

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

УДК 621.372.061.9:517.9.001.57(045)

В. В. Васильев, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України,
Л. А. Симак, д-р техн. наук,
Ю. Е. Гребенович

**АППРОКСИМАЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НЕЦЕЛОГО (ДРОБНОГО) ПОРЯДКА ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины e-mail: vsvv06@gmail.com

Рассмотрено применение одномерного метода конечных элементов для получения приближенных решений обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений нецелого (дробного) порядка. Порядок применения метода конечных элементов показан на иллюстративных примерах. Приведены фрагменты программ в системе Mathematica® с подробными комментариями.

Ключевые слова: дробное исчисление, интегро-дифференциальные уравнения нецелых (дробных) порядков, аппроксимация сигналов, метод конечных элементов.

Введение. Математическое и компьютерное моделирование сложных динамических систем в механике, теплотехнике, электродинамике и других отраслях техники, связано с составлением и решением систем алгебраических и интегро-дифференциальных уравнений, порядок которых может быть очень большим в зависимости от сложности системы и требований к получаемым результатам. Стремление уменьшить или избежать сложностей вычислительного характера заставляло и заставляет исследователей разрабатывать и применять методы, позволяющие исследовать объекты по частям, анализ которых выполняется на основе решения более простых уравнений и (или) уравнений более низкого порядка по сравнению с уравнениями объекта в целом. Теоретические основы такого разбиения (диакоптики) были предложены и развиты в работах Габриэля Крона [2; 3]. В вычислительной математике и ряде прикладных наук был развит метод конечных элементов, относящийся к классу методов диакоптики. Теории и применениям метода конечных элементов посвящено много монографических работ и еще больше журнальных статей [4; 8]. Фирмой COMSOL AB созданы программные комплексы FEMLAB и COMSOL MULTIPHYSICS [5], специально предназначенные для моделирования широкого класса задач математической физики с применением метода конечных элементов. В последнее время значительно возрос интерес к исследованию процессов дробной динамики и динамических систем дробного порядка, математические модели которых являются интегро-дифференциальными уравнениями нецелого (дробного) порядка. Для решения таких уравнений наряду с аналитическими и операционными методами применяются и приближенные численные методы [6]. В данной работе предпринята попытка применения метода конечных элементов к приближенному решению линейных интегро-дифференциальных уравнений нецелого порядка. Работа построена следующим образом. Сначала приведены основные принципы метода конечных элементов и рассмотрен порядок формирования сети одномерных конечных элементов. Затем рассмотрены иллюстративные примеры применения метода для различных дифференциальных и интегральных уравнений. Изложение материала сопровождается вычислительными экспериментами, выполненными в программной среде системы Mathematica® [7], сопровождаемыми фрагментами программ и подробными комментариями.

Основы метода конечных элементов. Метод вкратце может быть описан следующим образом:

Область определения переменных объекта или процесса делится на подобласти, которые называются конечными элементами. В случае одномерных процессов конечными

элементами являются отрезки линий (прямых), для двумерных процессов в качестве конечных элементов используются фрагменты координатной плоскости, ограниченные замкнутыми кривыми (в простейшем случае треугольники и четырехугольники). Для трехмерных объектов используются конечные элементы в виде тел конечных объемов (в простейших случаях тетраэдры и другие выпуклые многогранники).

Искомые переменные, определяющие процесс или объект, аппроксимируются функциями специального вида на каждом из конечных элементов (в простейших случаях линейными функциями или степенными полиномами). Параметры аппроксимации в дальнейшем подлежат определению.

Подстановка аппроксимаций в определяющие уравнения позволяет получить систему уравнений, решение которой определит неизвестные параметры аппроксимаций для каждого конечного элемента. Необходимо отметить, что полученное таким образом решение является приближенным, погрешность аппроксимации уменьшается с уменьшением размеров конечных элементов (а следовательно с соответствующим увеличением их количества) и с использованием более совершенных аппроксимирующих функций (в частности полиномов более высокого порядка).

Математические модели конечных элементов. Рассмотрим вывод уравнений конечных элементов для одномерных процессов, используя простейшую аппроксимацию в виде линейных аппроксимирующих функций.

Одномерные конечные элементы. Их используют в тех случаях, когда поведение исследуемого процесса или объекта описывается функцией одной независимой переменной (аргумент – время или пространственная координата). В этом случае рассматриваемый диапазон изменения аргумента подразделяют на некоторое количество конечных отрезков изменения аргумента (конечных элементов). Один из таких элементов приведен на рис. 1.

