УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

А. В. Васильев, канд. техн. наук

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: ovasylyev@gmail.com

Рассмотрен метод параметрической идентификации линейных динамических систем дробного порядка с использованием операционного метода на основе полиномиальной аппроксимации сигналов. Приведен иллюстративный пример решения идентификационной задачи для дифференциального уравнения нецелого порядка с производными Капуто. Вычислительные эксперименты выполнены в программной среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: математическое моделирование, параметрическая идентификация, операционное исчисление, математический анализ нецелых порядков, производная Капуто.

Введение. При исследовании динамических систем наиболее часто возникают две основные задачи: анализ математической модели динамической системы и параметрическая идентификация модели. При решении первой задачи, носящей название прямой, предполагается, что известны структура интегро-дифференциальной математической модели в виде системы дифференциальных и алгебраических уравнений, параметры уравнений, необходимые начальные и краевые условия и внешние воздействия. Необходимо определить поведение динамической системы, для чего необходимо найти решение системы уравнений, описывающей поведение исследуемой системы. Вторая задача заключается в нахождении значений коэффициентов уравнений математической модели при заданной структуре и известном решении и является обратной по отношении к первой. В настоящее время широко используются математические модели динамических систем в форме интегро-дифференциальных уравнений нецелого (дробного) порядка [3; 4], для исследования которых применяют операционные методы анализа. В этой работе рассмотрен метод параметрической идетификации математической модели динамической системы нецелого порядка на примере двучленного дифференциального уравнения с производными Капуто [4]. Вычислительные эксперименты выполнены в программной среде системы *Mathematica®*.

Постановка задачи. Математическая модель динамической системы содержит интегро-дифференциальные операторы нецелого порядка, которые могут вводиться различным образом. Ограничимся определениями дробных производных и интегралов в виде интеграла Римана–Лиувилля и производной Капуто [3; 4].

Интеграл Римана–Лиувилля порядка β функции $x(t)$ определяется выражением

$$y(t) = J^{\beta}(x(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau)d\tau\,, \qquad (1)$$

где $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция Эйлера, являющаяся обобщением факториала $n!$ на нецелые значения аргумента β. При целых значениях β (1) превращается в интегральную формулу Коши n-кратного интегрирования. В частности, при $\beta = 1$ выражение (1) вырождается в обычный интеграл функции $x(t)$. Прозводная Римана–Лиувилля [3] дробного порядка β $(n-1 \le \beta \le n,\ n$ - целое$)$ вводится с помощью выражения

$$z^{RL}(t) = {}^{RL}D^{\beta}(x(t)) = \frac{d^n J^{n-\beta}(x(t))}{dt^n},$$

которое предполагает сначала взятие интеграла Римана–Лиувилля порядка $n-\beta \le 1$ с последующим дифференцированием целого порядка n.

В технических приложениях более удобной представляется определение дробной производной по Капуто:

$$z_C(t) = {}^C D^{\beta}(x(t)) = J^{n-\beta}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right). \quad (2)$$

Выражение (2) допускает использование в дифференциальных уравнениях начальных условий для функции и производных целого порядка, имеющих ясную физическую интерпритацию, тогда, как начальные значения дробных производных в большинстве случаев определить затруднительно.

С целью упрощения ограничимся математической моделью динамической системы дробного порядка в форме двучленного дифференциального уравнения дробного порядка с начальными условиями (задача Коши):

$$a_{\nu}\,{}^C D^{\nu}(y(t)) + a_{\mu}\,{}^C D^{\mu}(y(t)) + a_0 y(t) = f(t). \quad (3)$$

Ограничимся следующими диапазонами изменения порядков дифференциальных операторов:

$$1 < \nu < 2,\ 0 < \mu < 1.$$

При указанных пределах изменения порядков дифференциальных операторов при постановке задачи Коши достаточно начальных условий вида:

$$y(0) = y_{00},\ y'(0) = y_{10}. \quad (4)$$

Обобщение на более сложную структуру и порядки интегро-дифференциальных операторов не представляет затруднений.

