УДК 629.735.33:004.942(045)

Ю. М. Кеменяш, ассист.,
А. З. Гайдамака, ассист.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКАХ СЛОЖНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: fsu@nau.edu.ua

Рассмотрена задача о совместных колебаниях жидкости и жестких упруго подвешенных демпфирующих перегородок в баке, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда. Показано, что при определенном выборе параметров системы можно получить значительный выигрыш в демпфировании. Описана математическая модель демпфирования колебаний жидкости упругими перегородками в баках сложной конструкции, которая обладает достаточной надежностью, точностью, простотой и эффективностью.

Ключевые слова: демпфирование, перегородка, колебание жидкости, бак.

Введение. Исследование демпфирования колебаний жидкости в баках самолетов пожарников является одной из важнейших задач динамики упругих конструкций с баками, частично заполненными жидкостью. Наряду с определением спектра частот собственных колебаний конструкции и жидкости в баках исследование демпфирования и, в частности, декрементов колебаний совершенно необходимо для правильного выбора параметров систем управления, так как в случае сближения частот собственных колебаний конструкции или жидкости с диапазоном частот пропускания системы управления возможно нарушение нормальной работы последней и потеря устойчивости и управляемости летательным аппаратом.

Если все же частотные характеристики упругой конструкции с баками не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к ним, то стремятся к тому, чтобы искусственным путем изменить их в желаемую сторону введением в конструкцию бака демпфирующих перегородок различных форм и размеров. Эффективным средством ограничения подвижности жидкости являются демпферы в виде кольцевых и радиальных перегородок. При определенном выборе параметров упругих перегородок можно получить значительный выигрыш как в величине развиваемого ими демпфирования, так и в весовом соотношении.

Наибольший интерес представляют два простейших закона диссипативных сил:

– диссипативные силы, пропорциональные скорости – вязкое демпфирование;

– диссипативные силы, носящие гармонический характер – гистерезисное демпфирование - пропорциональные перемещению.

Вязкое демпфирование описывается уравнением движения в форме:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+h\frac{dy}{dt}+ky=F\cos\omega t.$$

Коэффициент демпфирования $\beta=\frac{h}{m}$ и собственная частота $\sigma=\sqrt{k/m}$ полностью определяют динамические свойства системы (собственные колебания системы). Гистерезисное демпфирование:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{h}{\omega}\frac{dy}{dt}+ky=F\sin\omega t.$$

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях жидкости в прямоугольном паралелелипипеде при наличии демпфирующей перегородки в виде жесткой прямоугольной пластины, упруго подвешенной в вертикальной плоскости, проходящей через середину полости [1].

Постановка задачи. Пусть твердое тело с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда, заполненной несжимаемой жидкостью, находится в поле массовых сил (рис. 1.).

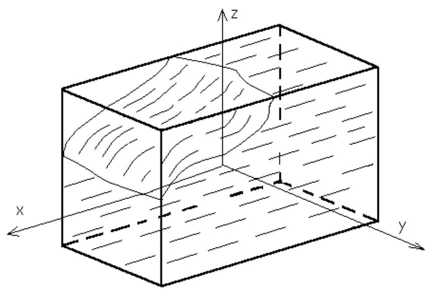

Рис. 1

В середине полости на некотором расстоянии от свободной поверхности подвешена на пружинах жесткая прямоугольная пластина, ширина которой много меньше ее длины. Перегородка может совершать поступательное перемещение относительно стенок полости.

Введем следующие обозначения: h – уровень заполнения полости; l_d – длина полости; l_s – ее ширина; ρ – плотность жидкости; j – ускорение поля массовых сил; l и b – длина и ширина перегородки; d – расстояние от свободной поверхности жидкости до центра перегородки.

Рассмотрим совместные колебания жидкости и перегородки при заданных поступательных движениях тела по гармоническому закону $u_0 \sin\omega t$.

Составим уравнения движения системы. За координату, характеризующую колебания жидкости, примем отклонение свободной поверхности на стенке полости s. Координату, характеризующую перемещение перегородки относительно стенок полости, обозначим через q. Механическая система, к которой сводится задача, изображена на рис. 2.

