

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

¹А. В. Васильев, канд. техн. наук,²В. В. Васильев, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины,³Л. А. Симак, д-р техн. наук

АППРОКСИМАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА И ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ S-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

¹Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: ovasylyev@gmail.com

^{2,3}Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: vsyv06@gmail.com

Аппроксимационно-операционный подход применен к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Показано, что аппроксимация ядер интегральных уравнений как сигналов, зависящих от двух аргументов, обобщенными полиномами на основе двумерных базисных функций блочно-импульсного типа позволяет алгебраизировать интегральные уравнения. Приведены примеры, иллюстрирующие применение подхода в программной среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: математическое моделирование, S-преобразования, операционное исчисление, динамическая система, интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Введение. В математическом моделировании динамических систем широкое распространение получили интегральные уравнения, для которых разработаны и применяются различные аналитические и численные методы [3; 5]. Использование интегральных преобразований и операционных исчислений, успешно применяемых для решения дифференциальных уравнений, в случае интегральных уравнений представляет значительный интерес, так как позволяет конструировать модели в программных средах компьютерной алгебры современных ПЭВМ. В отделении гибридных моделирующих и управляющих систем Института проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины предложен и разработан метод S-преобразований, относящийся к классу численно-аналитических операционных методов [1; 2]. Метод эффективен для математического моделирования динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями целого и дробного порядков. Ниже предпринята попытка применения S-преобразования для алгебраизации интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода.

Работа построена следующим образом. Кратко в ретроспективном плане изложены основы S-преобразования как операционного метода и его разновидности, использующие блочно-импульсную систему базисных функций. Затем последовательно рассмотрен процесс построения операционных моделей интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Предложено аппроксимировать ядра уравнений как двумерные сигналы полиномами с двумерными блочно-импульсными функциями. Подробно рассмотрен процесс алгебраизации интегралов, входящих в уравнения. В работе приведены два иллюстративных примера. Приведенные программы сопровождаются подробными комментариями.

S-преобразования. S-преобразование [1; 2] является операционным методом аппроксимационного типа, основанном на представлении сигналов обобщенными полиномами с различными системами базисных функций. Сигнал $x(t)$, рассматриваемый на интервале изменения аргумента $0 \leq t < T$, аппроксимируется с наименьшей среднеквадратической ошибкой полиномом вида

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t),$$

где $s_i(t)$ – базисные функции, формирующие систему базисных функций:

$$\bar{S}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\}^*,$$

определенные на том же интервале изменения аргумента. Здесь и далее символом $*$ обозначены операции транспонирования векторов и матриц.

В векторно-матричном виде S -преобразование определяется выражениями:

$$\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_m\}^* = \left(\int_0^T \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* dt \right)^{-1} \left(\int_0^T x(t) \bar{S}(t) dt \right), \quad (1)$$

$$x_a(t) = \bar{X}^* \cdot \bar{S}(t) = \bar{S}(t)^* \cdot \bar{X}. \quad (2)$$

Прямое операционное S -преобразование (1) сопоставляет сигналу $x(t)$ его изображение в виде вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома. Обратное преобразование (2) восстанавливает сигнал в форме его аппроксимации с наименьшей среднеквадратичной ошибкой. Обозначая взаимное соответствие сигнала и его изображения выражением $x(t) \Leftrightarrow \bar{X}$, основные свойства преобразования можно записать в виде [2]:

$$ax(t) \pm by(t) \Leftrightarrow a \cdot \bar{X} \pm b \cdot \bar{Y};$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \bar{Y} = \mathbf{P}_s \cdot \bar{X}. \quad (3)$$

Операционный характер преобразования определяется выражением (3), позволяющим алгебраизировать интегро-дифференциальные математические модели динамических систем. Операционным аналогом операции интегрирования сигнала с переменным верхним пределом является матрица $\mathbf{P}_s$, элементы которой зависят только от системы базисных функций $\bar{S}(t)$. Каждая система базисных функций порождает свой вид S -преобразования.

