

УДК 519.876.5(045)

¹М. Є. Фриз, канд. техн. наук,
²Т. В. Михайлович, асп.

ОБҐРУНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВОДОСПОЖИВАННЯ У ВИГЛЯДІ УМОВНОГО ЛІНІЙНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

^{1,2}Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя
e-mail: ¹mykh.fryz@gmail.com, ²taras@mixel.org.ua.

Обґрунтовано математичну модель водоспоживання як умовного лінійного періодичного випадкового процесу. Описано механізм його утворення окремими споживачами системи водопостачання, наведено вираз характеристичної функції математичної моделі водоспоживання.

Ключові слова: водоспоживання, водопостачання, умовний лінійний випадковий процес, умовний лінійний періодичний випадковий процес, характеристична функція.

Вступ і постановка завдання. Натепер актуальною є проблема вдосконалення функціонування систем питного водопостачання в напрямках енерго- та ресурсозбереження, а також підвищення якості та потужностей водопостачальних систем в умовах зростаючої урбанізації.

У межах цієї проблеми можна виокремити такі завдання:

- дизайн нових (чи редизайн існуючих) водопостачальних систем;
- визначення найбільш оптимальних кількості та місткості необхідних резервуарів для зберігання води і знаходження найвигідніших моментів часу для наповнення резервуарів;
- мінімізація економічних затрат на водопостачання, ресурсозбереження, енергозбереження.

Вирішення цих завдань можливе шляхом побудови адекватної математичної моделі процесу водоспоживання і відповідних методів його аналізу та прогнозу.

Серед математичних моделей та методів аналізу водоспоживання найбільш відомими є:

- метод експоненційного згладжування Тейлора [1];
- метод адитивних та мультиплікативних тенденцій Холт–Уінтера [2];
- регресійний метод [3];
- подвійно-сезонна мультиплікативна модель ARIMA [4; 5];
- узагальнена авторегресійна умовна гетероскедастичність GARCH [6; 7];
- модель у вигляді штучної нейронної мережі [3];
- модифікація та комбінація наведених вище моделей [2 – 4; 6].

У цих моделях враховано стохастичний характер водоспоживання, але не пояснено механізм його утворення окремими споживачами; імовірнісний їх опис виконано лише в межах моментних функції першого та другого порядків. Самі моделі використано для передбачення подового водоспоживання на найближче семиденне та щотижневе водоспоживання у 365-денних часових інтервалах [1; 2; 4].

Отже, актуальним завданням є розроблення математичної моделі процесу водоспоживання, яка б дозволяла:

- враховувати стохастичний механізм утворення водоспоживання окремими споживачами;
- здійснювати його повний імовірнісний опис;
- передбачати можливість визначення своїх параметрів та характеристик за результатами експериментальних досліджень;
- враховувати циклічний характер водоспоживання;
- враховувати найважливіші фактори, які впливають на водоспоживання, наприклад, температуру повітря, рівень опадів та ін.;

– виконувати комп'ютерне імітаційне моделювання водоспоживання.

Структура системи водопостачання. Узагальнену структурну схему водопровідної мережі питного водопостачання зображено на рис. 1. Стрілками показано ієрархічні зв'язки між вузлами водопостачальної системи.

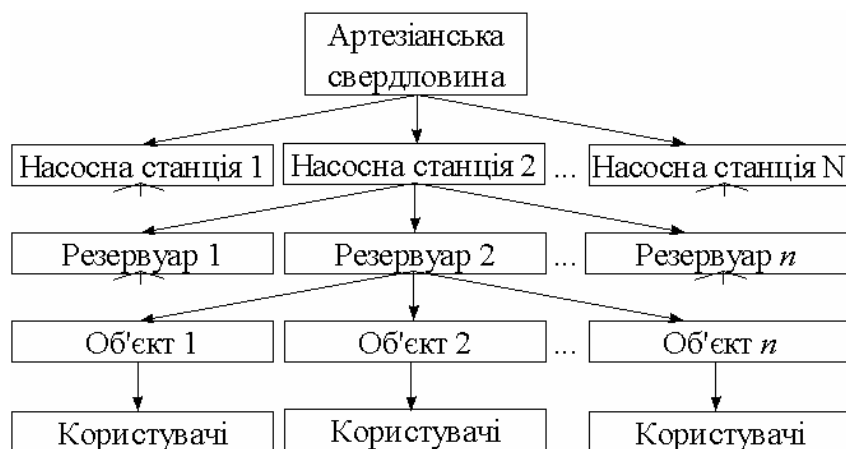


Рис. 1. Схема мережі водопостачання

Насосну станцію обладнано водонасосами, що час від часу наповнюють її резервуари водою з артезіанської свердловини, яка розглядається як невичерпне джерело. Запас води в резервуарах використовується для забезпечення водою об'єктів, підконтрольних насосній станції. Об'єкти, обладнані водолічильниками, є вузлами аудита водопостачальних послуг. З об'єктів здійснюється водопостачання кінцевим користувачам.

