УДК 681.51(045)

[1]**В. М. Синеглазов,** д-р техн. наук, проф.,
[2]**А. Н. Сильвестров,** д-р техн. наук, проф.,
[2]**Л. Ю. Спинул,** канд. техн. наук, доц.,
[2]**Д. К. Зименков,** асп.

# КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ

[1]Інститут електроніки і систем управління НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua,
[2]Національний технічний університет України «КПІ»

*Рассмотрен подход к повышению точности оценивания аэродинамических характеристик летательных аппаратов с учетом их нелинейности и нестационарности.*

**Ключевые слова:** аэродинамические характеристики, летательный аппарат, оценивание нелинейности, нестационарность.

**Введение.** Устойчивость динамических систем является одной из наиболее важных характеристик, в особенности, если они нестационарны, не полностью известны и подвержены случайным помехам в измерительных каналах переменных состояния. К таким системам относится самолет, в частности его устойчивость в продольном коротком периодическом движении [1]. Для малых отклонений переменных от балансировочного режима (постоянной высоты, скорости движения в вертикальной плоскости) это движение описывается относительно переменных (угла атаки $x_1$, угловой скорости $x_2$ и руля высоты $u$) системой уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u;\\ \dot{x}_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x_1, x_2$ – производные по времени от $x_1$ и $x_2$; $\beta_{ij}$, ($i=1,\ 2;\ \ j=1,\ 2,\ 3$) – аэродинамические коэффициенты.

Системе (1) эквивалентны передаточные функции, отображающие входной сигнал $u$ в выходы $x_{1M}$ или $x_{2M}$, например $u$ в $x_{2M}$:

$$W_u^{x_2}(p) = \frac{\beta_{23}p - (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})}{p^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})p + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})}. \tag{2}$$

Коэффициенты $(\beta_{11} + \beta_{22}) = -a_1$ и $\langle(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) = a_0\rangle$ знаменателя определяют соответственно колебательный и апериодический запасы устойчивости. Умножив эти коэффициенты на $J_{z_1} \big/ qSb_a\beta_{11}$, где $J_{z_1}$ – момент инерции; $q$ – скоростной напор; $S$ – площадь крыла; $b_a$ – средняя аэродинамическая хорда крыла, получим соответствующий запас устойчивости в долях от $b_a$. Коэффициенты $\beta_{13}, \beta_{23}$ определяют эффективность рулей высоты; $\beta_{12}, \beta_{22}$ – демпфирующие силы и моменты. Оценивание коэффициентов $\beta_{ij}$ летательных аппаратов (ЛА), по которым определяется устойчивость и управляемость ЛА, является актуальной задачей летных испытаний (ЛИ).

**Постановка задачи.** Ограниченные стоимостью натурного эксперимента и нестационарностью время эксперимента и нелинейностью – диапазон изменения переменных не позволяют с достаточно высокой точностью получить оценки $\hat{\beta}_{ij}$ $\beta_{ij}$ из

зашумленных помехами измерений $\hat{x}_i$, $\hat{u}$. По этим причинам практика ЛИ ограничивается весьма приближенными оценками устойчивости и управляемости ЛА [1]. Повысить точность оценивания аэродинамических коэффициентов (АДК) без увеличения времени ЛИ можно, воспользовавшись методом статистического моделирования помех. Для этого, учитывая априорную информацию о разнесенности спектров сигналов и помех (помехи более высокочастотны), достаточно для каждого сигнала выполнить фильтрацию помех и как разность отфильтрованного и исходного сигнала получить приближенную реализацию помехи и затем определить статистические характеристики этих реализаций и сгенерировать $m$ статистически подобных реализаций помех для каждой переменной $x_i$, $u$. Сложив эти реализации с соответствующими отфильтрованными сигналами, получим $m$ псевдовыборок данных ЛИ. Имея в наличии $m$ статистически идентичных выборок, $p$ методов идентификации и $q$ моделей ЛА, можно воспользоваться их избыточностью с целью получения более точных оценок АДК.

