

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

¹А. В. Васильев, канд. техн. наук,
²В. В. Васильев, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины,
³Л. А. Симак, д-р техн. наук

АППРОКСИМАЦИОННО-ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОГО ПИЛООБРАЗНОГО БАЗИСА

¹Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: ovasylyev@gmail.com

^{2,3}Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: vsvv06@gmail.com

Развит метод аппроксимации сигналов обобщенным полиномом на основе кусочно-линейных базисных функций импульсного пилообразного типа и его использование в построении операционных математических моделей непрерывных динамических систем. Рассмотрен иллюстративный пример применения метода к анализу математической модели динамической системы второго порядка в программной среде системы «Mathematica®».

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные преобразования, аппроксимация сигналов, операционное исчисление, динамическая система.

Введение. Изучение поведения динамических систем на компьютерных моделях, как правило, приводит к использованию численных и операционных методов решения интегро-дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является метод дифференциальных преобразований Пухова [4]. В работах [1; 2] предложен и развит операционный метод на основе представления сигналов обобщенными полиномами с различными системами базисных функций, названный S -преобразованием. Различные системы базисных функций порождают различные версии S -преобразований. Наибольшее распространение получили преобразования с базисными системами на основе смещенных полиномов Лежандра различных порядков (блочно-импульсные функции [4], аппроксимирующие импульсные спектры [1; 2]). Большим преимуществом таких систем является ортогональность базисных функций, упрощающая решение проблемы аппроксимации сигналов, а также возможность физической интерпретации сигналов в операционном пространстве. Одним из существенных недостатков является разрывной характер аппроксимации на границах интервалов определения базисных функций. В настоящее время получил большую популярность метод конечных элементов в применении к решению задач математической физики [3]. Важным элементом этого метода также является аппроксимация сигналов в различных базисах, в частности, базиса на основе локальных кусочно-линейных функций. В этой работе будет рассмотрено применение такой системы базисных функций для аппроксимации сигналов и анализа динамических систем с помощью соответствующей версии S -преобразования.

Изложение построено следующим образом. Сначала в ретроспективном плане приведены основные соотношения полиномиальной аппроксимации сигналов и S -преобразований на ее основе. Затем рассмотрены вопросы аппроксимации непрерывных сигналов в локальном пилообразном базисе и формирования математической модели динамической системы во временном и операционном пространствах на примере неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Статью завершает рассмотрение числового примера в среде системы «Mathematica®» [5].

Полиномиальная аппроксимация сигналов и S -преобразования. Для заданных на интервале изменения аргумента $0 \leq t < T$ сигнала $x(t)$ и базисной системы линейно-

независимых функций $\bar{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)]^*$ под полиномиальной аппроксимацией понимают выражение [1; 2]:

$$x_a(t) = \bar{X}^* \cdot \bar{S}(t) = \bar{S}(t)^* \cdot \bar{X} = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t), \quad (1)$$

где символом $*$ обозначена операция транспонирования вектора. Аппроксимация будет наилучшей в среднеквадратичном смысле, если вектор аппроксимирующего полиномиального спектра \bar{X} определен следующим выражением:

$$\bar{X} = W^{-1} \cdot \bar{Q}, \quad (2)$$

где элементы матрицы W и вектора \bar{Q} аппроксимирующего полиномиального спектра выбираются из выражений:

$$w_{ij} = \int_0^T s_i(t) \cdot s_j(t) dt, \quad i, j := 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$$q_i = \int_0^T x(t) \cdot s_i(t) dt, \quad i := 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Основные соотношения полиномиальной аппроксимации (1) – (4) составляют содержание S -преобразования или операционного исчисления неклассического типа. При этом прямое S -преобразование (2) – (4) сопоставляет сигналу $x(t)$ операционное изображение – вектор аппроксимирующего полиномиального спектра \bar{X} ($x(t) \Leftrightarrow \bar{X}$), тогда как обратное преобразование (1) восстанавливает сигнал в виде аппроксимации $x_a(t)$. Операционный характер S -преобразования определяется правилом нахождения изображения интеграла сигнала по изображению подинтегрального изображения. Для операции интегрирования сигнала с переменным верхним пределом $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ операционный аналог определяется выражением [2]

$$\bar{Y} = P \cdot \bar{X},$$

где P – операционная матрица интегрирования, определяемая системой базисных функций с помощью выражения

$$P = W^{-1} \cdot \left(\int_0^T \left(\int_0^t \bar{S}(\tau) d\tau \right) \cdot \bar{S}^*(t) dt \right). \quad (5)$$

В выражении (5) операции интегрирования над векторными и матричными величинами выполняются поэлементно. Операционные матрицы интегрирования могут обобщаться на произвольные (нецелые) порядки интегральных операторов [2].