Термін “водоспоживання” означає “об’єм води, спожитої користувачами за одиницю часу”. Наприклад, можна розглядати водоспоживання, що реєструється водолічильником певного об’єкта (див. рис. 1).

Графік зміни водоспоживання за березень 2010 р. показано на рис. 2 [8].

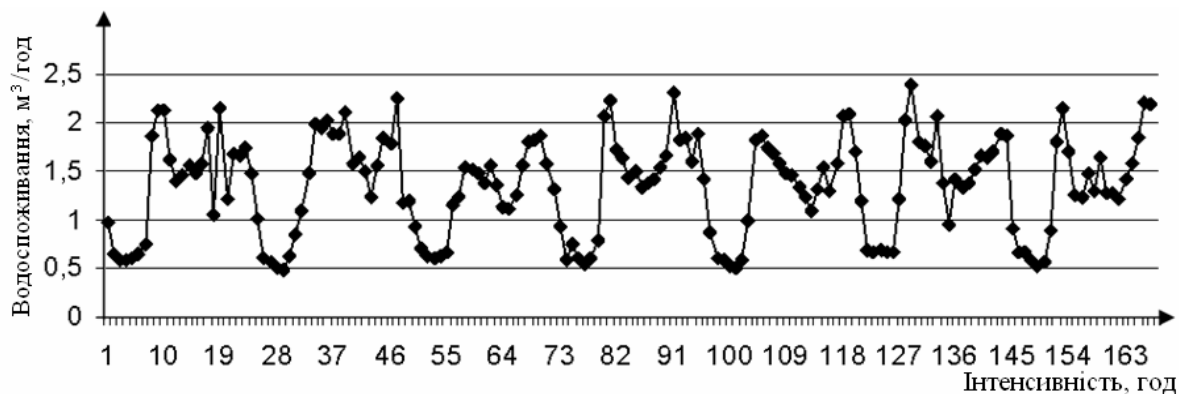


Рис. 2. Погодинна інтенсивність водоспоживання з п'ятниці 19 березня 2010 р. по четвер, 25 березня 2010 р., м³/год

Побудова математичної моделі водоспоживання. Таку побудову можна виконати на підставі аналізу поведінки окремого користувача в системі. Нехай $\tau_k, k \in \mathbb{Z}$ – момент часу, в який споживач починає вмикати воду (рис. 3); $\tilde{l}_k$ – тривалість інтервалу часу, протягом якого споживач користується водою і в момент часу $\tau_k + \tilde{l}_k$ припиняє споживання. Функцію, що характеризує зміну водоспоживання, позначимо через $\tilde{W}_k(\tau_k, t)$, де τ_k – момент увімкнення k -го споживача; t – момент спостереження.

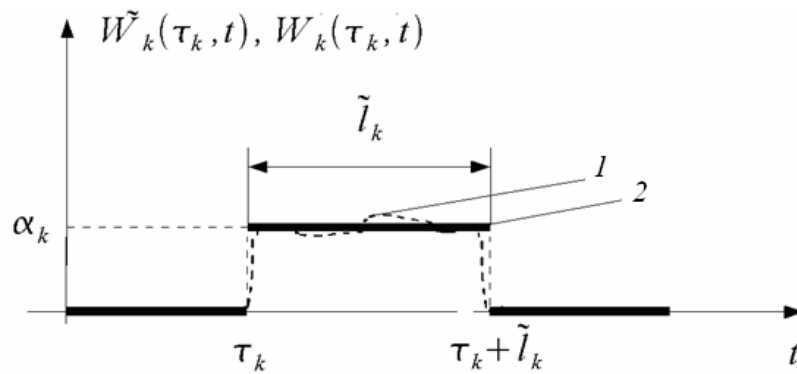


Рис. 3. Графічне зображення реалізацій: 1 – водоспоживання одним споживачем;
2 – моделі споживання води одним споживачем

Зважаючи на те, що час, який користувач витрачає на відкриття крана до досягнення необхідного рівня водоспоживання, набагато менший за тривалість користування водою (те саме стосується часу, який затрачається на закривання крана), а також нехтуючи можливими змінами водоспоживання за час користування, для спрощення моделі функцію $\tilde{W}_k(\tau_k, t)$ замінимо функцією

$$W_k(\tau_k, t) = \alpha_k \varphi(t - \tau_k; \tilde{l}_k), t \in (-\infty, \infty),$$

де

$$\varphi(s; l) = \begin{cases} 1, s \in [0, l], s \in \mathbf{R}, l > 0, \\ 0, \text{в інших випадках} \end{cases}$$

$\alpha_k > 0, k \in \mathbf{Z}$ – водоспоживання k -го користувача.