В моделировании и автоматическом управлении широко используется система базисных функций, получившая название блочно-импульсной [3]. Блочно-импульсные базисные функции имеют вид прямоугольных импульсов единичной амплитуды, сдвинутых относительно друг друга на величину длительности импульса, определяемых выражением

$$s_i(t) = v_i(t) = \sigma(t - (i-1)h) - \sigma(t - ih), \quad i := 1, \dots, m,$$

где $\sigma(t)$ – функция единичного скачка вида:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Большими преимуществами блочно-импульсной системы базисных функций являются ее ортогональность и простота, существенно упрощающие и ускоряющие процесс решения задачи в операционной области. Формулы прямого S -преобразования и вид операционной матрицы интегрирования упрощаются и принимают вид:

$$X_i = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} x(t) dt, \quad i := 1, 2, \dots, m,$$

$$\mathbf{P}_v = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Основным недостатком аппроксимации при использовании блочно-импульсной системы базисных функций является её кусочно-постоянный характер, однако погрешность аппроксимации решения задач может быть уменьшена увеличением порядка базисной

системы функций m . В данной работе будет использоваться именно эта система базисных функций.

S-преобразование интегральных уравнений. Применим к интегральным уравнениям Фредгольма и Вольтерра второго рода S-преобразование.

Уравнение Фредгольма имеет вид [5]:

$$a(x)y(x) + \lambda \int_0^A r(x,t)y(t)dt = f(x). \quad (4)$$

В выражении (4) предполагается, что на интервале изменения аргументов $0 \leq x, t < A$ выполняются ограничения интегрируемости ядра $r(x,t)$ и неравенства нулю переменного коэффициента $a(x) \neq 0$.

Уравнение Вольтерра отличается от уравнения Фредгольма наличием переменного верхнего предела в интеграле при сохранении указанных выше ограничений:

$$a(x) \cdot y(x) + \lambda \int_0^x r(x,t) \cdot y(t)dt = f(x).$$

Операционный аналог уравнения Фредгольма. Подставляя в уравнение (4) вместо входящих в него функций, ядра и коэффициента их аппроксимации в соответствии с формулой (2), получим:

$$\bar{S}(x)^* \cdot \mathbf{D}(\bar{A}) \cdot \bar{Y} + \lambda \cdot \int_0^A \bar{S}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* \cdot \bar{Y}dt = \bar{S}(t)^* \cdot \bar{F}, \quad (5)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ – диагональная матрица порядка m , элементы которой равны составляющим аппроксимирующего спектра переменного коэффициента $a(x) \Leftrightarrow \bar{A}$; $\bar{\mathbf{R}}_{xt}$ – операционный образ ядра – матрица аппроксимирующего спектра двух переменных $r(x,t) \Leftrightarrow \bar{\mathbf{R}}_{xt}$. Элементы этой матрицы определяются выражением

$$R_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{(i-1)h}^{ih} \int_{(j-1)h}^{jh} r(x,t)dt dx;$$

$\bar{F}$ – аппроксимирующий спектр правой части уравнения $f(x)$; $\bar{Y}$ – аппроксимирующий спектр решения уравнения, подлежащий определению.

Преобразуем интеграл, входящий в выражение (5). Так как интегрирование осуществляется по переменной t , вынесем за знак интеграла множители, не зависящие от переменной интегрирования:

$$\lambda \int_0^A \bar{S}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* \cdot \bar{Y}dt = \lambda \cdot \bar{S}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \int_0^A \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* dt \cdot \bar{Y}. \quad (6)$$

После несложных преобразований, с учетом свойств блочно-импульсных базисных функций получим, что интеграл в правой части (6) равен $h \cdot \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка m :

$$\int_0^A \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* dt = \int_0^{m \cdot h} \bar{S}(t) \cdot \bar{S}(t)^* dt = h \cdot \mathbf{E}. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6), (7) в уравнение (5) и разрешая полученное выражение относительно $\bar{Y}$, получим:

$$\bar{Y} = (\mathbf{D}(\bar{A}) + \lambda h \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt})^{-1} \cdot \bar{F}.$$

Аппроксимация решения уравнения Фредгольма имеет вид:

$$y_a(x) = \bar{Y}^* \cdot \bar{S}(x).$$

Операционный аналог уравнения Вольтерра. Операционный аналог уравнения Вольтерра отличается от выражения (5) только наличием переменного верхнего предела x вместо константы A :

$$\bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \mathbf{D}(\bar{\mathbf{A}}) \cdot \bar{\mathbf{Y}} + \lambda \cdot \int_0^x \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \bar{\mathbf{S}}(t)^* \cdot \bar{\mathbf{Y}} dt = \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (8)$$