**Методика исследования.** Применительно к задаче определения АДК ЛА в продольном короткопериодическом движении рассмотрим три модели $(q=3)$: модели (1), (2) и модель (3), вытекающая из двух первых:

$$\ddot{x}_2 = (\beta_{11}+\beta_{22})\dot{x}_2 - (\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})x_2 + \beta_{23}\dot{u} - (\beta_{23}\beta_{11}-\beta_{13}\beta_{22})u = -a_1\dot{x}_2 - a_0 x_2 + a_2\dot{u} + a_3 u. \quad (3)$$

Число $p$ методов определения АДК определяется количеством функционалов близости в пространстве $L_2$ [2] переменных ЛА и его моделей (1), (2), (3). Из условия минимума этих функционалов определяются оптимальные оценки $\hat{\beta}$ АДК:

$$\{\beta_{ij}^*\} = \arg\min_{\beta_{ij}} \left\| \hat{\dot{x}}_i - \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij}\hat{x}_j - \beta_{i3}\widehat{U} \right\|^2, \quad (4)$$

где $i=1,\ 2$; $j=1,\ 2$; $\hat{\dot{x}}_i$, $\hat{x}_j$, $\widehat{U}$ – сглаженные фильтром переменные;

$$\{a_i^*\} = \arg\min_{a_i} \|x_2 - x_{2M}\|^2; \quad (5)$$

$$\{a_i^*\} = \arg\min_{a_i} \left\| \hat{\ddot{x}}_2 + a_1\hat{\dot{x}}_2 + a_0\hat{x}_2 - a_2\widehat{\dot{U}} - a_3 U \right\|^2. \quad (6)$$

Сглаживание всех переменных осуществляется одним и тем же фильтром, чтобы не внести методическую ошибку в линейные уравнения (1), (3) ЛА. Возможно также применение других методов идентификации [3], дающих несмещенные оценки АДК в условиях помех.

Далее для каждого из алгоритмов (4), (5), (6) на множестве из $m$ реализаций, для каждой реализации определяются оптимальные значения $\{\beta_{ij}^*\}$, $\{a_i^*\}$, их средние значения по $m$ реализациям $\{\overline{\beta}_{ij}^*\}$, $\{\overline{a}_i^*\}$, оценки собственных $\hat{\sigma}^2_{\beta_{ij}^*(k)}$, $\hat{\sigma}^2_{a_i^*(k)}$ и взаимных $\hat{\sigma}^2_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}$, $\hat{\sigma}^2_{a_i^*(k)a_i^*(l)}$ дисперсий, где $k=1,\ 2,\ 3$; $p=3$; $l=1,\ 2,\ 3$; $k\neq l$. Для краткости записи элементы множеств $\{\beta_{ij}\}$, $\{a_i\}$ обозначим через $\{\alpha_i\}$. Тогда будем искать наилучшую на множестве из трех методов-моделей оценку $\alpha_i^*$ в виде:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^{3} C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^{3} C_k = 1. \quad (7)$$

Коэффициенты $C_k$ определим из условия:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^2_{\alpha_i^*}}{\partial C_k} = 0, \quad k = 2,\ 3, \tag{8}$$

где

$$\partial \hat{\sigma}^2_{\alpha_i^*} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{3} C_k \left( \alpha_i(k, j) - \overline{\alpha}_i(k, j) \right) \right)^2 = \sum_{k=1}^{3} C_k^2 \hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{3} C_k C_l \hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)} = C^T A C.$$

Для краткости обозначим $\hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)} = \hat{\sigma}^2_k$, $\hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)} = \hat{\sigma}^2_{kl}$, тогда $C^T = \left[ C_2, C_3 \right]$,

$$A = \begin{bmatrix} \left( \hat{\sigma}^2_1 + \hat{\sigma}^2_2 - 2\hat{\sigma}^2_{12} \right) & \left( \hat{\sigma}^2_1 + \hat{\sigma}^2_{23} - \hat{\sigma}^2_{13} - \hat{\sigma}^2_{12} \right) \\ \left( \hat{\sigma}^2_1 + \hat{\sigma}^2_{23} - \hat{\sigma}^2_{13} - \hat{\sigma}^2_{12} \right) & \left( \hat{\sigma}^2_1 + \hat{\sigma}^2_3 - 2\hat{\sigma}^2_{13} \right) \end{bmatrix}.$$