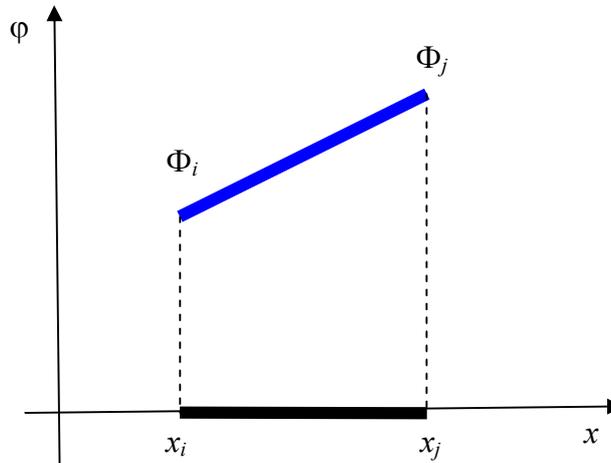


Рис. 1. Одномерный конечный элемент

Границами конечного элемента являются его концы с координатами x_i и x_j . Функция, описывающая исследуемый объект (процесс) $\varphi(x)$, аппроксимируется в пределах конечного элемента линейной функцией одной независимой переменной:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (1)$$

Коэффициенты α_1 и α_2 будут различными для различных конечных элементов и определяются значениями функции процесса на концах конечных элементов Φ_i и Φ_j . Значения этих коэффициентов определяются из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i; \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) имеет вид:

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_j x_j - \Phi_i x_i}{x_j - x_i}; \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{x_j - x_i}. \quad (4)$$

Подставляя уравнения (3) и (4) в (1), получим:

$$\varphi = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} + \frac{\Phi_j - \Phi_i}{x_j - x_i} x. \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет получить величину аппроксимации функции процесса при любом значении x ($x_i \leq x \leq x_j$) в пределах конечного элемента. Это выражение может быть преобразовано к виду, при котором функция процесса выражается через его значения на концах элемента:

$$\varphi = n_i \Phi_i + n_j \Phi_j, \quad (6)$$

где $n_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}$; $n_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$. Необходимо отметить, что на концах конечного элемента при $x = x_i$ коэффициенты $n_i = 1$, и $n_j = 0$, тогда как при $x = x_j$ – наоборот: $n_i = 0$, а $n_j = 1$. Линейные функции n_i и n_j аргумента x в методе конечных элементов обычно называют функциями формы.

Вывод выражений (1) – (6) удобно выполнять в матрично-векторной форме. При этом достаточно просто осуществляется переход к двумерным и многомерным конечным элементам.

Вводя в рассмотрение следующие вектора и матрицы:

$$\bar{\Phi} = [\Phi_i \ \Phi_j]^*, \quad (7)$$

$$\bar{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2]^*, \quad (8)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}. \quad (9)$$

$$\bar{\beta} = [1 \ x]^*, \quad (10)$$

получим:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \mathbf{V}^{-1} \cdot \bar{\Phi}, \\ \bar{\mathbf{n}}^* &= \bar{\beta}^* \cdot \mathbf{V}^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

В выражениях (7), (8), (10) и (11) символом * обозначена операция транспонирования векторных величин.

Дальнейшее рассмотрение применения метода конечных элементов проведем на иллюстративных примерах обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений целого и дробного порядков.

Пример 1. *Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.* Определить приближенное решение дифференциального уравнения

$\frac{d\varphi(x)}{dx} + 5x = 0$ на интервале изменения аргумента $0 \leq x < 2$ при краевом условии $\varphi(2) = -1$, используя три конечных элемента с равномерным разбиением интервала изменения аргумента.

На первом этапе решения производится выбор и размещение системы конечных элементов. Размещение трех одномерных конечных элементов a, b, c показано на рис. 2. Узловые значения функции решения в узлах системы конечных элементов $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ предполагаются неизвестными, используются в символьном виде при составлении математических моделей конечных элементов и подлежат определению при решении задачи.

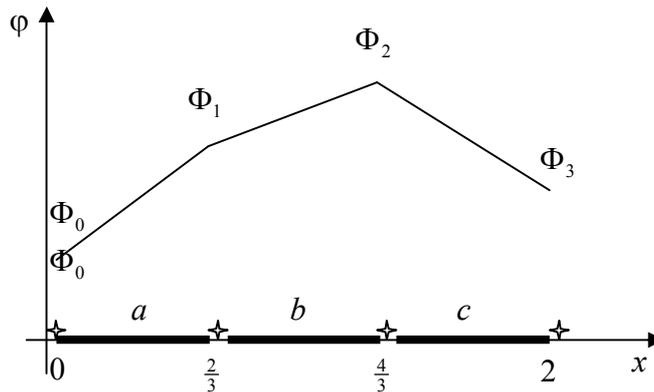


Рис. 2. Схема размещения конечных элементов

Следующим этапом решения является составление уравнений аппроксимирующих функций конечных элементов.

