

УДК 519.213(045)

¹О. І. Красильніков, канд. фіз.-мат. наук,
²В. С. Берегун

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОДАНЬ ЩІЛЬНОСТІ ІМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

^{1,2}Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
e-mail: ¹tangorov@voliacable.com, ²viktorberegun@i.ua

Обрано форму ортогонального подання щільності імовірності з ваговою функцією, на її основі запропоновано нову форму подання. Вибрано вагову функцію, виходячи з розв'язків рівняння Пірсона, що визначають класичні ортогональні поліноми. Узгоджено подання для випадкових процесів з відомими числовими характеристиками.

Ключові слова: випадковий процес, щільність імовірності, ортогональне подання, вагова функція, функціональне перетворення.

Вступ. Закон розподілу багатьох реальних випадкових сигналів суттєво відрізняється від гауссівського [1 – 3]. До таких сигналів належать флуктуаційні сигнали [4], ехосигнали від об'єктів складної структури [5; 6] та ін. Крім того, функціональними перетвореннями негауссівських випадкових процесів лінійними та нелінійними системами знайти щільність імовірності відгуку в більшості випадків не вдається в замкненому вигляді [1; 7 – 10].

Випадковий процес на виході лінійної системи буде гауссівським, якщо вхідний процес гауссівський, а для негауссівського вхідного процесу можуть відбуватись ефекти нормалізації і денормалізації вихідного процесу. Для лінійних систем зазвичай можливий ефект нормалізації, однак є випадки [11], коли, незважаючи на інерційність системи, відбувається ефект денормалізації. Ефект нормалізації проявляється в зменшенні кумулянтів на виході системи порівняно з кумулянтами на вході, за денормалізації відбувається протилежний ефект. Під час дослідження моделей флуктуаційних випадкових процесів [4], які також можна розглядати як відгук лінійної системи на вплив негауссівських білих шумів, отримати щільність імовірності можна лише в окремих випадках, що є наслідком безмежної подільності їх законів розподілу.

Проходження випадкових сигналів через нелінійні системи [12], наприклад, через типовий тракт виявлення [8; 13], принципово змінює закон розподілу з причини наявності в їх складі нелінійного (безінерційного) перетворювача. Відома лише невелика кількість точних розв'язків задачі визначення щільності імовірності процесу на виході типового тракту, знайдені за деяких спеціальних припущень про нелінійність характеристики.

Незважаючи на складність знаходження в згаданих випадках щільності імовірності, визначити числові характеристики (моменти чи кумулянти) досліджуваних процесів за відомим законом розподілу процесу на вході системи можна доволі просто. Ці характеристики використовують [7 – 10] для знаходження одновимірних щільностей імовірності наближеними методами, серед яких поширені ортогональні подання щільності імовірності [14; 15]. Ортогональні подання набули широкого застосування [1; 7 – 10; 12], однак їх подальше використання обмежується наявністю деяких невіршених питань, зокрема, існуванням різних форм ортогональних подань.

Метою цієї роботи є систематизація ортогональних подань щільності імовірності випадкових процесів.

Постановка задачі. Будемо вважати для спрощення, що $\xi(t)$ – стаціонарний випадковий процес зі щільністю імовірності $p(x)$.

Нехай щільність імовірності $p(x)$ належить простору $L_2[a, b, p]$, тобто для неї виконується умова

$$\int_a^b p^2(x) \rho(x) dx < \infty, \quad (1)$$

де вагова функція $\rho(x)$ має задовольняти умови

$$\rho(x) \geq 0; \quad \int_a^b \rho(x) dx < \infty. \quad (2)$$

Крім того, у випадку нескінченних меж (a, b) (чи принаймні однієї з них) існують степеневі моменти [16] ρ_k вагової функції $\rho(x)$:

$$\rho_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

Припустімо, що в $L_2[a, b, \rho]$ визначена деяка система ортогональних функцій $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, умова ортогональності для яких записується таким чином:

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) \rho(x) dx = \|\varphi_k\|^2 \delta_{km}, \quad (4)$$

де δ_{km} – символ Кронекера; $\|\varphi_k\|$ – норма функції $\varphi_k(x)$:

$$\|\varphi_k\| = \left[\int_a^b \varphi_k^2(x) \rho(x) dx \right]^{1/2}.$$

Зауважимо, якщо $\|\varphi_k\| = 1$ для всіх k , то система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ є ортонормованою.

