УДК 621.372(045)

О. Г. Гуйда, асп.

АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ СПЛАЙНІВ У ТЕХНОЛОГІЯХ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Інститут аерокосмічних систем управління НАУ, e-mail: guydasg@ukr.net

Розглянуто питання розв’язання задач ідентифікації сигналів у частотній та часовій областях. Розв’язано основні задачі побудови інтерполяційних сплайнових базисів.

Ключові слова: оброблення сигналів, алгоритми стиснення даних, цифрове відео, фотографії, сплайни, інтерполяційні сплайни, сплайнові базиси.

Вступ. Якісні зміни в інформаційних технологіях за останні десять років зробили можливим загальне впровадження складних методів оброблення інформації у широку інженерну практику. Потужність персональних комп’ютерів загального призначення дає змогу обробляти відеосигнали в реальному часі. Потужність систем оброблення цифрових даних підвищується двома напрямами: зростання швидкості роботи електронних компонентів та створення нових потужних алгоритмів оброблення даних. Ці напрями є як конкуруючими, так і тісно взаємозв’язаними. Переважний розвиток одного напряму неминуче ставить нові вимоги до другого, що пов’язано з освоєнням нових сфер застосування цифрового оброблення та її якісно нового рівня. Так, наприклад, інтенсивний розвиток електроніки забезпечив широкі можливості для оброблення аудіо- та відеоданих. Це стимулювало розроблення якісно нових алгоритмів стиснення даних (JPEG, wavelet, MPEG). Результатом цього процесу є інтенсивний розвиток цифрової фотографії, відео- та аудіотехніки, інтернет-телефонії, інтерактивного радіо та телебачення, тощо.

Процес розроблення й удосконалення алгоритмів далеко не завершений, або такий, що досягнув рівня потенційних можливостей, адекватних рівню електроніки. Особливо це стосується сфери оброблення емпіричних сигналів, характерною особливістю яких є наявність суттєвої шумової складової. Гнучким і потужним комп’ютерним системам не відповідають методи оброблення сигналів, налаштовані на обмежені технічні ресурси, і відносно невеликі можливості попередніх поколінь процесорів, а також орієнтовані на аналогові розв’язання з обмеженою точністю і не здатні використовувати потенційні можливості сучасних цифрових систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Обсяг публікацій, що стосуються сплайнів на теренах СНД, дуже обмежений і мають більш математичний, ніж прикладний характер. Під прикладним характером мається на увазі можливість безпосереднього застосування результатів для оброблення цифрових сигналів. В Україні розвитком теорії сплайнів займаються: Б. Г. Марченко, В. П. Денисюк, І. В. Шелевицький, М. О. Шутко, В. О. Шутко [1 – 4]. Прикладні роботи стосуються в переважній більшості комп’ютерних систем геометричного проектування та комп’ютерної графіки. Навіть представлені в системах комп’ютерної графіки інтерполяційні сплайни будуються в пакетному режимі, і навіть не дуже глибокий пошук застосувань сплайнів відображає очевидний контраст між обсягом математичних досліджень і обсягом інженерних застосувань.

Значним кроком у сфері застосування сплайнів для оброблення сигналів став розвиток wavelets методів. Відповідно до цих методів сплайни є одним з багатьох можливих локальних wavelet базисів. Wavelets методи розроблені саме для алгоритмів реального часу і використовуються для стиснення та згладжування даних. Методи надзвичайно швидко розвиваються і популярні завдяки наявності міцної теоретичної основи та можливості оброблення складних сигналів, тому сфера їх застосування досить широка.

Постановка завдання. Сплайни є ровесниками комп’ютерних систем і тісно пов’язані з розвитком інформаційних технологій. Інформаційна сплайн-технологія охоплює широку сферу застосування і потребує розроблення методів адаптації сплайнів до частотних властивостей сигналів для розв’язання задач ідентифікації сигналів у частотній та часовій чи просторовій областях. Побудова числової моделі може мати як окреме прикладне значення, так і є необхідною для вибору чи синтезу сплайнового базису, що максимально відповідав би характеру вхідних даних.

Виклад основного матеріалу. Вейвлети беруть початок із квадратурних дзеркальних фільтрів (quadrature mirror filter, QMF), котрі мають імпульсні характеристики h та g і фільтрують сигнал, поділений на непарні та парні відліки відповідно. Фільтри спроектовано так, що виконується умова точної реконструкції фільтрованих сигналів:

