
   0.5641895835477563`
     (0.` + 16.` t^1.5` - 38.4` t^2.5` + 18.2857142857142 9` t^3.5`) + (2 t^3 - 3 t^4 + t^5)^2;
```

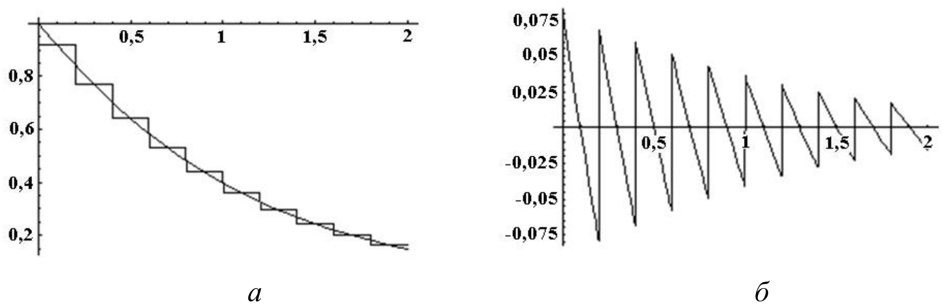
```
In[14]:= F = Table[1/h * ∫_{(i-1)*h}^{i*h} f dt, {i, 1, m}];
In[15]:= A = P05.U + P2^2.U^2 - F;
In[16]:= FindRoot[{A[[1]] == 0, A[[2]] == 0, A[[3]] == 0, A[[4]] == 0, A[[5]] == 0,
           A[[6]] == 0, A[[7]] == 0, A[[8]] == 0, A[[9]] == 0, A[[10]] == 0},
          {Y1, 0}, {Y2, 0}, {Y3, 0}, {Y4, 0}, {Y5, 0}, {Y6, 0}, {Y7, 0}, {Y8, 0},
          {Y9, 0}, {Y10, 0}]

Out[16]= {Y1 -> 0.655243, Y2 -> 1.06217, Y3 -> -0.485745, Y4 -> -2.36798, Y5 -> -3.91231,
          Y6 -> -3.98685, Y7 -> -1.35365, Y8 -> 4.85657, Y9 -> 14.034, Y10 -> 25.0483}
In[17]:= U = {0.655243116913177`, 1.0621732865141262`, -0.48574492565024624`,
           -2.3679847767105517`, -3.91230647066169`, -3.986853555024191`,
           -1.353654463086508`, 4.856572427765051`, 14.033960723182519`,
           25.048253370508`};
In[18]:= X = P2.U;
In[19]:= ya = X.V;
```



а *б*

Рис. 1. Визуализация решения уравнения: *а* – точное решение; *б* – аппроксимационное решение ($m = 10$)

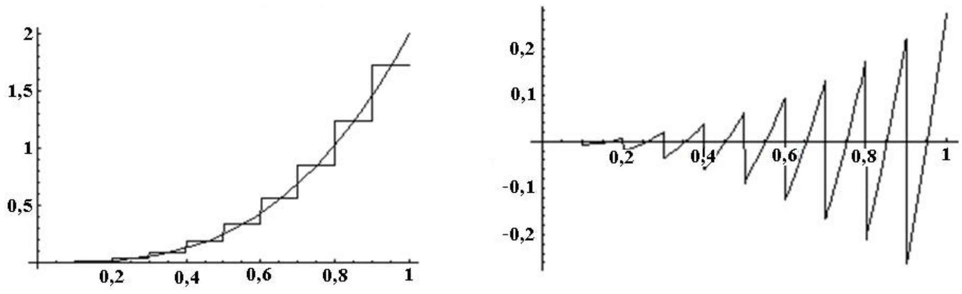
Пример 2. Нелинейное дифференциальное уравнение с производной первого порядка и тригонометрической нелинейностью $\frac{dy}{dt} + \sin(y(t)) = 0, y(0) = 1$ в операционной области будет иметь вид $\vec{\mathbf{Y}} + \mathbf{P}^1 \cdot \vec{\mathbf{Y}} - \frac{1}{6}\mathbf{P}^1 \cdot \vec{\mathbf{Y}}^3 + \frac{1}{120}\mathbf{P}^1 \cdot \vec{\mathbf{Y}}^5 = \vec{\mathbf{F}}$. Решив это уравнение, получим аппроксимационное решение, представленное на рис. 2.



а *б*

Рис. 2. Решение уравнения: *а* – точное решение и его аппроксимация; *б* – график ошибки аппроксимации

Пример 3. Рассмотрим нахождение аппроксимационного решения нелинейного уравнения смешанного порядка: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + {}_C D^{0,5} y(t) + y^2(t) = f(t)$, $y_0 = y'_0 = 0$, $f(t) = 12t + 3,61081t^{2,5} + 4t^6$. Точное решение уравнение имеет вид: $y(t) = 2t^3$. Используя определение производной по Капуто (1) и делая замену, получим уравнение в операционной области: $\vec{\mathbf{U}} + \mathbf{P}^{0.5} \cdot \left(y_0' \vec{\mathbf{1}} + \mathbf{P}^{\mathbf{1}} \cdot \vec{\mathbf{U}}\right) + \left(y_0 \vec{\mathbf{1}} + y_0' \vec{\mathbf{t}} + \mathbf{P}^{\mathbf{2}} \cdot \vec{\mathbf{U}}\right)^2 = \vec{\mathbf{F}}$. Графики аппроксимационного решения и функции ошибки показаны на рис. 3.



а *б*

Рис. 3. Визуализация решения уравнения: *а* – точное решение и его аппроксимация; *б* – график ошибки аппроксимации

Выводы. Предложенный в работе аппроксимационный метод для нелинейных дифференциальных уравнений целого и дробного порядков на основе операционного метода неклассического типа позволяет при помощи простых преобразований получить решения нелинейных уравнений. Кроме того, с его помощью можно найти решения нелинейного дифференциального уравнения с производной по Капуто и уравнений смешанного порядка. При нахождении коэффициентов аппроксимирующего спектра, решая систему нелинейных алгебраических уравнений, необходимо брать только действительные корни. В этой работе были использованы для аппроксимации локальные базисные системы на основе смещенных полиномов Лежандра нулевого порядка. Использование полиномов Лежандра первого и второго порядков затруднительно, поскольку это приводит к сложным выражениям. Меняя порядок базисных функций, можно достигать требуемой точности решения.

Список литературы

1. *Васильєв В. В.* Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі некласичних операційних числень / В. В. Васильєв, Л. О. Сімак, О. А. Зеленков.; НАН України, Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова, М-во освіти і науки України, Національний авіаційний університет. – К.: НАН Украины, 2006. – 184 с.
2. *Васильев В. В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем: науч. изд. / В. В. Васильев, Л. А. Симак.; НАН Украины, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова. – К.: НАН Украины, 2008. — 256 с.

К. В. Киркач

Застосування операційного методу некласичного типу для аналізу перехідних процесів в нелінійних динамічних системах цілого та дробового порядків

Розглянуто застосування операційного методу некласичного типу до апроксимаційного розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь цілого та дробового порядків. Подано програми та результати обчислювальних експериментів у середовищі системи Mathematica.

K. V. Kyrkach

Application of an operational method of non-classical type for the analysis of transient processes in nonlinear dynamic systems of whole and fractional order

Application of operational method of non-classical type to approximation solution of nonlinear differential equations of the whole and fractional orders is considered. Programs and results of computing experiments in the environment of system Mathematica are presented.