Щільність імовірності можна розкласти в ряди, використовувати різні системи базисних функцій, побудованих на основі ортогональних функцій $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Розглянемо питання вибору форми ортогонального подання, вибору вагових функцій і узгодження подань для випадкових процесів з довільними числовими характеристиками.

1. Вибір форми ортогонального подання. Щільність імовірності $p(x)$, що задовольняє умову (1), можна розкласти в ортогональний ряд за системою базисних функцій $g_k(x, v)$, які пов'язані з функціями $\varphi_k(x)$ і $\rho(x)$ таким чином:

$$g_k(x, v) = \varphi_k(x) \rho^v(x), \quad (5)$$

де $v \geq 0$ – деякий параметр.

У загальному випадку подання за функціями (5) має вигляд

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v) g_k(x, v), \quad (6)$$

де $c_k(v)$ – коефіцієнти розкладу подання (6) з параметром v .

Залежно від конкретних значень параметра v можна отримати різні форми ортогональних подань $p(x)$, найбільш поширені з яких такі.

1. Форма I. $v = 0$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(0) g_k(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(0) \varphi_k(x). \quad (7)$$

2. Форма II: $\nu = 1/2$.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1/2) g_k(x, 1/2) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1/2) \varphi_k(x) \rho^{1/2}(x). \quad (8)$$

3. Форма III. $\nu = 1$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1) g_k(x, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1) \varphi_k(x) \rho(x). \quad (9)$$

З виразу (6), використовуючи умову ортогональності (4), отримуємо загальну формулу для коефіцієнтів $c_k(\nu)$ розкладу (6):

$$c_k(\nu) = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b p(x) g_k(x, 1-\nu) dx = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b p(x) \varphi_k(x) \rho^{1-\nu}(x) dx. \quad (10)$$

Важливо відзначити, що вираз (10) також можна записати у вигляді

$$c_k(\nu) = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} M \{ \varphi_k(\xi) \rho^{1-\nu}(\xi) \}.$$

Тоді, якщо $\xi_i, i = \overline{1, N}$ – незалежна вибірка значень випадкового сигналу, то оцінки коефіцієнтів розкладу (10) знаходять таким чином:

$$\bar{c}_k(\nu) = \frac{1}{N \|\varphi_k\|^2} \sum_{i=1}^N \varphi_k(\xi_i) \rho^{1-\nu}(\xi_i).$$

Для встановлення зв'язку між коефіцієнтами розкладу форм (7 – 9) з параметрами ν_1 і ν_2 підставимо у вираз (10) для ν_1 подання (6) для ν_2 та отримаємо:

$$c_k(\nu_1) = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\nu_2) \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) \rho^{1-\nu_1+\nu_2}(x) dx.$$

Остання формула має сенс за виконання умови:

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) \rho^{\beta}(x) dx < \infty$$

для довільних k і j , якщо $\beta = 0, 1/2, 3/2, 2$.

Зазвичай ортогональні функції $\varphi_k(x)$ являють собою поліноми вигляду

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^k h_{kj} x^j, \quad (11)$$

де h_{kj} – деякі дійсні числа, що однозначно визначаються конкретною ваговою функцією $\rho(x)$. Безпосередньо з формули (10) видно, що коефіцієнти розкладу для форми III (9) набувають вигляду

$$c_k(1) = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \sum_{j=0}^k h_{kj} \alpha_j, \quad (12)$$

де α_j – j -й початковий момент випадкового процесу $\xi(t)$.

Таким чином, в подальшому доцільно використовувати форму III, оскільки для неї

коефіцієнти розкладу можна знайти без знання щільності ймовірності $p(x)$, а лише за відомими початковими моментами розподілу, тоді як для знаходження коефіцієнтів розкладу форм I–II потрібно знати вираз $p(x)$. Надалі коефіцієнти розкладу $c_k(1)$ будемо позначати через c_k .