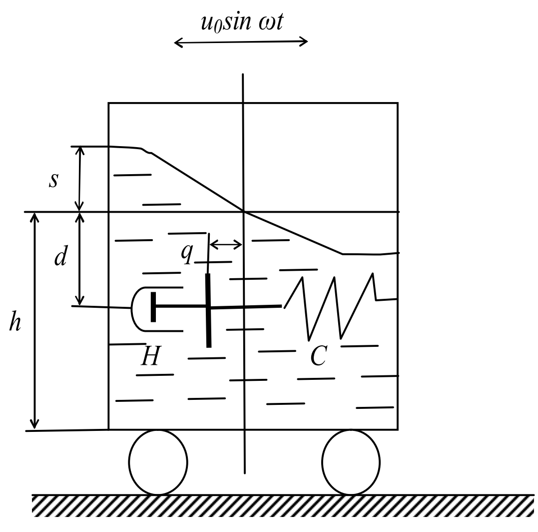

Рис. 2

Уравнения движения можно записать в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{d^2 s}{dt^2}+\beta_s\frac{ds}{dt}+\omega_s^2 s\right)-\alpha F=\lambda u_0\omega^2\sin\omega t;\\&m^0\left(\frac{d^2 q}{dt^2}+\beta_q\frac{ds}{dt}+\omega_q^2 q\right)+F=m^0 u_0\omega^2\sin\omega t;\end{aligned}\qquad(1)$$

Однако если в баке находится n перегородок то уравнение (1) примет вид:

$$\mu\left(\frac{d^2 s}{dt^2}+\beta_s\frac{ds}{dt}+\omega_s^2 s\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i=\lambda u_0\omega^2\sin\omega t;$$

$$m^0\left(\frac{d^2 q_i}{dt^2}+\beta_q\frac{dq_i}{dt}+\omega_q^2 q_i\right)+F_i=m^0 u_0\omega^2\sin\omega t;$$

где ω_s, β_s, μ и λ – гидродинамические коэффициенты, соответствующие полости без перегородки; $\omega_q=\sqrt{\frac{c}{m^0}}$ – собственная частота колебаний перегородки при отсутствии жидкости.

Собственная частота имеет вид: $\omega_s^2=\frac{\pi j}{l_d}th\frac{\pi h}{l_d}$.

Присоединенные массы: $\mu=\frac{\rho l_d^2 l_s}{2\pi th(\pi h/l_d)}$; $\lambda=\frac{2\rho l_d^2 l_s}{\pi}$; $\alpha_i=\frac{ch[\pi(h-d)/l_d]}{sh(h/l_d)}$.

Коэффициенты β_s и β_q определяются экспериментально.

$\beta_q=\frac{H}{m^0}$ – коэффициент демпфирования, характеризующий диссипацию энергии; m^0 - масса перегородки; α – коэффициент, характеризующий уменьшение амплитуды колебаний жидкости; F_i – сила, действующая на перегородку со стороны жидкости; q – координата перемещения перегородки относительно стенки полости.

Гидродинамическая сила F_i может быть представлена в следующем виде:

$$F_i=-m\frac{d\vartheta}{dt}-\frac{4}{3\pi}c_b b\vartheta_0\vartheta;$$

где m – присоединенная масса жидкости; c_b – коэффициент сопротивления; b – высота ребра; ϑ – скорость потока; l – длинна перегородки.

Эта зависимость справедлива только для гармонического закона изменения скорости [2].

Присоединенная масса m и коэффициент сопротивления c_b в общем случае являются сложными функциями безразмерного параметра, эквивалентного числу Струхаля $S=\frac{2\pi\upsilon_0}{(b\omega)}$, а также глубины утопления перегородки.

Для фиксированного положения перегородки и сравнительно небольших диапазонов изменения параметра S эти функции с достаточной степенью точности можно аппроксимировать степенными зависимостями

$$c_b=K\left(\frac{2\pi\vartheta_0}{b\omega}\right)^{-n}=KS^{-n}.\qquad(2)$$

Коэффициенты K и n зависят от глубины утопления перегородки и определяются экспериментально. Для большой глубины утопления (случай безграничной жидкости) $K = 8{,}4;\ n = 1/3$.

Присоединенную массу жидкости для упрощения можно считать постоянной и определять экспериментально как некоторую среднюю величину. Такое допущение вполне возможно, так как основной интерес представляют малые значения параметра S, где присоединенная масса изменяется незначительно.

С учетом (2) выражение для гидродинамической силы запишется в виде

$$F = -m\frac{d\vartheta}{dt} - K_0\upsilon;$$

где $K_0 = \rho K/(S^n 3\pi)bl\upsilon_0$.