Теперь условие (8) эквивалентно системе

$$AC = B, \tag{9}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_1 - \hat{\sigma}^2_{12} \\ \hat{\sigma}^2_1 - \hat{\sigma}^2_{13} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

Решение $C = A^{-1}B$ системы (9) единственно, если матрица $A$ положительно определена. Чем меньше коррелированы погрешности в оценивании $\alpha_i$ разными методами (4), (5), (6), тем ближе матрица $A$ к диагональной. Так как нормы близости (4), (5), (6) взяты в пространстве переменных $x$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, то можно ожидать слабую корреляцию в погрешностях оценок $\alpha_i$ разными методами-моделями (4), (5), (6). Подставив найденные из системы (9) оптимальные значения $C_2$, $C_3$, а также $C_1 = 1 - C_2 - C_3$ в уравнение (7), получим оптимально взвешенную оценку $\alpha_i^*$ коэффициента $\alpha_i$ (при условии хорошей обусловленности матрицы $A$ и небольшой погрешности оценок $\hat{\sigma}^2_i$, $\hat{\sigma}^2_{ij}$ дисперсий $\sigma^2_i$, $\sigma^2_{ij}$. В противном случае для гарантии не ухудшения результата взвешивания оценок $\alpha_i$ следует воспользоваться минимаксным подходом. Оценки $\hat{\sigma}^2_i$, $\hat{\sigma}^2_{ij}$, вычисленные по $m$ сгенерированным выборкам данных, имеют погрешности с $\chi^2$-распределением, если предположить, что погрешности оценок $\alpha_i(k)$ распределены по нормальному закону. Истинные значения $\sigma^2_i$, $\sigma^2_{ij}$ для заданного уровня достоверности находятся в интервале $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}^2_i$, $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}^2_{ij}$ или приближенно $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma^2_i$, $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma^2_{ij}$, где $\gamma$ – квантиль $\chi^2(p, m)$ распределения, $\gamma << 1$.

Пусть $\sigma^2_i = \hat{\sigma}^2_i (1 + \gamma)$ для $i \in I = \left\{ \overline{1, n_1} \right\}$, $\sigma^2_j = \hat{\sigma}^2_j (1 + \gamma)$ для $j \in J = \left\{ \overline{n_1 + 1, n} \right\}$.

Тогда $\sigma^2_{ij} = \hat{\sigma}^2_{ij} (1 + \gamma)$ для $i, j \in I$; $\sigma^2_{ij} = \hat{\sigma}^2_{ij} (1 - \gamma)$ для $i, j \in J$; $\sigma^2_{ij} = \hat{\sigma}^2_{ij} \sqrt{(1 - \gamma^2)}$ для $i \in I, j \in J$ или $i \in J, j \in I$.

Оценка дисперсии взвешенной оценки $\alpha_r^*$ $r$-го АДК:

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha^*_r} = \sum_{i\in I} C_i^2\hat{\sigma}_i^2(1+\gamma) + \sum_{j\in J} C_i^2\hat{\sigma}_i^2(1-\gamma) + \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\in I}} C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2(1+\gamma) +$$
$$+ \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\in J}} C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2(1-\gamma) + \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2\sqrt{(1-\gamma^2)} + \sum_{\substack{i\in J\\ j\in I}} C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2\sqrt{(1-\gamma^2)}. \quad (10)$$

Выражение (10) берется $L$ раз для всех возможных сочетаний $\hat{\sigma}_{ij}^2(1\pm\gamma)$, $i=\overline{1,3}$. Для каждого $j$-го сочетания из условия (8) получаем систему, аналогичную (9), решая которую, находим оптимальный $\xi$-й вектор $C^*(\xi)$:

$$C^*(\xi) = \left[C_1^*(\xi), C_2^*(\xi), C_3^*(\xi)\right]^T,\ \xi=\overline{1,L} \quad (11)$$

и вычисляем все $\sigma^2_{\alpha^*_r}\left(S, C^*(\xi)\right)$, $\xi=\overline{1,L}$; $S=\overline{1,L}$.

Минимаксная оценка $C^*$ определяется из условия

$$C^* = \arg\min_{\xi\in\{1,L\}, S\in\{1,L\}} \max \hat{\sigma}^2_{\alpha^*_r}\left(S, C^*(\xi)\right). \quad (12)$$

То есть каждый вектор (11) подставляют в каждый вариант дисперсии (10) и в качестве $C^*$ принимается тот, наибольшее значение которого по всем вариантам (10) минимально среди наибольших значений других векторов (11).