4. Форма IV: Оскільки коефіцієнти розкладу (12) форми III

$$p(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (13)$$

є функціями початкових моментів α_j , то здійснимо подання (13) безпосередньо за початковими моментами, використовуючи вираз (11). Для цього підставимо вираз (12) у рівняння (13):

$$p(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \sum_{j=0}^k h_{kj} \alpha_j \right] \varphi_k(x). \quad (14)$$

Запишемо в явному вигляді декілька складових виразу (14):

$$\begin{aligned} p(x) = \rho(x) & \left[\|\varphi_0\|^{-2} \varphi_0(x) h_{00} \alpha_0 + \right. \\ & + \|\varphi_1\|^{-2} \varphi_1(x) (h_{10} \alpha_0 + h_{11} \alpha_1) + \\ & + \|\varphi_2\|^{-2} \varphi_2(x) (h_{20} \alpha_0 + h_{21} \alpha_1 + h_{22} \alpha_2) + \\ & \left. + \|\varphi_3\|^{-2} \varphi_3(x) (h_{30} \alpha_0 + h_{31} \alpha_1 + h_{32} \alpha_2 + h_{33} \alpha_3) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Виконуючи групування в останньому виразі відносно початкових моментів α_j , отримуємо нову форму ортогонального подання щільності ймовірності:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j Q_j(x), \quad (15)$$

де

$$Q_j(x) = \rho(x) \sum_{k=j}^{\infty} \|\varphi_k\|^{-2} \varphi_k(x) h_{kj}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Із формули (16) видно, що базисні функції $Q_j(x)$ однозначно визначаються ваговою функцією $\rho(x)$ і поліномами $\varphi_k(x)$, які лишаються незмінними для будь-яких випадкових процесів. Оскільки у формі IV (15) відбувається подання за моментами, то саме у цьому разі найпростіше знайти оцінки щільності ймовірності [17].

2. Вибір вагової функції. Розглянемо тепер питання вибору вагової функції в поданні (13). У праці [16] доведено теорему, згідно з якою для довільної вагової функції $\rho(x)$ існує єдина послідовність поліномів $\varphi_k(x)$. Обмежимося розглядом лише унімодальних неперервних щільностей ймовірності, тобто таких, які задовольняють диференціальне рівняння Пірсона.

Будемо вважати, що вагова функція $\rho(x)$ також є розв'язками рівняння Пірсона:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x) \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \rho(x) \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (17)$$

де a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 – деякі дійсні сталі, $A(x), B(x)$ – поліноми.

У праці [16] показано, що тільки три із семи розв'язків рівняння (17) визначають вагові функції $\rho(x)$ для всієї зв'язної області їх існування. Ці розв'язки визначають три системи ортогональних поліномів. Розглянемо детальніше ці випадки.

1. Випадок $b_1 = b_2 = 0, b_0 \neq 0$ – поліном $B(x)$ рівняння (17) є сталою величиною. У цьому випадку з рівняння (17) отримуємо співвідношення

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x) \frac{a_0 + a_1 x}{b_0},$$

яке після перенесення початку координат набуває вигляду

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x)(-2\beta x).$$

Розв'язком цього рівняння є функція $\rho(x) = Ce^{-\beta x^2}$, $x \in (-\infty; \infty)$, яка може бути ваговою, якщо $C > 0, \beta > 0$. Якщо ж $C = 1$ і $\beta = \frac{1}{2}$, вагова функція визначає систему поліномів Ерміта (Чебишова–Ерміта).

2. Випадок $b_2 = 0, b_1 \neq 0$ – поліном $B(x)$ має один корінь. Рівняння (17) набуває вигляду

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x) \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x},$$

перемістивши початок координат, отримуємо:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x) \left(\frac{a}{x} - b \right).$$

Розв'язком цього рівняння є функція $\rho(x) = Cx^a e^{-bx}$, $x \in (0; \infty)$, яка може бути ваговою функцією, якщо $C > 0, a > -1, b > 0$. Якщо ж $C = 1$ і $b = 1$, вагова функція визначає систему поліномів Лагерра (Чебишова–Лагерра).