Преобразуем интеграл в правой части выражения (8), используя независимость от переменной интегрирования ряда сомножителей подинтегрального выражения:

$$\lambda \int_0^x \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \bar{\mathbf{S}}(t)^* \cdot \bar{\mathbf{Y}} dt = \lambda \cdot \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \int_0^x \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \bar{\mathbf{S}}(t)^* dt \cdot \bar{\mathbf{Y}}. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$\bar{\mathbf{r}}_{(i)}$ – i -я строка матрицы $\bar{\mathbf{R}}_{xt}$;

$\bar{\mathbf{p}}_{(i)}$ – i -я строка операционной матрицы $\mathbf{P}_v$;

$\mathbf{d}_{(i)} = \mathbf{D}(\bar{\mathbf{r}}_{(i)})$ – диагональная матрица, элементы которой образованы i -й строкой матрицы $\bar{\mathbf{R}}_{xt}$.

Из введенных векторов и матриц сформируем следующую матрицу:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{(1)} \cdot \mathbf{d}_{(1)} \\ \bar{\mathbf{p}}_{(2)} \cdot \mathbf{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{p}}_{(m)} \cdot \mathbf{d}_{(m)} \end{bmatrix}.$$

С учетом свойств блочно-импульсной системы базисных функций и операционной матрицы интегрирования [2; 4] выражение (9) принимает следующую форму:

$$\lambda \cdot \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{R}}_{xt} \cdot \int_0^x \bar{\mathbf{S}}(t) \cdot \bar{\mathbf{S}}(t)^* dt \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \lambda \cdot \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{Y}}. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (8), получим:

$$\bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \mathbf{D}(\bar{\mathbf{A}}) \cdot \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \lambda \cdot \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{S}}(x)^* \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (11)$$

Решение (11) имеет вид:

$$\bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{A}}) + \lambda \cdot \mathbf{M})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}.$$

Аппроксимация решения уравнения, как и в случае уравнения Фредгольма, имеет вид:

$$y_a(x) = \bar{\mathbf{Y}}^* \cdot \bar{\mathbf{S}}(x).$$

Иллюстративные примеры. Рассмотрим реализацию описанного подхода в программной среде системы Mathematica®[6]. Примеры уравнений взяты из работы [5] с целью получения возможности сравнения получаемых результатов с аналитическими решениями.

Пример 1. Уравнение Фредгольма со следующими исходными данными:

$$a(x) = 1; \lambda = 1; r(x, t) = x - t; f(x) = \sin(\pi x); m = 100; h = 0,01.$$

Программа с комментариями и результаты решения уравнения

Задание исходных данных:

```
f[x_] := Sin[π * x]; λ = 1; r = x - t; m = 100; h = 0.01;
```

Задание вида базисной функции:

```
v[x_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ x < i * h, 1, 0];
```

Задание систем базисных функций по аргументам x и t :

$Sx = \text{Table}[v[x, i, h], \{i, m\}];$

$St = \text{Table}[v[t, j, h], \{j, m\}];$

Задание операционной матрицы интегрирования порядка $\beta = 1$:

$p[k_ , h_ , \beta_] :=$

$\frac{h^{\beta}}{\Gamma[\beta + 2]} * \text{If}[k < 0, 0, \text{If}[k == 0, 1, \{(k + 1)^{\beta+1} + (k - 1)^{\beta+1} - 2k^{\beta+1}\}]]];$

$P_1 = \text{Table}[p[i - j, h, 1], \{i, m\}, \{j, m\}];$

Определение операционного спектра правой части уравнения:

$F = \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[x] dx, \{i, m\}\right];$

Определение операционного спектра ядра уравнения:

$R = \text{Table}\left[\frac{1}{h^2} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} \int_{(j-1)*h}^{j*h} r dt dx, \{i, m\}, \{j, m\}\right];$

Решение уравнения в операционной области:

$Y1 = \text{Inverse}[\text{IdentityMatrix}[m] - \lambda * h * R].F;$

Определение аппроксимации решения:

$y1a = Y1.Sx;$

Аналитическое решение уравнения [5]:

$yex = -\frac{14}{13\pi} + \frac{24x}{13\pi} + \text{Sin}[\pi x].$

Визуализация аппроксимационного и точного решения уравнения Вольтера (рис. 1):

$\text{Plot}[\{y1a, yex\}, \{x, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 200]$