Математическая модель динамической системы во временном и операционном пространствах. Порядок построения операционной модели динамической системы покажем на примере неоднородного линейного дифференциального уравнения с начальными условиями (задача Коши):

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad y(0) = y_{00}, \quad y'(0) = y_{10}. \quad (6)$$

Преобразуем уравнение (6), введя следующую замену переменных:

$$y''(t) = u(t), \quad y'(t) = y_{10} + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad y(t) = y_{00} + y_{10}t + \int_0^t \int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \quad (7)$$

В результате получим следующее интегральное уравнение, эквивалентное заданному дифференциальному:

$$u(t) + a_1 \int_0^t u(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 d\tau = f(t) - a_1 y_{10} - a_0 (y_{00} + y_{10}t). \quad (8)$$

Операционными аналогами интегрального уравнения (8) и выражений (7) будут следующие векторно-матричное выражение и решение задачи в операционном пространстве:

$$\begin{aligned}\bar{U} + a_1 \cdot P^1 \cdot \bar{U} + a_0 \cdot P^1 \cdot P^1 \cdot \bar{U} &= \bar{F} - (a_1 \cdot y_{10} + a_0 \cdot y_{00}) \cdot \bar{1} - a_0 \cdot y_{10} \cdot \bar{t}, \\ \bar{U} &= (E + a_1 \cdot P^1 + a_0 \cdot P^1 \cdot P^1)^{-1} \cdot (\bar{F} - (a_1 \cdot y_{10} + a_0 \cdot y_{00}) \cdot \bar{1} - a_0 \cdot y_{10} \cdot \bar{t}), \\ \bar{Y}_1 &= y_{10} \cdot \bar{1} + P^1 \cdot \bar{U}, \quad \bar{Y} = y_{00} \cdot \bar{1} + y_{10} \cdot \bar{t} + P^1 \cdot P^1 \cdot \bar{U},\end{aligned}$$

где в дополнение к уже введенным величинам обозначены: $\bar{1}$ – вектор аппроксимирующего полиномиального спектра константы 1; \bar{t} – вектор аппроксимирующего полиномиального спектра линейной функции t .

Обратное S -преобразование определяется в виде аппроксимации решения дифференциального уравнения следующими выражениями:

$$u_a(t) = \bar{U}^* \cdot \bar{S}(t), \quad y_{a1}(t) = \bar{Y}_1 \cdot \bar{S}(t), \quad y_a(t) = \bar{Y} \cdot \bar{S}(t). \quad (12)$$

Для получения численного решения рассмотренной задачи необходимо задание конкретной системы базисных функций $\bar{S}(t)$ и числовых значений коэффициентов уравнения и начальных условий.

Локальная пилообразная система базисных функций. Локальную систему пилообразных функций введем на примере аппроксимации сигнала $y(t) = (\sin(2\pi t))^2$ на интервале изменения аргумента $0 \leq t < 1$. Ниже приведены фрагменты программы построения базисной системы и аппроксимации сигнала с необходимыми комментариями.

Программа формирования системы базисных функций и аппроксимации модельного сигнала.

Задание формы локального пилообразного импульса:

```
v[i_, h_, t_] := Which[(i - 1) * h ≤ t < (i - 1/2) * h, 2 t/h + 2 (1 - i),
  (i - 1/2) * h ≤ t < i * h, -2 t/h + 2 i, t < (i - 1) * h, 0, t ≥ i * h, 0];
```