3. Випадок, коли поліном $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ має два дійсні й різні корені d_1 і d_2 . Тоді рівняння (17) можна записати таким чином:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x) \frac{a_0 + a_1 x}{b_2 (x - d_1)(x - d_2)}$$

і звести до вигляду

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \rho(x) \left(\frac{b}{x - d_1} - \frac{a}{d_2 - x} \right).$$

Розв'язком цього рівняння є вагова функція $\rho(x) = C(x - d_1)^b (d_2 - x)^a$, $x \in (d_1; d_2)$, яка може бути ваговою функцією, якщо $C > 0, a > -1, b > -1$. Якщо $C = 1, d_1 = -1$ і $d_2 = 1$, вагова функція визначає систему поліномів Якобі, окремими випадками яких є ультрасферичні поліноми – Лежандра і Чебишова першого та другого роду.

Як вагову функцію можна обрати іншу функцію, що задовольняє умови (2) і (3), наприклад, показникова функція [18; 19], для якої ортогоналізацією за Шмідтом можна

знайти відповідні ортогональні поліноми.

Ортогональні поліноми Ерміта, Лагерра і Якобі [16] є класичними ортогональними поліномами, найбільш повно і глибоко дослідженням яких займався російський математик П.Л. Чебишов, який вважається засновником конструктивної теорії функцій [20].

3. Ортогональні подання для випадкових процесів з довільними числовими характеристиками. Використання наведених вище вагових функцій дозволяє виконувати ортогональні подання стандартних щільностей імовірності, які подібні цим ваговим функціям. У загальному випадку досліджувані щільності ймовірності необхідно узгодити зі стандартними шляхом лінійних перетворень, зокрема переміщенням осей координат (лінійний зсув) і зміною масштабу. Це можна зробити двома способами.

1. Зведенням випадкового процесу $\tilde{\xi}(t)$, який має щільність імовірності $\tilde{p}(x)$, до випадкового процесу стандартного вигляду $\xi(t)$ зі щільністю імовірності $p(x)$ таким перетворенням:

$$\xi(t) = G(\tilde{\xi}(t)) = \frac{\tilde{\xi}(t) - A}{B},$$

де $A \in (-\infty, \infty)$, $B > 0$ – деякі сталі, що виражаються через числові характеристики.

Тоді $p(x)$ і $\tilde{p}(x)$ будуть пов'язані таким чином:

$$p(x) = B \tilde{p}(A + Bx).$$

Ортогональним поданням для щільності імовірності $p(x)$ буде:

$$p(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

де c_k – коефіцієнти розкладу, що визначаються формулою

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b p(x) \varphi_k(x) dx.$$

2. Лінійним перетворенням ортогонального подання стандартного випадкового процесу $\xi(t)$ до процесу загального вигляду $\tilde{\xi}(t)$.

У цьому випадку випадковий процес

$$\tilde{\xi}(t) = G(\xi(t)) = A + B\xi(t).$$

Тоді $p(x)$ і $\tilde{p}(x)$ будуть пов'язані таким чином:

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{B} p\left(\frac{x - A}{B}\right).$$

Підставляючи рівняння (13) в останній вираз, отримуємо ортогональне таке подання:

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{B} \rho\left(\frac{x - A}{B}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k\left(\frac{x - A}{B}\right).$$

Отримані формули нескладно скоригувати для нестационарних випадкових процесів. Зокрема подання щільності імовірності для нестационарних процесів можна записати так:

$$\tilde{p}(x, t) = \frac{1}{B(t)} \rho \left(\frac{x - A(t)}{B(t)} \right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \varphi_k \left(\frac{x - A(t)}{B(t)} \right),$$

де $c_k(t)$ – коефіцієнти розкладу:

$$c_k(t) = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b p(x, t) \varphi_k \left(\frac{x - A(t)}{B(t)} \right) dx.$$

Висновки

1. Показано, що використання форм III і IV найбільш зручне для ортогональних подань щільності ймовірності, оскільки дозволяє виражати коефіцієнти розкладу через моменти процесу; для форм I і II необхідне знання аналітичного виразу щільності ймовірності.

2. Обґрунтовано вибір вагових функцій як розв'язків диференціального рівняння Пірсона для вагових функцій. Вони визначають класичні ортогональні поліноми – Ерміта, Лагерра і Якобі.