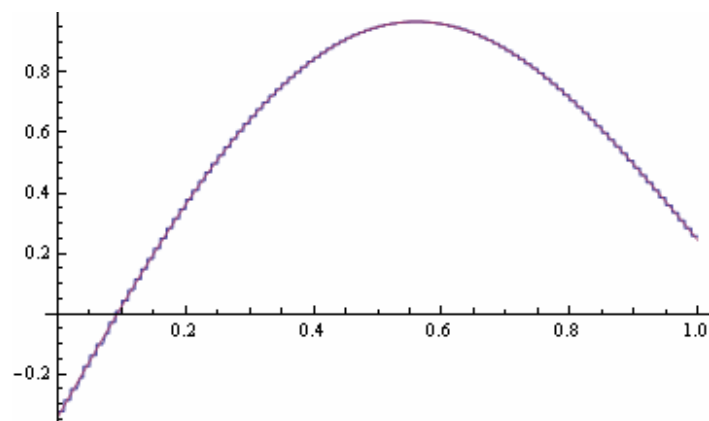


Рис. 1. Аппроксимационное и точное решения уравнения Фредгольма

Визуализация решения в операционной области (рис. 2):

$\text{ListPlot}[Y1]$

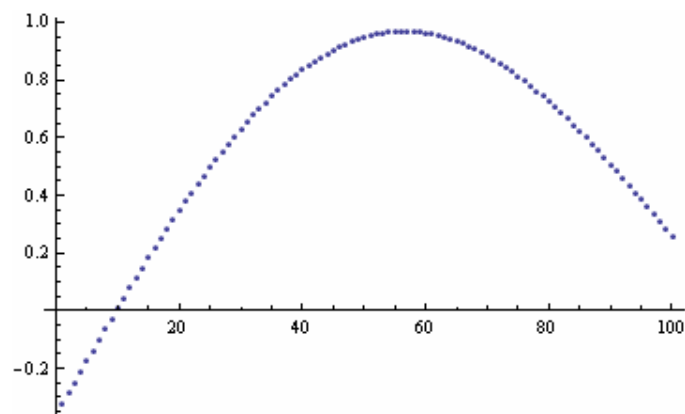


Рис. 2. Элементы спектра решения уравнения Фредгольма

Визуализация функции ошибки решения уравнения Фредгольма (рис. 3):

Plot[y1a - yex, {x, 0, 1}, PlotPoints → 200]

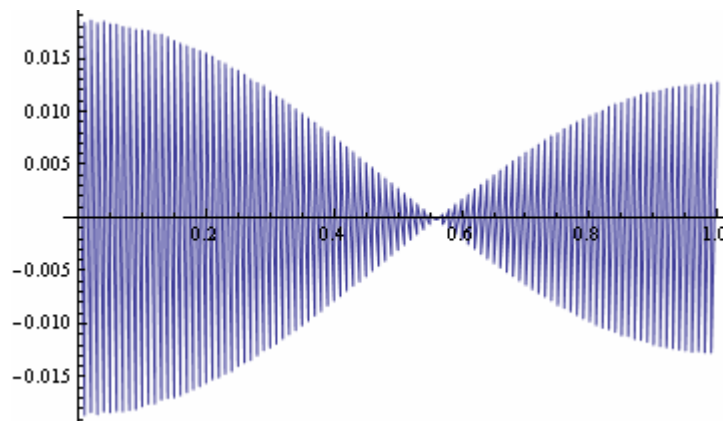


Рис. 3. Функция ошибки аппроксимационного решения уравнения Фредгольма

Пример 2. Уравнение Вольтерра со следующими исходными данными:

$$a(x) = 1; \lambda = 1; r(x, t) = (x - t)^2; f(x) = x \sin(\pi x); m = 25; h = 0.04.$$

Программа с комментариями и результаты решения уравнения:

Задание исходных данных:

f[x_] := x * Sin[π * x]; r = (x - t)²; λ = 1; m = 25; h = 0.04;

Задание вида базисной функции:

v[x_, i_, h_] := If[{i - 1} * h ≤ x < i * h, 1, 0];

Задание систем базисных функций по аргументам x и t:

Sx = Table[v[x, i, h], {i, m}];

St = Table[v[t, j, h], {j, m}];

Задание операционной матрицы интегрирования порядка β = 1:

p[k_, h_, β_] :=

$$\frac{h^\beta}{\Gamma(\beta + 2)} * \text{If}[k < 0, 0, \text{If}[k == 0, 1, ((k + 1)^{\beta+1} + (k - 1)^{\beta+1} - 2k^{\beta+1})]]];$$