Конечный элемент a. Вектор узловых значений функции решения в соответствии с выражением (7)

$$\bar{\Phi}_a = [\Phi_0 \ \Phi_1]^*.$$

Матрица узловых координат конечного элемента (выражение (9)):

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Вектор коэффициентов аппроксимирующей функции элемента:

$$\bar{\alpha}_a = \mathbf{V}_a^{-1} \cdot \bar{\Phi}_a = \left[\Phi_0, -\frac{3}{2}\Phi_0 + \frac{3}{2}\Phi_1 \right]^*.$$

Аппроксимирующая функция конечного элемента:

$$\varphi_a = \bar{\alpha}_a \cdot \bar{\beta} = \Phi_0 + x \left(-\frac{3}{2}\Phi_0 + \frac{3}{2}\Phi_1 \right). \quad (12)$$

Параметры второго и третьего конечных элементов определяются аналогичным образом и приводятся без комментариев.

Конечный элемент b:

$$\bar{\Phi}_b = [\Phi_1 \ \Phi_2]^*,$$

$$\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_b &= \mathbf{V}_b^{-1} \cdot \bar{\Phi}_b = \left[2\Phi_1 - \Phi_2, -\frac{3}{2}\Phi_1 + \frac{3}{2}\Phi_2 \right]^*, \\ \varphi_b &= \bar{\mathbf{a}}_b \cdot \bar{\beta} = 2\Phi_1 - \Phi_2 + x \left(-\frac{3}{2}\Phi_1 + \frac{3}{2}\Phi_2 \right).\end{aligned}\quad (13)$$

Конечный элемент с:

$$\bar{\Phi}_c = [\Phi_2 \ \Phi_3]^*, \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_c = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_c = \mathbf{V}_c^{-1} \cdot \bar{\Phi}_c = \left[3\Phi_2 - 2\Phi_3, -\frac{3}{2}\Phi_2 + \frac{3}{2}\Phi_3 \right]^*, \quad (16)$$

$$\varphi_c = \bar{\mathbf{a}}_c \cdot \bar{\beta} = 3\Phi_2 - 2\Phi_3 + x \left(-\frac{3}{2}\Phi_2 + \frac{3}{2}\Phi_3 \right). \quad (17)$$

После формирования системы конечных элементов и их аппроксимирующих функций производится подстановка аппроксимирующих функций в вариационный функционал, минимизация которого эквивалентна решению уравнения. Такой функционал имеет различный вид в зависимости от применяемого метода оптимизации (Галеркина, Ритца, множителей Лагранжа, наименьших квадратов). В примерах будет использован метод минимизации интеграла квадрата функции невязки уравнения при подстановке в него аппроксимирующих функций.

Формирование функционала:

$$J = \int_0^{2/3} \left(\frac{d\varphi_a}{dx} + 5x \right)^2 dx + \int_{2/3}^{4/3} \left(\frac{d\varphi_b}{dx} + 5x \right)^2 dx + \int_{4/3}^2 \left(\frac{d\varphi_c}{dx} + 5x \right)^2 dx \Rightarrow \min(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2). \quad (18)$$

После интегрирования выражения (18) по x и подстановки пределов получено выражение, в которое входят в качестве неизвестных величин узловые значения функции решения $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$. Условиями минимума функционала являются равенства нулю производных функционала по Φ_0, Φ_1, Φ_2 (значение $\Phi_3 = -1$ по условиям задачи):

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \Phi_k} \right|_{k=0,1,2} = 0.$$

После несложных преобразований можно получить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 3\Phi_0 - 3\Phi_1 &= \frac{10}{3}, \\ -3\Phi_0 + 6\Phi_1 - 3\Phi_2 &= \frac{20}{3}, \\ -3\Phi_1 + 6\Phi_2 &= \frac{11}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Решив систему уравнений (19) получим следующие узловые значения функции решения: $\Phi_0 = 9$, $\Phi_1 = \frac{71}{9}$, $\Phi_2 = \frac{41}{9}$. Подстановка этих значений в выражения (12), (13), (17) приводит к таким аппроксимирующим функциям конечных элементов:

$$\varphi_a(x) = 9 - \frac{5}{3}x, \quad \varphi_b(x) = \frac{101}{9} - 5x, \quad \varphi_c(x) = \frac{47}{3} - \frac{25}{3}x.$$

Визуализация точного решения дифференциального уравнения ($\varphi(x) = 9 - \frac{5}{2}x^2$) и его аппроксимация по методу конечных элементов показаны на рис. 3.