Визуализация формы импульса (рис. 1):

```
Plot[v[1, 1/10, t], {t, 0, 1}]
```

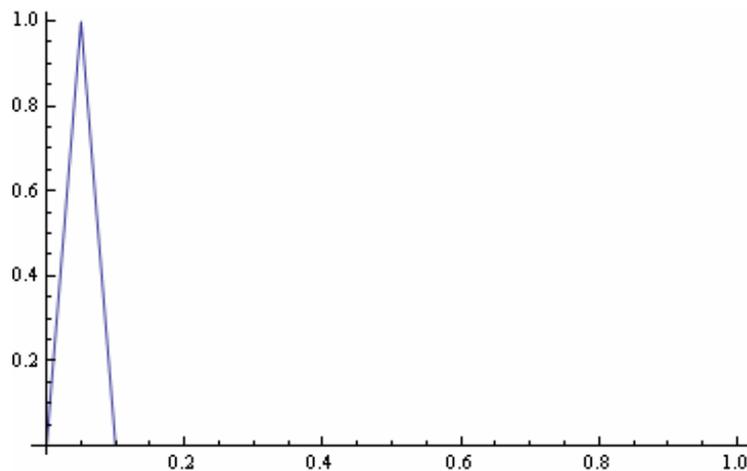


Рис. 1. Форма импульса, порождающего базисную систему функций

Формирование системы базисных функций:

```
V = Table[v[i, 1/10, t], {i, 1/2, 21/2, 1/2}];
```

Визуализация некоторых базисных функций сформированной системы (рис. 2):

```
Plot[{V[[1]], V[[2]], V[[9]], V[[10]], V[[20]], V[[21]]}, {t, 0, 1}]
```

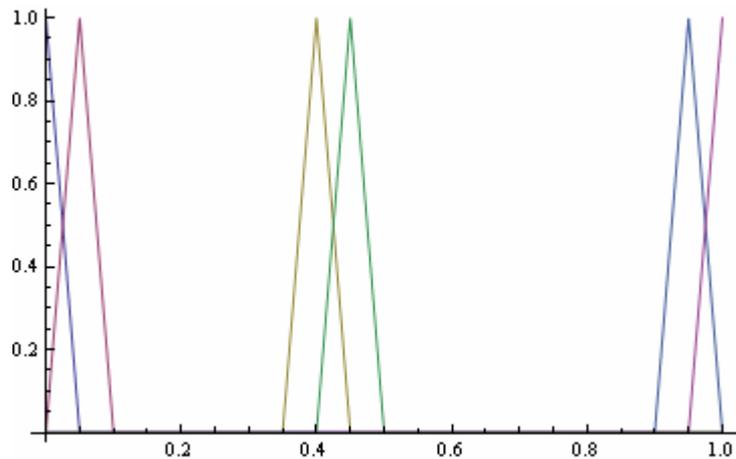


Рис. 2. Базисные функции с номерами: 1, 2, 9, 10, 20, 21

Формирование операционной матрицы аппроксимирующего полиномиального спектра:

$$\mathbf{M} = \text{Table} \left[\int_0^1 \mathbf{V}[[i]] * \mathbf{V}[[j]] dt, \{i, 21\}, \{j, 21\} \right]$$

Задание сигнала, подлежащего аппроксимации:

$$\mathbf{y} := \text{Sin}[2 \pi * t]^2;$$

Формирование операционного вектора аппроксимирующего полиномиального спектра:

$$\mathbf{Q} = \text{Table} \left[\int_0^1 \mathbf{V}[[i]] * \mathbf{y} dt, \{i, 21\} \right];$$

Нахождение вектора аппроксимирующего полиномиального спектра:

$$\mathbf{Y} = \text{Inverse}[\mathbf{M}].\mathbf{Q1}$$

```
{-0.0166565, 0.0820161, 0.340344, 0.659656, 0.917984, 1.01666, 0.917984,
0.659656, 0.340344, 0.0820161, -0.0166565, 0.0820161, 0.340344, 0.659656,
0.917984, 1.01666, 0.917984, 0.659656, 0.340344, 0.0820161, -0.0166565}
```

Формирование аппроксимации сигнала:

$$\mathbf{ya} = \mathbf{Y}.\mathbf{V};$$

Визуализация сигнала, его аппроксимации и функции ошибки (рис. 3, 4):

$$\text{Plot}[\{\mathbf{y}, \mathbf{ya}\}, \{t, 0, 1\}] \quad \text{Plot}[\mathbf{y} - \mathbf{ya}, \{t, 0, 1\}]$$