P1 = Table[p[i - j, h, 1], {i, m}, {j, m}];

Определение операционного спектра правой части уравнения:

F = Table[$\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[x] dx$, {i, m}];

Определение операционного спектра ядра уравнения:

R = Table[$\frac{1}{h^2} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} \int_{(j-1)*h}^{j*h} r dt dx$, {i, m}, {j, m}];

Определение матрицы M:

d[i_] := DiagonalMatrix[R[[i]]];

q[i_] := P1[[i]];

M := Table[q[i].d[i], {i, m}];

Решение уравнения в операционной области:

Y = Inverse[(IdentityMatrix[m] + λ * M)].F;

Определение аппроксимации решения:

y1a = Y.Sx;

Визуализация аппроксимационного и точного решения уравнения Вольтерра (вид аналитического решения уравнения не приводится в связи с его громоздкостью) (рис. 4):

Plot[{y1a, yex}, {x, 0, 1}]

Заключення. Результати чисельних експериментів з операційними моделями інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольєрра показують ефективність використання S -перетворення для моделювання динамічних систем. Приведені програми можуть бути застосовані до інших інтегральних рівнянь з різними початковими даними і типами ядер, допускаючих апроксимацію поліномами з двома аргументами. Застосування методу до задач, що містять сингулярності, потребує додаткових досліджень.

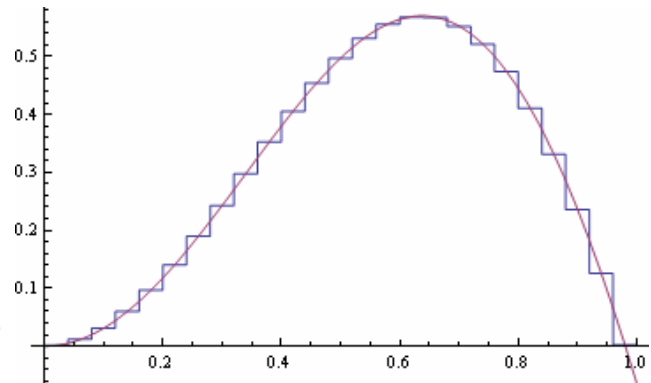


Рис. 4. Апроксимационное и точное решение уравнения Вольерра

Список литературы

1. Васильев В. В. Полиномиальные методы аппроксимации как операционные исчисления и их реализация в программной среде системы "Mathematica®" / В. В. Васильев, Л. А. Симак // Электронное моделирование – 1986. Т. 18, № 4. – С. 34 – 42.
2. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак – К.: НАН Украины. – 2008. – 256 с.
3. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: Методы, Алгоритмы, Программы: справ. пособие. / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков – К.: Наук. думка. – 1986. – 544 с.
4. Jiang Z. H., Schaufelberger W. Block Pulse Functions and their Applications in Control Systems / Z. H. Jiang, W. Schaufelberger – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – 1992. – 237 p.
5. Polyanin A. D. Handbook of Integral Equations / A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov – CRC Press, Boca, Raton. – 1998. – 816 p.
6. Wolfram S. The Mathematica Book. – Champaign, IL: Wolfram Media & Cambridge University Press. – 1999. – 1470 p.

О. В. Васильев, В. В. Васильев, Л. О. Симак

Апроксимационні рішення інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольєрра другого роду методом S -перетворень

Апроксимативно-операційний підхід застосовано до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольєрра другого роду. Показано, що апроксимація ядер інтегральних рівнянь як сигналів, що залежать від двох аргументів, узагальненими поліномами на основі двовимірних базисних функцій блочно-імпульсного типу дозволяє алгебратизувати інтегральні рівняння. Наведено приклади, що ілюструють застосування підходу в програмному середовищі системи Mathematica®.

A. V. Vasiliev, V. V. Vasylyev, L. A. Simak

Approximative solution of integral Fredholm and Volterra equations of the second kind by S -transform

Approximative-operational approach is applied to the solution of integral equations of Fredholm and Volterra second kind. It is shown that the approximation of the kernels of integral equations as signals dependent of two arguments, via generalized polynomials on the basis of two-dimensional basis functions of block-pulse type allows to obtain the algebraizable form of integral equations. Computer experiments are completed via programming environment of Mathematica®.