**Пример.** Для наглядности рассмотрим двумерный случай ($p=2$). Пусть $\sigma_1^2=1$, $\sigma_2^2=9$; $\sigma_{12}^2=2{,}8$, $\gamma=0{,}1$. Возможные сочетания приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

**Возможные сочетания дисперсий для двумерного случая**

| Номер варианта | Множители для заданного уровня достоверности | | |
|---|---|---|---|
| | $\sigma_1^2$ | $\sigma_2^2$ | $\sigma_{12}^2$ |
| 1 | $1+\gamma$ | $1+\gamma$ | $1+\gamma$ |
| 2 | $1-\gamma$ | $1-\gamma$ | $1-\gamma$ |
| 3 | $1+\gamma$ | $1-\gamma$ | $\sqrt{(1-\gamma^2)}$ |
| 4 | $1-\gamma$ | $1+\gamma$ | $\sqrt{(1-\gamma^2)}$ |

Оценка (7):

$$\alpha_i^* = C\alpha_i(1) + (1-C)\alpha_i(2). \quad (13)$$

Дисперсия (10):

$$\sigma^2_{\alpha^*_r} = \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}^2\right)C^2 + 2\left(\sigma_{12}^2-\sigma_1^2\right)C + \sigma_2^2. \quad (14)$$

Подставив вместо дисперсий четыре варианта их оценки из табл. 1 и выполнив операции (8), (9), получим набор (11) для 4 вариантов (14):

$$C^*(1) = C^*(2) = \frac{\hat{\sigma}_1^2-\hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2-2\hat{\sigma}_{12}^2} = 1{,}41;$$

$$C^*(3) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1-\gamma)-\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1+\gamma)+\hat{\sigma}_2^2(1-\gamma)-2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}} = 1{,}465;$$

$$C^*(4)=\frac{\hat{\sigma}_2^2(1+\gamma)-\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1-\gamma)+\hat{\sigma}_2^2(1+\gamma)-2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}=1{,}361.$$

Значения $\sigma\left(S,C(\xi)\right)$ сведены в табл. 2.

*Таблица 2*

**Значения дисперсии для двумерного случая**

| ***S*** | $\sigma\left(S,C(\xi)\right)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **1** | 0,290 | 0,290 | 0,304 | 0,300 |
| **2** | 0,236 | 0,236 | 0,249 | 0,245 |
| **3** | 0,327 | 0,327 | 0,316 | 0,354 |
| **4** | 0,232 | 0,232 | 0,275 | 0,218 |

Жирной рамкой в табл. 2 выделены варианты с $\max\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S,C^*(\xi)\right)$, двойной рамкой – с двумя $\min\limits_{\xi\in\{1,4\},S\in\{1,4\}}\max\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}=\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}\left(3,C^*(3)\right)=0{,}316$ с ее аргументом $C^*=1{,}465$, $\left(1-C^*\right)=-0{,}465$. Если взять $\sigma_1^2=1$; $\sigma_2^2=9$; $\sigma_{12}^2=2{,}8$; $\gamma=0{,}1$, то $C^*(1)=C^*(2)=0{,}756$; $C^*(3)=0{,}737$; $C^*(4)=0{,}737$. Табл. 3 подобна табл. 2.