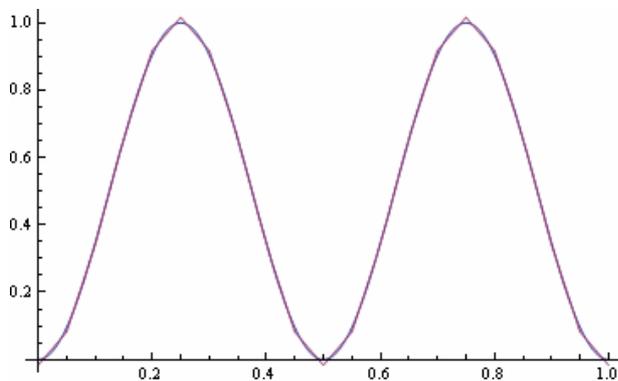


Рис. 3. Сигнал и его аппроксимация

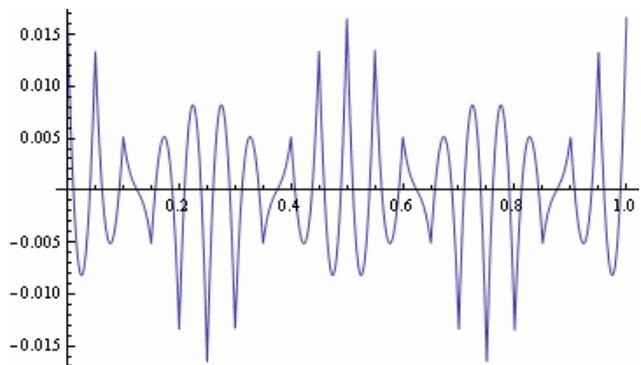


Рис. 4. Функция ошибки аппроксимации

Иллюстративный пример. Рассмотрим порядок решения задачи анализа математической модели динамической системы в виде уравнения (6) при следующих исходных данных: $a_1 = 0.2$; $a_0 = 20$; $y_{00} = 1$; $y_{10} = -2$; $f(t) = t$; $0 \leq t < 1$. Выберем порядок базисной системы $m = 41$. В приводимой ниже программе использован альтернативный способ задания базисной системы, отличающийся от рассмотренного выше.

Программа анализа модельного примера динамической системы.

➤ *Задание формы базисной функции и формирование системы базисных функций:*

```
v[i_, h_, t_] :=
  Piecewise[{{0, t >= i*h || t > 1}, {0, t < (i-1)*h || t < 0},
    {2 t/h + 2 (1-i), (i-1)*h <= t < (i-0.5)*h},
    {-2 t/h + 2 i, (i-0.5)*h <= t < i*h}}];
```

```
V = Table[v[i, 0.05, t], {i, 0.5, 20.5, 0.5}];
```

➤ *Формирование операционной матрицы аппроксимирующего полиномиального спектра:*

```
M = Table[∫_0^1 v[i, 0.05, t] * v[j, 0.05, t] dt, {i, 0.5, 20.5, 0.5}, {j, 0.5, 20.5, 0.5}];
```

➤ *Формирование операционной матрицы интегрирования:*

```
iv[i_, h_, t_] :=
  Piecewise[{{0, t < (i-1)*h || t < 0}, {∫_{(i-1)*h}^t (2 τ/h + 2 (1-i)) dτ, (i-1)*h <= t < (i-0.5)*h},
    {∫_{(i-1)*h}^{(i-0.5)*h} (2 τ/h + 2 (1-i)) dτ + ∫_{(i-0.5)*h}^t (-2 τ/h + 2 i) dτ, (i-0.5)*h <= t < i*h},
    {∫_{(i-1)*h}^{(i-0.5)*h} (2 τ/h + 2 (1-i)) dτ + ∫_{(i-0.5)*h}^{i*h} (-2 τ/h + 2 i) dτ, t >= i*h}}];
```

```
IV = Table[iv[i, 0.05, t], {i, 0.5, 20.5, 0.5}];
```

```
IQ = Table[∫_0^1 IV[[j]] * V[[i]] dt, {i, 41}, {j, 41}];
```

```
P = Chop[Inverse[M].IQ];
```

➤ *Задание единичной матрицы порядка $m = 41$:*

```
EM := IdentityMatrix[41];
```