Загальне водоспоживання дорівнює сумі витрат води кожним споживачем зокрема. На підставі цього положення, сумарне водоспоживання можна описати у вигляді випадкового процесу $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(\tau_k, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(t - \tau_k; \tilde{l}_k). \quad (1)$$

Щодо процесу ввімкнення споживачів в систему водопостачання можна стверджувати таке:

1. Споживачі приєднуються до системи у послідовні випадкові моменти часу $\{\dots \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k \dots\} = \{\tau_k, k \in \mathbf{Z}\}$ незалежно один від одного, тому інтервали часу $\Delta\tau_1 = \tau_1, \Delta\tau_2 = \tau_2 - \tau_1, \Delta\tau_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$ між цими споживачами є незалежними випадковими величинами. Це означає, що ймовірність того, скільки споживачів підключиться впродовж певного інтервалу часу, не залежить від того, скільки споживачів підключилося за межами цього інтервалу (умова відсутності післядії).

2. В один момент часу ввімкнути воду може лише один споживач, тобто ймовірність появи двох і більше споживачів за досить малий проміжок часу $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ дорівнює $o(\Delta\tau)$, ймовірність появи одного споживача в системі дорівнює $\lambda(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$, де $\lambda(\tau)$ – детермінована функція, що характеризує інтенсивність підключення споживачів і залежить від часу доби.

3. $\alpha_k, k \in \mathbf{Z}$ – послідовність незалежних випадкових величин з функцією розподілу $F_\alpha(x), x \in \mathbf{R}$, $\tilde{l}_k, k \in \mathbf{Z}$ – послідовність незалежних випадкових величин з функцією

розподілу $F_l(x), x \in \mathbf{R}$. Випадкові послідовності $\alpha_k, k \in \mathbf{Z}$ і $\tilde{l}_k, k \in \mathbf{Z}$ також не залежать одна від одної та від $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$.

На основі пунктів 1 і 2 можна зробити висновки, що процес підключення споживачів до системи є неоднорідним пуассонівським потоком з параметром $\lambda(\tau)$.

Нехай тепер $\pi(\tau), \tau \in (-\infty, \infty), \mathbf{P}(\pi(0)=0)=1$ – неоднорідний простий пуассонівський процес, стрибки якого відбуваються у моменти часу $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$ підключення споживача до системи і дорівнюють одиниці. Введемо також неоднорідний узагальнений пуассонівський процес $\pi_1(\tau)$, що відповідає неоднорідному простому пуассонівському процесу з параметром $\lambda(\tau)$, стрибки якого виникають у ті ж моменти часу, що й стрибки процесу $\pi(\tau)$; величина кожного стрибка процесу $\pi_1(\tau)$ у момент часу τ_k дорівнює випадковій величині α_k .

З урахуванням наведених припущень та позначень процес $\xi(t)$, що описує загальне водоспоживання, можна записати у вигляді стохастичного інтеграла

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau; \tilde{l}_{\pi(\tau)}) d\pi_1(\tau), t \in (-\infty, \infty). \quad (2)$$

Випадковий процес (2) називається умовним лінійним випадковим процесом (УЛВП) [9]. У цьому зображенні $\varphi(t-\tau; \tilde{l}_{\pi(\tau)})$ – функція (ядро УЛВП) з випадковим параметром $\tilde{l}_k$; $\pi_1(\tau)$ – породжувальний процес з незалежними приростами, причому $\mathbf{P}\{\pi_1(0)=0\}=1, \mathbf{D}[d\pi_1(\tau)] < \infty$.

Процес, який зображається у вигляді (1), відомий у літературі як процес дробового шуму [10], імпульсний пуассонівський процес [11], профільований пуассонівський процес [12]. У завданнях моделювання процесів ресурсоспоживання модель, подібна до (1), використовувалась у праці [13] (модель енергонавантаження), у праці [9] (модель газоспоживання).

Можна показати, що характеристична функція умовного лінійного випадкового процесу (2) має вигляд:

$$\ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(t_k - \tau; y)} - 1 \right) dF_{\alpha}(x) dF_l(y) \lambda(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де $\lambda(\tau)$ – інтенсивність підключення користувачів до системи водоспоживання, $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$ – періодична функція, $T = 24$ год.