*Таблица 3*

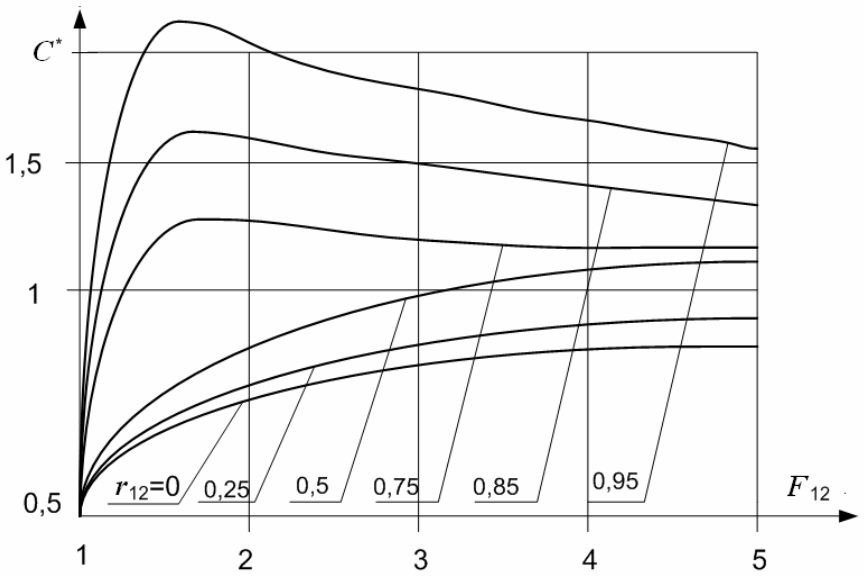
Значения дисперсии **для двумерного случая в соответствии с заданными дисперсиями** $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$, $\sigma_{12}^2$

| *S* | $\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S,C^*(\xi)\right)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **1** | 0,081 | 0,081 | 0,089 | 0,087 |
| **2** | 0,067 | 0,067 | 0,073 | 0,071 |
| **3** | 0,082 | 0,082 | 0,078 | 0,099 |
| **4** | 0,076 | 0,076 | 0,094 | 0,070 |

Соответственно $\min\limits_{\xi\in\{1,4\},S\in\{1,4\}}\max\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}=\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}\left(S,C^*(\xi)\right)=0{,}082$, $C^*=0{,}756$, $\left(1-C^*\right)=0{,}244$. Если предположить, что $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$, то для различных значений коэффициента корреляции $r_{12}=\dfrac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}$ и соотношения $F_{12}=\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ получим семейство графиков $C^*(r_{12},F)$ (рисунок).

Для $F_{12}=1$ для любых $r_{12}$ $C^*=0{,}5$; при $F_{12}\to\infty$ $C^*\to1$, $(1-C)\to0$, т. е. неэффективный метод исключается. Характерно, что при одинаковых $\sigma,\sigma,|\sigma|$ величина $\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}$ зависит от знака $\sigma_{12}^2$ (0,316 для положительной и 0,082 – для отрицательной). То есть взвешивание двух методов с отрицательной $\sigma_{12}^2$ дает лучше результат. В данном примере для $\sigma_{12}^2=0$ дисперсия $\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}=0{,}9$. Это намного больше минимаксных значений дисперсий при

$\sigma_{12}^2 = \pm 2,8$ (0,316 и 0,082 соответственно). Таким образом, взаимная корреляция позволяет повысить точность минимаксной оценки.




Семейство графиков $C^*(r_{12}, F)$ для различных значений коэффициента корреляции

**Выводы.** Используя несколько изоморфных моделей объекта идентификации и несколько различных методов их параметрического оценивания совместно с технологией статистического моделирования помех, можно существенно повысить точность оценок параметров АДК ЛА без увеличения длины выборки данных натурных испытаний. Тем более, что с учетом нестационарности объекта идентификации выборки не могут быть сколь угодно большими. Как обеспечить несмещенность оценок $\alpha_r^*$ из-за неучета реально существующей нелинейности, рассмотрено в работе [4].

**Список литературы**

1. *Снешко Ю. И.* Устойчивость и управляемость самолета. – М.: Машиностроение, 1987. – 300 с.
2. *Корн Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970, – 832 с.
3. *Сильвестров А. Н.* Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. – М.: Энергоатомиздат, 1987, – 200 с.
4. *Сильвестров А. Н.* Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №6. – С. 54 – 65.

В. М. Синєглазов, А. М. Сильвестров, Л. Ю. Спинул, Д. К. Зіменков

**Комплексування методів і моделей у задачі оцінювання запасу стійкості**

Розглянуто підхід до підвищення точності оцінювання аеродинамічних характеристик літальних апаратів з урахуванням їх нелінійності та нестаціонарності.

V. M. Sineglazov, A. N. Silvestrov, L. Y. Spinul, D. K. Zimenkov

**Complexion of methods and models in the stable supply estimation task**

The way of accuracy raising of fly apparatus air dynamic characteristics with here nonlinear and no stationary are considered.