➤ *Формирование изображений константы 1 и линейной функции t:*

```
Qone = Table[∫_0^1 V[[i]] dt, {i, 41}];
```

```
One := Inverse[M].Qone;
```

```
Qtime = Table[∫_0^1 t * V[[i]] dt, {i, 41}];
```

```
Time = Inverse[M].Qtime;
```

➤ *Решение задачи в операционной области:*

```
U = Inverse[EM + 0.2 P + 20 P.P].((1 - 20 y10) * Time - (0.2 y10 + 20 y00) * One);
```

```
Y2 = y10 * One + P.U; Y1 = y00 * One + y10 * Time + P.P.U;
```

➤ *Формирование аппроксимаций решения уравнения и его производных:*

```
y1a = Y1.V; y2a = Y2.V; ua = U.V;
```

➤ *В данном модельном примере известны аналитическое решение уравнения и его первая и вторая производные:*

$y(t) = y(t)$

$$-0.0005 + 0.05 t + 1.0005 e^{-0.1 t} \cos[4.47102 t] - 0.436131 e^{-0.1 t} \sin[4.47102 t]$$

$$y'(t) = y(t)$$

$$0.05 - 2.05 e^{-0.1 t} \cos[4.47102 t] - 4.42964 e^{-0.1 t} \sin[4.47102 t]$$

$$y''(t) = u(t) = y^3$$

$$e^{-0.1 t} (-19.6 \cos[4.47102 t] + 9.60855 \sin[4.47102 t])$$

➤ *Визуализация вектора аппроксимирующего полиномиального спектра решения уравнения (рис. 5):*

ListPlot[Y1]

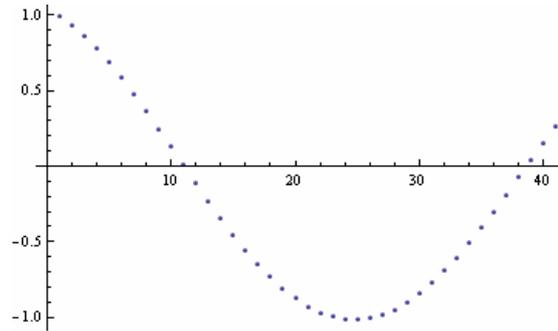


Рис. 5. Компоненты вектора аппроксимирующего полиномиального спектра решения уравнения

➤ *Сравнение аналитического и аппроксимационного решений уравнения (рис. 6 – 8):*

Plot[{y1, y1a}, {t, 0, 1}] Plot[{y2, y2a}, {t, 0, 1}] Plot[{y3, ua}, {t, 0, 1}]

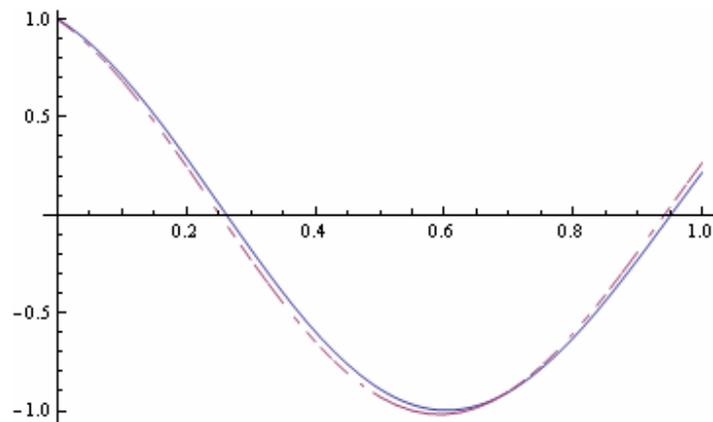


Рис. 6. Сравнение аналитического и аппроксимационного решений уравнения (y1, y1a)