Так как ширина перегородки по сравнению с ее длиной предполагается малой, то при определении гидродинамической силы за скорость u можно принять разность скоростей перемещений перегородки и колебания жидкости

$$\upsilon_i = \alpha\dot{s} - \dot{q}_i. \tag{3}$$

Запишем гидродинамическую силу для n перегородок

$$F_i = -m\alpha\ddot{s} - k_0\alpha\dot{s} + m\ddot{q}_i + k_0\dot{q}_i.$$

Составим систему уравнений для двух перегородок расположенных в баке:

$$\begin{gathered}
\mu\left(\frac{d^2s}{dt^2} + \beta_s\frac{ds}{dt} + \omega_s^2 s\right) - \alpha_1 F_1 - \alpha_2 F_2 = \lambda u_0\omega^2\sin\omega t;\\
m^0\left(\frac{d^2q_1}{dt^2} + \beta_q\frac{dq_1}{dt} + \omega_q^2 q_1\right) + F_1 = m^0 u_0\omega^2\sin\omega t;\\
m^0\left(\frac{d^2q_2}{dt^2} + \beta_q\frac{dq_2}{dt} + \omega_q^2 q_2\right) + F_2 = m^0 u_0\omega^2\sin\omega t;
\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
\alpha F_1 = -m\alpha\frac{d^2s}{dt^2} - \alpha K_0\frac{ds}{dt} + m\frac{d^2q_1}{dt^2} + K_0\frac{dq_1}{dt};\\
\alpha F_2 = -m\alpha\frac{d^2s}{dt^2} - \alpha K_0\frac{ds}{dt} + m\frac{d^2q_2}{dt^2} + K_0\frac{dq_2}{dt};
\end{gathered} \tag{5}$$

после подстановки в систему уравнений (4) выражения (5) с учетом (3) получаем следующую систему связных уравнений колебаний жидкости и перегородок:

$$\begin{gathered}
(\mu + 2\alpha^2 m)\frac{d^2s}{dt^2} + (\mu\beta_s + 2\alpha K_0)\frac{ds}{dt} + \mu\omega_s^2 s -\\
-\alpha K_0\left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}\right) - \alpha m\left(\frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{d^2q_2}{dt^2}\right) = \lambda u_0\omega^2\sin\omega t;\\
(m^0 + m)\frac{d^2q_1}{dt^2} + (m^0\beta_q + K_0)\frac{dq_1}{dt} + m^0\omega_q^2 q_1 -\\
-\alpha K_0\frac{ds}{dt} - \alpha m\frac{d^2s}{dt^2} = m^0 u_0\omega^2\sin\omega t;\\
(m^0 + m)\frac{d^2q_2}{dt^2} + (m^0\beta_q + K_0)\frac{dq_2}{dt} + m^0\omega_q^2 q_2 -\\
-\alpha K_0\frac{ds}{dt} - \alpha m\frac{d^2s}{dt^2} = m^0 u_0\omega^2\sin\omega t.
\end{gathered} \tag{6}$$

Поскольку начальные условия этой задачи не оговорены, примем их нулевыми и найдем решение этой системы уравнений, описывающей совместные колебания жидкости и перегородки, как задачи Коши с нулевыми начальными условиями и возмущениями в виде гармонического колебания с частотой ω и амплитудой u_0.

Введем обозначения:

$$a_0 = \mu + 2\alpha^2 m; \quad a_1 = \mu\beta_s + 2\alpha K_0; \quad a_2 = \mu\omega_s^2;$$

$$b_0 = m^0 + m; \quad b_1 = m^0\beta_q + K_0; \quad b_2 = \omega_s^2;$$

$$g_1 = -\alpha m; \quad g_2 = -\alpha K_0;$$

$$f_1 = \beta_s \lambda \omega^3 u_0; \quad f_2 = m^0 \beta_q \omega^3 u_0.$$

Применим к системе уравнений (6) интегральное преобразование Лапласа [3]. Получим следующую систему уравнений:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) S(p) + (g_1 p + g_2) p Q_1(p) + (g_1 p + g_2) p Q_2(p) = \frac{f_1}{p^2 + \omega^2};$$

$$(b_0 p^2 + b_1 p + b_2) Q_1(p) + (g_1 p + g_2) p S(p) = \frac{f_2}{p^2 + \omega^2};$$

$$(b_0 p^2 + b_1 p + b_2) Q_2(p) + (g_1 p + g_2) p S(p) = \frac{f_2}{p^2 + \omega^2}.$$