Используя определение Капуто (2), преобразуем уравнение (3):

$$a_{\nu} J^{2-\nu}(y''(t)) + a_{\mu} J^{1-\mu}(y'(t)) + a_0 y(t) = f(t). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение новую функцию $u(t)$, путем замены производных целого порядка и функции в уравнении (5) с использованием начальных условий (4):

$$y''(t) = u(t),\ y'(t) = y_{10} + \int_0^t u(\tau)d\tau,\ y(t) = y_{00} + y_{10}t + \int_0^t\int_0^t u(\tau)d\tau^2. \quad (6)$$

Подстановка уравнения (6) в (5) приводит к следующему выражению:

$$a_{\nu} J^{2-\nu}(u(t)) + a_{\mu} J^{1-\mu}(y_{10} + \int_0^t u(\tau)d\tau) + a_0(y_{00} + y_{10}t + \int_0^t\int_0^t u(\tau)d\tau^2) = f(t). \quad (7)$$

Математическая модель системы в операционном пространстве. Применим к интегральным уравнениям (6), (7) *S*-преобразование с базисной системой функций $\bar{\mathbf{S}}(t)$ [1; 2]. Для этого введем следующие изображения функций и операторов в *S*-операционном пространстве:

$$\begin{gathered} u(t) \Leftrightarrow \bar{\mathbf{U}},\ y'(t) \Leftrightarrow \bar{\mathbf{Y}}_1,\ y(t) \Leftrightarrow \bar{\mathbf{Y}},\ f(t) \Leftrightarrow \bar{\mathbf{F}},\ 1 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{1}},\ t \Leftrightarrow \bar{\mathbf{t}}, \\ J^{\beta} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{\beta},\ \int_0^t *d\tau \Leftrightarrow \mathbf{P}^1,\ \iint *d\tau^2 \Leftrightarrow \mathbf{P}^2. \end{gathered} \quad (8)$$

Переходя в операционное пространство, получим:

$$a_{\nu}\mathbf{P}^{2-\nu}\cdot\bar{\mathbf{U}} + a_{\mu}\mathbf{P}^{1-\mu}(y_{10}\cdot\bar{\mathbf{1}} + \mathbf{P}^1\cdot\bar{\mathbf{U}}) + a_0(y_{00}\cdot\bar{\mathbf{1}} + y_{10}\cdot\bar{\mathbf{t}} + \mathbf{P}^2\cdot\bar{\mathbf{U}}) = \bar{\mathbf{F}}. \quad (9)$$

Алгебраическая форма математической модели системы (8) может быть использована как для анализа поведения системы при заданных параметрах модели, внешнего воздействия и начальных условий, так и для параметрической идентификации в случае, если заданы функция отклика системы $u(t)$, внешнее воздействие и начальные условия, но неизвестны коэффициенты уравнений.

Решение задачи анализа поведения системы. Решая уравнение (9) относительно $\vec{\mathbf{U}}$, получим:

$$\vec{\mathbf{U}} = (a_\nu \mathbf{P}^{2-\nu} + a_\mu \mathbf{P}^{1-\mu}\mathbf{P}^1 + a_0\mathbf{P}^2)^{-1}(\vec{\mathbf{F}} - a_\mu y_{10}\mathbf{P}^{1-\mu}\cdot\vec{\mathbf{1}} - a_0(y_{00}\cdot\vec{\mathbf{1}} + y_{10}\cdot\vec{\mathbf{t}})).$$

Операционный аналог уравнений (6) имеет вид:

$$\vec{\mathbf{Y}}_1 = y_{10}\cdot\vec{\mathbf{1}} + \mathbf{P}^1\cdot\vec{\mathbf{U}},\ \vec{\mathbf{Y}} = y_{00}\cdot\vec{\mathbf{1}} + y_{10}\cdot\vec{\mathbf{t}} + \mathbf{P}^2\cdot\vec{\mathbf{U}}.$$

Переход в область оригиналов осуществляется на основе следующих выражений:

$$y_a(t) = \vec{\mathbf{Y}}^*\cdot\vec{\mathbf{S}}(t),\ y'_a(t) = \vec{\mathbf{Y}}_1^*\cdot\vec{\mathbf{S}}(t),\ y''_a(t) = \vec{\mathbf{U}}^*\cdot\vec{\mathbf{S}}(t).$$

Решение задачи параметрической идентификации. Введем в рассмотрение вектор неизвестных коэффициентов математической модели системы:

$$\vec{\mathbf{A}} = [a_\nu\ a_\mu\ a_0]^*,$$

где * – символ транспонирования. Уравнение (9) теперь можна переписать в форме, допускающей решение идентификационной задачи:

$$\mathbf{R}\cdot\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{F}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{R}$ – идентификационная матрица вида:

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{P}^{2-\nu}\cdot\vec{\mathbf{U}}\,\middle|\,\mathbf{P}^{1-\mu}\cdot(y_{10}\cdot\vec{\mathbf{1}} + \mathbf{P}^1\cdot\vec{\mathbf{U}}\,\middle|\,y_{00}\cdot\vec{\mathbf{1}} + y_{10}\cdot\vec{\mathbf{t}} + \mathbf{P}^2\cdot\vec{\mathbf{U}}\right].$$

Идентификационная матрица является прямоугольной, так как количество строк матрицы равно порядку векторов $\vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{t}}$, а количество столбцов равно трем. Таким образом, нахождение решения (10) является некорректной задачей линейной алгебры и должно находиться с помощью псевдообратной матрицы:

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^+\cdot\vec{\mathbf{F}}.$$

Рассмотрим иллюстративный пример решения задачи параметрической идентификации в программной среде системы Mathematica [5].

Иллюстративный пример. Необходимо определить коэффициенты математической модели динамической системы вида (9) при следующих исходных данных:

$$\nu = 1,7;\ \mu = 0,4;\ y_{00} = 2,0;\ y_{10} = 1,0;\ f(t) = 5e^{-t}.$$

Используем в данном примере *S*-преобразование на основе блочно-импульсной системы базисных функций [2]. Выберем диапазон измерения аргумента системы в виде: $0 \le t \le 2$.

Ниже приводится программа реализации математической модели исследуемой системы и решения задачи параметрической идентификации с соответствующими комментариями.

Программа:

- *Задание шага измерения аргумента и порядка базисной системы функций:*

```
h = 0.1; m = 20;
```

- *Определение базисной системы функций:*

```
v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
S := Table[v[t, i, h], {i, m}];
```

- *Задание формы внешнего воздействия и его операционного аналога:*

```
f[t_] := 5 e^(-t);
F := Table[1/h ∫_(i-1)h^(i h) f[t] dt, {i, m}];
```

➢ *Определение операционной матрицы интегрирования порядка* β *:*

```
P[β_, h_, m_] :=
    h^β
  ------------
  Gamma[β + 2]
   Table[Which[i < j, 0, i == j, 1, i > j, (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)],
    {i, m}, {j, m}];
```

➢ *Задание порядков дифференциальных операторов и начальных условий:*

```
ν = 1.7; μ = 0.4; y00 = 2.0; y10 = 1.0;
```

➢ *Определение операционных матриц интегрирования необходимых порядков:*

```
P2-ν = P[2 - ν, h, m]; P1-μ = P[1 - μ, h, m]; P1 = P[1, h, m]; P2 = P[2, h, m];
```

➢ *Определение изображений константы* $\bar{1}$ *и линейной функции* $\bar{t}$ *:*

```
One = Table[1, {i, m}];
Time = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) t dt, {i, m}];
```

➢ *Решение задачи анализа в операционной области:*

```
U = Inverse[aν * P2-ν + aμ * P1-μ.P1 + a0 * P2].(F - aμ * y00 * P1-μ.One - a0 * (y00 * One + y10 * Time));
Y1 = y10 * One + P1.U;
Y = y00 * One + y10 * Time + P2.U;
```

➢ *Обратное S-преобразование (переход в область оригиналов):*

```
ua = U.S; y1a = Y1.S; ya = Y.S;
```

Численное решение прямой задачи возможно, если известны коэффициенты a_ν, a_μ, a_0. В рассматриваемом случае эти коэффициенты определяются в результате решения идентификационной задачи, для которого необходимо использовать информацию об отклике системы на внешнее воздействие с учетом начальных условий. Так как при формировании математической модели в операционной области интервал изменения аргумента подразделялся на $m = 20$ подинтервалов, достаточно иметь столько же отсчетов значений функции $u(t_i)$, $i := 1,...,m$ и интерпретировать их в качестве элементов вектора аппроксимирующего блочно- импульсного спектра $\bar{\mathbf{U}}$:

U={-7.54038, -4.40141, -4.40217, -4.05246, -3.72424, -3.31516, -2.8326, −2.28078, −1.67146, −1.01923, −0.340654, 0.346664, 2.02476, 1.67589, 2.28306, 2.8305, 3.30407, 3.69167, 3.98348, 4.17226}