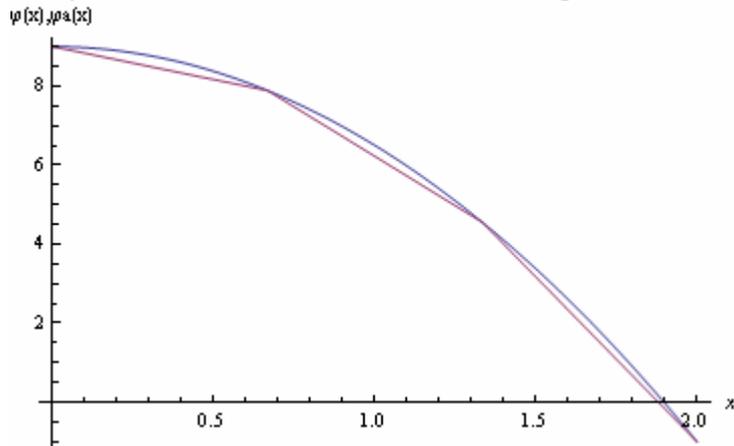


Рис. 3. Решение дифференциального уравнения и его аппроксимация тремя конечными элементами

В приведенном примере проиллюстрирован порядок реализации метода конечных элементов. Вычислительные сложности, возникающие при использовании большого количества конечных элементов, разрешимы лишь при использовании специальных программных комплексов, автоматизирующих формирование сети конечных элементов, системы уравнений и определяющих аппроксимацию и визуализацию решения.

Пример 2. Найти аппроксимационное решение дифференциального уравнения нецелого порядка $\frac{d^{0,5}u(t)}{dt^{0,5}} + 2u(t) = 0$, $u(0) = 1$ на интервале изменения аргумента $0 \leq t < 1$, используя систему из 40 конечных элементов. Предварительно преобразуем уравнение в интегральное, применив к нему оператор интегрирования порядка 0,5:

$$u(t) - u(0) + \frac{2}{\Gamma(0,5)} \int_0^t (t - \tau)^{-0,5} u(\tau) d\tau = 0. \quad (20)$$

Программа решения задачи в среде системы *Mathematica*® с необходимыми комментариями:

Задание шага изменения аргумента (длины конечного элемента) и числа элементов:

h := 0.025; m := 40;

Формирование граничных координат конечных элементов и задание узловых переменных:

t[i_] := (i - 1) h;

tt = Table[t[i], {i, m + 1}];

U[i_] := U_i;

UU = Table[U[i], {i, 0, m}];

{0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2, 0.225,
0.25, 0.275, 0.3, 0.325, 0.35, 0.375, 0.4, 0.425, 0.45, 0.475,
0.5, 0.525, 0.55, 0.575, 0.6, 0.625, 0.65, 0.675, 0.7, 0.725,

tt 0.75, 0.775, 0.8, 0.825, 0.85, 0.875, 0.9, 0.925, 0.95, 0.975, 1.}

{U₀, U₁, U₂, U₃, U₄, U₅, U₆, U₇, U₈, U₉, U₁₀, U₁₁, U₁₂, U₁₃,
U₁₄, U₁₅, U₁₆, U₁₇, U₁₈, U₁₉, U₂₀, U₂₁, U₂₂, U₂₃, U₂₄, U₂₅, U₂₆,

UU U₂₇, U₂₈, U₂₉, U₃₀, U₃₁, U₃₂, U₃₃, U₃₄, U₃₅, U₃₆, U₃₇, U₃₈, U₃₉, U₄₀}

Формирование системы конечных элементов (реализация выражений (14) – (16):

V[i_] := {{1, (i - 1) h}, {1, i h}};

VV = Table[V[i], {i, m}];

```

Uu[i_] := {UW[[i]], UW[[i + 1]]};
α[i_] := Inverse[VW[[i]]].Uu[i];

```

Формирование функций аппроксимации аргументов 't' и 'x' (реализация выражения (17)):

```

ua[i_] := α[i].{1, t};
uax[i_] := α[i].{1, x};

```

Формирование вариационного функционала (интеграл квадрата функции невязки уравнения (18)):

$$r[i_] := \int_{t[i]}^{t[i+1]} \left(u_a[i] + \frac{2}{\text{Gamma}[0.5]} * \int_0^t (t-x)^{-0.5} * u_{ax}[i] dx - 1 \right)^2 dt;$$

$$R = \sum_{i=1}^m r[i];$$

Формирование условий минимума функционала и решение полученной системы уравнений:

```

eq[i_] := DU[i]R == 0;
Solve[Table[eq[i], {i, m}], Table[U[i], {i, m}}];