$$H\left(z^{-1}\right)H(z)+G\left(z^{-1}\right)G(z)=2\,;$$

$$H\left(z^{-1}\right)H(-z)+G\left(z^{-1}\right)G(-z)=0\,.$$

Фільтр із $H(z)$ (ФНЧ) відповідає за інтерполяцію, а $G(z)$ (ФВЧ) – за формування залишків інтерполяції. Частина реалізацій таких фільтрів реалізує інтерполяцію в явному вигляді. Вхідний сигнал x розкладається на дві послідовності d_2 – непарних відліків і v_1 – нев’язок інтерполяції парних відліків. Послідовно застосовуючи процедуру до d_i – послідовностей непарних відліків, отримуємо пірамідальне подання вхідного сигналу у вигляді низькочастотної складової d_n та залишків інтерполяції v_{n-1}, ..., v_1. Такій процедурі відповідає інтерполяція сигналу в базисі скейлінг функцій і вейвлетів. Якщо базиси ортогональні, то маємо ортогональний багатомасштабний аналіз (ОМА). Недоліками ОМА є несиметричність фільтрів і вузький клас базисів (Хаара і поліноми Дебеші). Клас базисів розширено в біортогональному багатомасштабному аналізі (ВМА), де застосовують біортогональні вейвлети. Ідея полягає у застосуванні для розкладання й відновлення різних пар фільтрів: (h, g) – основні, $(\tilde{h}, \tilde{g})$ – дуальні. Зміщення основних базисів ортогональні дуальним, але не ортогональні між собою. До біортогональних належать і вейвлети зі скейлінг функціями, В-сплайнами. Фільтри в біортогональних вейвлетах можуть бути симетричними. Практична реалізація вейвлет-перетворень має два основні алгоритми: алгоритм Малла (Mallat algorithm) швидкого вейвлет-перетворення (WFT) і ліфтінг-алгоритм. Для роботи з багатоканальними сигналами розроблено мультивейвлети (multiwavelets).

Сфера застосування wavelet методів дуже широка. Серед перспективних завдань відзначено задачі регуляризації та згладжування емпіричних даних із значним рівнем шумів та створення цифрових сплайн-фільтрів та швидких алгоритмів. Найбільш цікавими є сфери застосування сплайнів для оброблення зображень та звукових сигналів, включаючи розроблення цифро-аналогових та аналого-цифрових перетворювачів із застосуванням сплайнів.

Сплайни та wavelet функції досить сильно переплітаються, проте сплайни не є домінуючими. Вони швидше складають певну підмножину більш загального класу локальних функцій.

Переваги сплайнів не проявилися суттєвіше тому, що wavelet методи використовують лише двократну інтерполяцію і вимагають ортогональності базисів. На малих проміжках інтерполяції зі сплайнами успішно конкурують інші локальні функції. Фактично використовується в основному лише локальність сплайнового базису, в той час, як два інші фактори сплайнів – гладкість та здатність наближати на значних проміжках – не є принциповими для wavelets методів.

Інформаційна сплайн-технологія має охоплювати широку сферу застосування і має включати:

– розв’язання задач ідентифікації сигналів у частотній та часовій чи просторовій областях. Побудова числової моделі може мати як окреме прикладне значення, так і є необхідною для вибору чи синтезу сплайнового базису, що максимально відповідав би характеру вхідних даних;

– сплайн-фільтрацію сигналів. Очевидно, що варто говорити про алгоритми фільтрації, що реалізують очевидні переваги сплайнів у поєднанні з високою ефективністю розрахунків.

Для реалізації зазначених вище основних завдань необхідно:

– побудувати згладжувальний сплайн на оптимальних (або близьких до оптимальних) сітках вузлів;

– побудувати сплайнові базиси із заданими частотними властивостями;

– побудувати інтерполяційні сплайни без розв’язування системи інтерполяційних рівнянь;

– створити ефективні швидкі алгоритми фільтрації сигналів із шумами.

Розглянемо загальний підхід до побудови інтерполяційних сплайнів.

Розглянемо значення сплайна $S(x)$ у точці x, яка належить i-му фрагменту сплайна, обмеженому вузловими точками: x_i, x_{i+1}. Для довільного полінома n-го порядку (n – парне число) маємо:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i(x), \tag{1}$$

де $B_i(x)$ – лінійно незалежні, неперервні функції певного виду; a_i – числові коефіцієнти.

Для цього полінома знайдемо розв’язок інтерполяційної задачі на множині вузлів інтерполяції $\{x_0, x_1, ..., x_{m-1}\}$. Вважатимемо, що вузли інтерполяції збігаються з вузлами сплайна і виконується умова $x_i < x_{i+1}$:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = \overline{0, m-1},$$

де $f(x_i)$ – значення інтерполяційної функції у вузлових точках.