Формирование идентификационной матрицы:

```
R := Transpose[{P2-ν.U, P1-μ.(y00 * One + P1.U), (y00 * One + y10 * Time + P2.U)}];
```

➢ *Решение идентификационной задачи:*

```
A = PseudoInverse[R].F;
```

$\mathbf{A} = \{\ 1.5,\ -2.,\ 5.\ \}$*

В результате получено решение идентификационной задачи и определены числовые значения коэффициентов уравнения математической модели динамической системы ($a_\nu = 1.5$; $a_\mu = -2.0$; $a_0 = 5.0$). Это позволяет решить прямую задач анализа системы, изменив параметры *S*-преобразования с целью повышения точности аппроксимации решения. Например, принимая $h = 0,01$; $m = 200$ и реализуя фрагменты программы, указанные выше в разделах «*Решение задачи анализа в операционной области*» и «*Обратное S-преобразование (переход в область оригиналов)*», получим аппроксимации решения, визуализация которого показана на рисунке.

➢ *Визуализация аппроксимаций решения и его производных:*

```
Plot[{ya, y1a, ua}, {t, 0, 2}]
```

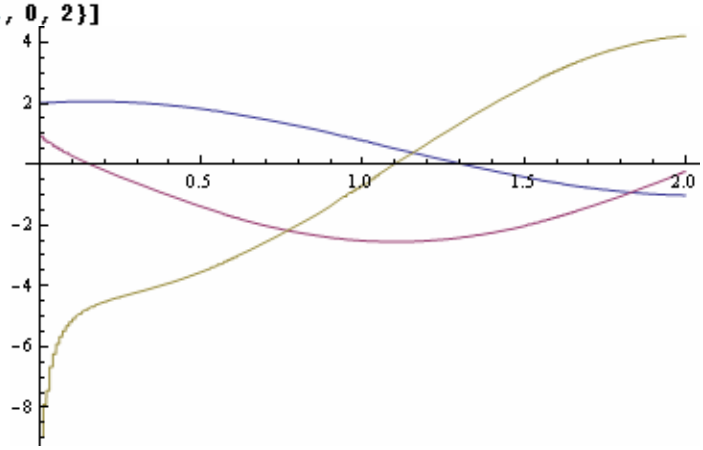

Рис. 1. Аппроксимации решения и его производных ($y_a(t)$, $y'_a(t)$, $y''_a(t)$)

Заключение. Рассмотренный метод решения задачи параметрической идентификации параметров математических моделей динамических систем на основе использования *S*-преобразования применим для линейных динамических систем нецелого порядка. Он может также применяться для решения задачи эквивалентирования математических моделей систем.

Список литературы

1. *Васильев А. В.* Полиномиальные аппроксимации в задачах параметрической идентификации элементов непрерывных динамических систем / В. В.Васильев, А. В. Васильев, Л. А.Симак, В. В. Чечь // Электронное моделирование. – 1993. – Т.15, № 4. – С. 40 – 46.
2. *Васильев В. В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак – К.: НАН Украины. – 2008. – 256 с.
3. *Oldham K. B.* The Fractional Calculus / K. B. Oldham, J. Spanier – Academic Press, 1974. – 234 p.
4. *Podlubny I.* Fractional differential Equations // Mathematics in Sciences and Engineering. Vol. 198. – Academic Press, 1999. – 340 p.
5. *Wolfram S.* The Mathematica Book. – Champain, II: Wolfram Media & Cambridge University Press. – 1999. – 1470 p.

О. В. Васильєв

Параметрична ідентифікація математичних моделей динамічних систем нецілих порядків з похідними Капуто

Розглянуто метод параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем дробового порядку з використанням операційного методу на основі поліноміальної апроксимації сигналів. Наведено ілюстративний приклад розв’язання ідентифікаційної задачі для диференціального рівняння нецілого порядку з похідними Капуто. Обчислювальні експерименти виконано в програмному середовищі системи Mathematica ®.

A. V. Vasylyev

Parametric identification of mathematical models of linear dynamical systems with Caputo derivatives of noninteger order

The method of parametric identification of linear fractional order dynamic systems, using the operational method based on polynomial approximation of signals has been considered. An illustrative example of identification solution for differential equation with Caputo derivatives of noninteger order is examined. Computational experiments were carried out in the programming environment of Mathematica ®.