```

Подстановка в полученное решение начального условия:

```

ua = % /. U0 → 1; Ua = ua[[1]];

```

Формирование массива результатов решения задачи:

```

Table[Ua[[i, 2]], {i, m}
{0.697096, 0.653763, 0.600771, 0.565173, 0.536642, 0.513087, 0.493098,
0.475787, 0.460559, 0.446994, 0.434785, 0.423701, 0.413564, 0.404231,
0.395589, 0.387545, 0.380021, 0.372952, 0.366281, 0.359961, 0.353949,
0.348209, 0.342707, 0.337413, 0.332301, 0.327346, 0.322526,
0.31782, 0.313208, 0.308672, 0.304194, 0.299759, 0.29535, 0.290953,
0.286552, 0.282135, 0.277687, 0.273195, 0.268646, 0.264027}

```

Визуализация полученного решения (рис. 4):

```

ListPlot[%]

```

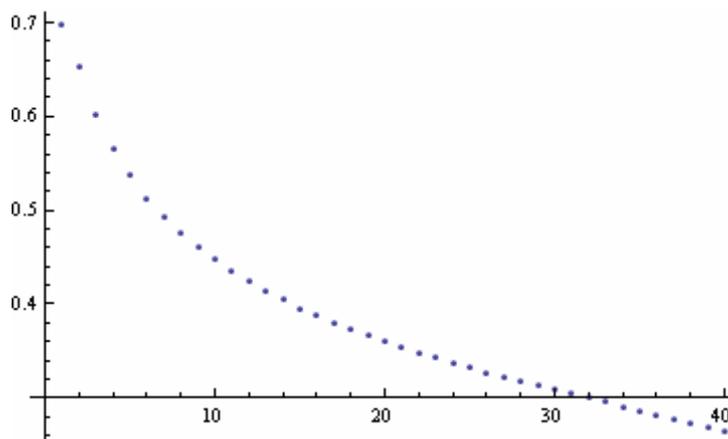


Рис.4. График ординат аппроксимации решения на правых границах конечных элементов

Заключение. В рассмотренных примерах приведены фрагменты программ и результатов решений. В частности, в примере 2 не показан процесс формирования аппроксимации решения на конечных элементах, система уравнений для определения узловых ординат конечных элементов в связи с их громоздкостью. Метод может быть полезен для решения достаточно широкого круга интегро-дифференциальных уравнений целого, дробного и смешанного порядков.

Список литературы

1. *Васильев В. В.* Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем с применением системы MATLAB / FEMLAB / В. В. Васильев, Л. А.Симак, Ю. Е. Гребенович – К.: НАН Украины, 2010. – 80 с.
2. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям –диакоптика / Крон Г. – М.: Наука, 1972. – 543 с.
3. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей / Крон Г. – М.: Наука, 1978. – 720 с.
4. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов / Сегерлинд Л. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. *FEMLAB User's Guide and Introduction*, COMSOL AB, Stockholm, Sweden, 2001. – 404 p.
6. *Pankaj Kumar, Om Prakash Agrawal* An approximate method for numerical solution of fractional differential equations // *Signal Processing*. – 2006. – Vol. 86, P. 2602 – 2610.
7. *Wolfram S.* The Mathematica Book. – Wolfram Media & Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
8. *Zimmerman W. B. J.* Process Modeling and Simulation with Finite Element Methods, World Scientific, 2004. – 382 p.

В. В. Васильев, Л. О. Сімак, Ю. Є. Гребеновіч

Апроксимаційні розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь нецілого (дробового) порядку за методом кінцевих елементів

Розглянуто застосування одновимірного методу кінцевих елементів для отримання наближених розв'язків звичайних лінійних інтегро-диференціальних рівнянь нецілого (дробового) порядку. Порядок застосування методу кінцевих елементів показано на ілюстративних прикладах. Наведено фрагменти програм у системі Mathematica® з докладними коментарями.

V. V. Vasylyev, L. A. Simak, Ju. E. Grebenovich

Approximate solution of integro-differential equations of noninteger (fractional) order by finite element method

This article examines the use of one-dimensional finite element method to obtain approximate solutions of ordinary integro-differential equations of noninteger (fractional) order. The application of finite element method is shown in the illustrative examples. The fragments of programs in the Mathematica® program area are shown with detailed comments.