Разрешая эту систему относительно *S(p)* и *Q(p)*, находим

$$S(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \frac{e_2 p^2 + e_1 p + e_0}{p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + c_3 p + c_4};$$

$$Q_1(p) = \frac{1}{b_0 p^2 + b_1 p + b_2} \left[\frac{f_1}{p^2 + \omega^2} - (e_1 p + e_2) p S(p) \right];$$

$$Q_2(p) = \frac{1}{b_0 p^2 + b_1 p + b_2} \left[\frac{f_1}{p^2 + \omega^2} - (e_1 p + e_2) p S(p) \right].$$

Выполнив соответствующие преобразования и представляя полученные выражения в виде суммы звеньев второго порядка, получаем решение задачи в пространстве изображений в следующем виде:

$$S(p) = \sum_{k=1}^{3} \frac{s_{2k} + s_{2k+1}(p + \gamma_{sk})}{(p + \gamma_{sk}) \pm \omega_{sk}^2}; \tag{7}$$

$$Q_1(p) = \sum_{k=1}^{4} \frac{q_{2k} + q_{2k+1}(p + \gamma_{sk})}{(p + \gamma_{sk}) \pm \omega_{sk}^2}; \tag{8}$$

$$Q_2(p) = \sum_{k=1}^{4} \frac{q_{2k} + q_{2k+1}(p + \gamma_{sk})}{(p + \gamma_{sk}) \pm \omega_{sk}^2}. \tag{9}$$

Выражениям (7), (8), (9) в пространстве оригиналов соответствуют следующие функции:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{3} e^{-\gamma_{sk}} [\frac{s_{2k}}{\omega_{sk}} (\sin \omega_{sk} t + s_{2k+1} \cos \omega_{sk} t)];$$

$$q_1(t) = \sum_{k=1}^{4} e^{-\gamma_{qk}} [\frac{q_{2k}}{\omega_{sk}} (\sin \omega_{sk} t + q_{2k+1} \cos \omega_{sk} t)];$$

$$q_2(t) = \sum_{k=1}^{4} e^{-\gamma_{qk}} [\frac{q_{2k}}{\omega_{sk}} (\sin \omega_{sk} t + q_{2k+1} \cos \omega_{sk} t)].$$

Анализируя полученный результат, можно задачу о колебаниях жидкости в полостях свести к учету эффектов, обусловленных упругостью демпфирующих перегородок, к определению коэффициентов демпфирования и собственных частот. Минимальная амплитуда колебаний жидкости наблюдается при относительной амплитуде перемещения полости 0,05. Ее значение в 3,2 раза меньше амплитуды для жесткой перегородки. Следовательно, при определенном выборе параметров можно получить выигрыш в демпфировании.

Выводы. В данной работе рассмотрена задача о совместных колебаниях жидкости и жестких упруго подвешенных демпфирующих перегородок в баке. Показано, что при определенном выборе параметров системы можно получить значительный выигрыш в демпфировании.

Математическая модель обладает достаточной надежностью, точностью, простотой и эффективностью и полностью согласуется с выводом работы [1].

Анализируя полученные результаты видно, что с добавлением перегородок коэффициент α увеличивается. А это, в свою очередь, ведет к уменьшению амплитуды колебания жидкости в баке.

Список литературы.

1. *Микишев Г. Н.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками содержащими жидкость / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович – М.: Машиностроение, 1971. – 532 с.

2. *Miles J.W.* Ring damping of free surfase oscillations in a circular tank, J.Appl. Mech.,1958. – Vol 25. – No 6.

3. *Зеленский К. Х.* Компьютерные методы прикладной математики / К. Х. Зеленский, В. Н. Игнатенко, А. П. Коц – К.: Дизайн-В,1999. – 352 с.

Ю. М. Кеменяш, О. З. Гайдамака

Побудова математичної моделі демпфування коливань рідини в баках складної конструкції

Розглянуто задачу про спільні коливання рідини і жорстких пружно підвішених демпфувальних перегородок в баку, що має форму прямокутного паралелепіпеда. Показано, що за певного вибору параметрів системи можна отримати значний виграш у демпфуванні. Описано математичну модель демпфування коливань рідини пружними перегородками у баках складної конструкції, яка є достатньо надійною, точною, простою і ефективною.

J. M. Kemenyash, O. Z. Gaydamaka

Constructing a mathematical model damping fluid in the tanks of complex design

The problem of the joint fluctuations of fluid and rigid elastic suspended damping partitions in the tank having the shape of a rectangular box. It is shown that for certain parameter values the system can obtain a significant gain in damping. The aim is to describe a mathematical model of damping vibrations of fluid elastic baffles in the tanks of complex design, which has the reliability, accuracy, simplicity and efficiency.