3. Узгодити ортогональні подання щільності ймовірності можна зведенням випадкового процесу до стандартного вигляду або лінійним перетворенням подання для стандартного процесу за умови знання відповідних числових характеристик процесів.

Список літератури

1. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований / А. Н. Малахов. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
2. Кунченко Ю. П. Нелинейная оценка параметров негауссовых радиотехнических сигналов / Ю. П. Кунченко. – К.: Вища шк., 1987. – 190 с.
3. Шелухин О. И. Негауссовские процессы / О. И. Шелухин, И.В. Беляков. – СПб.: Политехника, 1992. – 312 с.
4. Горовецкая Т. А. Модели и законы распределения флуктуационных сигналов / Т. А. Горовецкая, А. И. Красильников, Чан Хыу Дат // Электроника и связь. – 2000. – № 9. – С. 5 – 14.
5. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.3. Обработка сигналов в радио- и гидролокации и прием случайных гауссовских сигналов на фоне помех / Г. Ван Трис; пер. с англ. В. В. Липьяйнена; под ред. В. Т. Горяинова. – М.: Сов. радио, 1977. – 664 с.
6. Гужавина Д. В. Экспериментальное исследование флуктуаций акустических сигналов, отраженных от морских судов / Д. В. Гужавина, Э. П. Гулин // Акустический журнал. – 2008. – Т.54, № 5. – С. 786 – 795.
7. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций / А. А. Свешников. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. / Б. Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1969. – Кн. 1. – 752 с.
9. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
10. Левин Б. Р. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления / Б. Р. Левин, В. Шварц. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
11. Зачепиская Л. П. О возможной денормализации случайных процессов некоторыми инерционными линейными системами / Л. П. Зачепиская // Радиотехника и электроника. – 1968. – Т. 13, №8. – С. 1452 – 1455.
12. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов / Р. Дёч; пер. с англ. Б. А. Смиренина; под ред. Б. Р. Левина. – М.: Сов. радио, 1965. – 206 с.

13. *Помехоустойчивость* типового тракта обнаружения сигналов / [Н. Г. Гаткин, В. А. Геранин, М. И. Карновский, Л. Г. Красный]. – К.: Техніка, 1971. – 204 с.
14. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер; пер. с англ. А. С. Момина и А. А. Петрова; под. ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 684 с.
15. *Кендалл М.* Теория распределений / М. Кендалл, А. Стьюарт; пер. с англ. В. В. Сазонова, А. Н. Ширяева; под. ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
16. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
17. *Берегун В. С.* Помилки експериментального визначення щільності імовірностей ергодичних випадкових процесів при їх ортогональному поданні / В. С. Берегун, О. І. Красильников // Електроніка і зв'язь. – 2009. – № 1 (48). – С. 5 – 14.
18. *Шалыгин А. С.* Прикладные методы статистического моделирования / А. С. Шалыгин, Ю. И. Палагин. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
19. *Лэннинг Дж.* Случайные процессы в задачах автоматического управления / Дж. Лэннинг, Р. Бэттин; пер. с англ. А. М. Баткова [и др.]; под ред. В. С. Пугачева. – М.: ИЛ, 1958. – 388 с.
20. *Бородин А. И.* Биографический словарь деятелей в области математики / А. И. Бородин, А. С. Бугай; под ред. И. И. Гихмана. – К.: Рад. шк., 1979. – 607 с.

А. И. Красильников, В. С. Берегун

Систематизация ортогональных представлений плотности вероятности случайных процессов

Выбрана форма ортогонального представления плотности вероятностей с весовой функцией, на её основе предложена новая форма представления. Осуществлён выбор весовой функции исходя из решений уравнения Пирсона, определяющих классические ортогональные полиномы. Согласовано представление для случайных процессов с известными числовыми характеристиками.

A. I. Krasilnikov, V. S. Beregun

Systematization of orthogonal representations of probability density functions of random processes

The form of orthogonal representation of probability density function is chosen with a weight function, on her basis the new form of representation is offered. The choice of weight function is carried out coming from the decisions of Pearson equation, which define classic orthogonal polynomials. Representation is concerted for random processes with the known numerical characteristics.