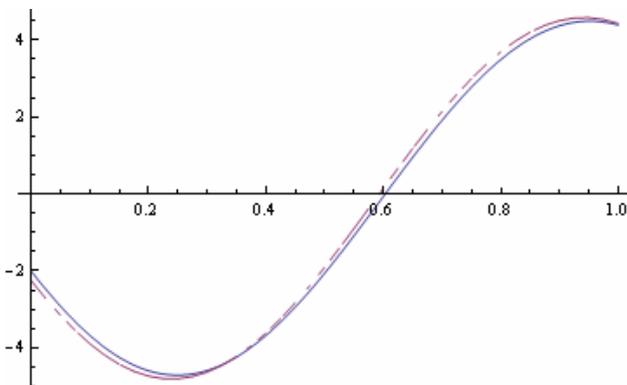


Рис. 7. Сравнение первых производных аналитического и аппроксимационного решений уравнения (y2, y2a)

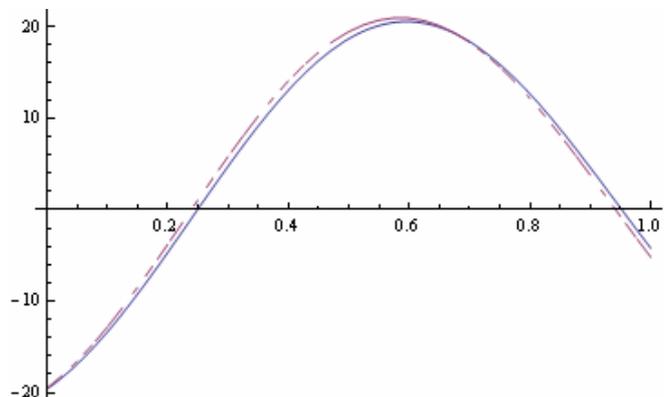


Рис. 8. Сравнение вторых производных аналитического и аппроксимационного решений уравнения (y3, ua)

Заключення. Предложенный подход к аппроксимации сигналов и алгебраизации математических моделей динамических систем обладает рядом особенностей, которые можно отнести к преимуществам:

– в отличие от других методов аппроксимации, основанных на локальных базисах, отсутствуют разрывы аппроксимационных решений на границах подинтервалов разбиения аргумента;

– одновременно с численно-аналитическим характером получаемых решений производится дискретизация аппроксимационных решений, и компоненты аппроксимирующих полиномиальных спектров могут использоваться в качестве отсчетов процесса (нет необходимости перехода в область оригиналов (см. рис. 5 и 6);

– используемая система пилообразных базисных функций приводит к операционным матрицам спектров (**M**) трехдиагонального типа, при этом не возникает проблемы ухудшения обусловленности, характерной для большинства глобальных базисных систем неортогонального типа.

Рассмотренная версия *S*-преобразования, основанная на использовании пилообразного базиса, может быть распространена на случай динамических систем нецелого порядка и перспективна для синтеза систем управления.

Список литературы

1. Васильев В. В. Полиномиальные методы аппроксимации как операционные исчисления и их реализация в программной среде системы “Mathematica®” / В. В. Васильев, Л. А. Симак // Электронное моделирование – 1986. – Т. 18, № 4. – С. 34 – 42.
2. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак – К.: НАН Украины. – 2008. – 256 с.
3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган – М.: Мир, 1986. – 318 с.
4. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка. – 1986. – 160 с.
5. Jiang Z. H. Block Pulse Functions and their Applications in Control Systems / Z. H. Jiang, W. Schaufelberger – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. – 1992. – 237 p.
6. Wolfram S. The Mathematica Book. – Champaign, IL: Wolfram Media & Cambridge University Press. – 1999. – 1470 p.

О. В. Васильев, В. В. Васильев, Л. О. Симак

Апроксимаційно-операційний метод аналізу динамічних систем на основі локального пилоподібного базису

Розвинуто метод апроксимації сигналів узагальненим поліномом на основі кусково-лінійних базисних функцій імпульсного пилоподібного типу та його використання в побудові операційних математичних моделей неперервних динамічних систем. Розглянуто ілюстративний приклад застосування методу до аналізу математичної моделі динамічної системи другого порядку в програмному середовищі системи «Mathematica®».

A. V. Vasylyev, V. V. Vasylyev, L. A. Simak

Approximation-operating method of analysis of dynamic systems based on local sawtooth basis

A method for signal approximation via generalized polynomial-based piecewise-linear basis functions of pulsed sawtooth type is evolved and used to build operational mathematical models of continuous dynamic systems. We consider an illustrative example of applying the method to the analysis of mathematical models of dynamic system of second order in the software environment system «Mathematica®».