Характеристична функція (3) є T -періодичною за сукупністю своїх часових аргументів, тобто

$$\ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T). \quad (4)$$

Дійсно,

$$\ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(t_k + T - \tau; y)} - 1 \right) dF_{\alpha}(x) dF_l(y) \lambda(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Виконавши в рівнянні (5) заміну $\tau - T = s$, отримаємо

$$\ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(t_k - s; y)} - 1 \right) dF_{\alpha}(x) dF_l(y) \lambda(s + T) ds.$$

Урахувавши, що $\lambda(s + \tau) = \lambda(s)$, бачимо, що виконується умова (4).

Таким чином, на основі теоретичного аналізу механізму породження процесу водоспоживання побудовано його модель у вигляді умовного лінійного періодичного випадкового процесу. Зрозуміло, що побудована математична модель потребує ще й експериментальної перевірки адекватності, що варто здійснити в наступних роботах.

Висновки. Виконано опис процесу водоспоживання на прикладі структури водопостачальної мережі КП «Тернопільводоканал». На його підставі було адекватно змодельовано схему типової системи водопостачання, що дало змогу проаналізувати поведінку одного користувача в системі. Розглянуто основні проблеми енерго- та ресурсозбереження водопостачальних систем. На їх основі поставлено завдання їх вирішення. Виконано математичне моделювання водоспоживання із врахуванням поставлених завдань. У результаті отримано математичну модель водоспоживання як умовного лінійно періодичного випадкового процесу і частково розглянуто його характеристики, зокрема доведено його періодичність. Це дозволяє проводити дослідження параметрів процесу водоспоживання і їх перевіряти на основі властивостей умовних лінійних періодичних процесів.

Список літератури

1. *Taylor J.* Density forecasting for the efficient balancing of the generation and consumption of electricity / J. Taylor // *International Journal of Forecasting*. – 2006. – №22. – P. 707 – 724.
2. *Gardner Jr. E.* Exponential smoothing: The state of the art - Part II" / Gardner Jr. E. // *International Journal of Forecasting*. – 2006. – №22. – P. 637 – 666.
3. *Water Consumption Forecasting to Improve Energy Efficiency of Pumping Operations* / [by AwwaRF]. – U.S.A., Denver, CO: American Water Works Association, 2007 – 117 p.
4. *Box G.* Time Series Analysis: Forecasting and Control / G. Box, G. Jenkins, G. Reinsel – New Jersey: Prentice-Hall, 1994 – 3rd ed. – 582 p.
5. *Davison R.* Estimation and Inference in Econometrics / R. Davison, J. MacKinnon – Oxford: Oxford University Press, 1993 – 896 p.
6. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity / T. Bollerslev // *Journal of Econometrics*, – 1986 – №31 – P. 307–327.
7. *Engle R.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation / R. Engle // *Econometrica* – 1982 – №50 – P. 987 – 1008.
8. *Обґрунтування математичної моделі водоспоживання: матеріали міжнар. наук.-техн. конф. «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» присвяченої 50-річчю заснування ТНТУ та 165-річчю з дня народження Івана Пулюя (Україна, м. Тернопіль, 19–21 травня 2010 р.)* / Т. В. Михайлович, М. Є. Фриз – Тернопіль: ТНТУ, 2010 – 614 с.
9. *Марченко Б. Г.* Характеристична функція умовного лінійного випадкового процесу як математичної моделі газоспоживання. / Б. Г. Марченко, Н. В. Мулик, М. Є. Фриз // *Електроніка та системи управління*. – 2006. – №3(9). – С. 40 – 46.

10. Коваленко И. Н. Случайные процессы: Справочник. / И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, В. М. Шуренков – К.: Наук. думка, 1983. – 367 с.
11. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов – М.: Наука, 1976. – Ч.1. – 496 с.
12. Тихонов В. Н. Статистическая радиотехника / В. Н. Тихонов – М.: Радио и связь, 1982 – 624 с.
13. Приймак М. В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: автореф. дис. ... на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 05.13.06 «Інформаційні технології» / М. В. Приймак – К., 2000. – 34 с.

М. Є. Фриз, Т. В. Михайлович

Обоснование математической модели водопотребления в виде условного линейного случайного процесса

Обосновано и объяснено математическую модель водопотребления как условного линейного периодического случайного процесса. Описано механизм его образования отдельными потребителями системы водоснабжения, приведено выражение характеристической функции математической модели водопотребления.

M. E. Fryz, T. V. Mykhailovych

Validation of Water Consumption Mathematical Model as a Conditional Linear Stochastic Process

The mathematical model of water consumption as a conditional linear periodic stochastic process is justified and explained. Its derivation from particular users of water provision system is described. The expression of the water consumption process' characteristic function is presented.