Задача матиме однозначний розв’язок за умови наявності $m = n$ вузлів інтерполяції. Для m вузлів система з m рівнянь має вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0), \\ P_n(x_1) = f(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x_{m-1}) = f(x_{m-1}). \end{array}\right\}$$

Якщо $m = n$, маємо загальновідомий спосіб інтерполяції. Розглянемо випадок, коли $n = 2m$. Для однозначного розв’язку доповнимо систему з m рівнянь m рівняннями з похідними. Вимагатимемо рівності у вузлах не лише значень $f(x_i)$, але й першої похідної $f'(x_i)$. Задавши значення першої похідної у вузлах сплайна, ми задаємо нахил дотичної у точках стискання фрагментів сплайна. В матричному вигляді маємо: **BA=F**, тоді:

$$\left.\begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0), \\ P_n(x_1) = f(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x_{m-1}) = f(x_{m-1}), \\ P_n'(x_0) = f'(x_0), \\ P_n'(x_1) = f'(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n'(x_{m-1}) = f'(x_{m-1}). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Розв'язавши систему рівнянь (2) методом Крамера, знаходимо:

$$a_i = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{ki} f(x_k)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{m-ki} f'(x_k)}{\Delta},$$

де Δ_{ki} – алгебричне доповнення матриці планування **B**; Δ – детермінант матриці **B**.

Отримані значення підставимо в рівняння (1), та зведемо подібні:

$$P_n(x) = \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \tilde{\mathrm{X}}_k(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \tilde{\tilde{\mathrm{X}}}_k(x) \right].$$

Таким чином ми визначили базисні функції $\tilde{\mathrm{X}}_k(x)$ та $\tilde{\tilde{\mathrm{X}}}_k(x)$ в лагранжевій формі базису.

Звівши подібні, отримаємо для $x \in [x_{m/2-1}, x_{m/2})$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \tilde{\mathrm{X}}_k(x).$$

За допомогою цього виразу можна визначити значення сплайна на одному фрагменті через значення в обмеженій кількості вузлових точок. Тобто маємо локальний ермітів-сплайн.

Для сплайна, що складається з R фрагментів, отримаємо:

$$S(x) = \sum_{j=0}^{R} f(x_j) \tilde{\mathrm{X}}_j(x), \; x \in [x_0, x_R),$$

де $\tilde{\mathrm{X}}_j(x)$ – локальна функція форми, що є сумою відповідно зважених функцій.

Відзначимо один важливий аспект побудови сплайнів. Це крайові умови, тобто під час розрахунків на крайніх фрагментах виникає проблема, пов'язана з відсутністю сусідніх фрагментів ліворуч та праворуч. Унаслідок цього розрахункові вирази, отримані для центральних фрагментів, необхідно модифікувати. Найпростіше відкинути складові суми для відсутніх фрагментів. Проте довжина сусідніх фрагментів часто неявно задіяна у розрахункових виразах. Тому можливе спотворення крайніх фрагментів. Інша складність – визначення похідних – розв'язується для крайніх вузлів заміною центральної різниці на звичайну. При цьому втрачається точність її визначення. Найбільш прийнятним і природним є неявне продовження сплайна ліворуч і праворуч у нескінченість. Винесені у нескінченість крайні вузли явно не враховуються, але в розрахунках беруть участь як граничні відношення. Практика використання такого продовження для кубічних ермітових сплайнів показує, що спотворень з країв немає, і дає можливість виконувати розрахунки сплайна поза межами явних крайніх вузлів.

Висновки. Актуальність та перспективність використання сплайнів для оброблення цифрових даних безпосередньо випливає з їх наближених та обчислювальних властивостей. Це твердження непрямо підтверджується інтенсивним розвитком wavelet методів, що застосовують локальні базисні функції, до яких належать і сплайни.

Перевагою розглянутого підходу є його універсальність і відносна простота. Таким способом можна побудувати дво- та n-вимірні ермітові сплайни. Проте аналітичні вирази можуть бути надзвичайно громіздкими, що робить проблематичним їх використання для швидких алгоритмів. Описаним способом можна будувати сплайни лише з фрагментів поліномів з лінійною залежністю від параметрів.

Отримані сплайнові базиси дозволяють ефективно розв'язувати інтерполяційні задачі, що є основою методів оброблення цифрових сигналів. Альтернатива широкого вибору сплайнових базисів одночасно ставить важливе завдання вибору найкращого з них для вирішення конкретного завдання.

Список літератури

1. *Денисюк В. П.* Сплайни та сигнали: монографія / В. П. Денисюк. – К.: ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.
2. *Денисюк В. П.* Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов / В. П. Денисюк, Б. Г. Марченко. – К.: НТУ "КПИ". 1995. – 245 с.
3. *Шелевицький І. В.* Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми / І. В. Шелевицький – Кривий Ріг: Європ. ун-т, 2002. – 304 с.
4. *Методы* и средства повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем управления воздушным движением: дис. ... доктора техн. наук: 05.22.14 / Н. А. Шутко. – К.: КИИГА, 1991. – 245 с.

О. Г. Гуйда

Аспекты использования сплайнов в технологиях обработки сигналов

Рассмотрен вопрос решения задач идентификации сигналов в частотной и часовой области. Развязаны основные задачи построения интерполяционных сплайн-базисов.

O. G. Guyda

Aspects of the use of splines are in technologies of treatment of signals

The question of decision of tasks of authentication of signals is considered in a frequency and sentinel area. The basic tasks of construction of interpolation are untied spline of bases.