

УДК 629.735.051.681.323(045)

М. С. Фельзер, канд. техн. наук,
М. О. Назарчук

ЦИФРОВИЙ РЕГУЛЯТОР З ВИКОРИСТАННЯМ ВИБІРКИ З ПОДВІЙНОЮ ЧАСТОТОЮ

Інститут електроніки та систем управління, НАУ e-mail: iesy @ nau.edu.ua

Розглянуто питання дослідження кореляції і стійкості дискретної за часом системи із стохастичними параметрами та проаналізовано цифровий регулятор, у якому використовуються вибірки з подвійною частотою, одна з яких застосовується для ідентифікації об'єкта, а друга – для обчислення керування.

Ключові слова: інтервал дискретизації, постійна часу, подвійна частота, модель об'єкта.

Вступ. Для дослідження цифрового керування неперервними за часом системами із стохастичними параметрами зручно перетворити неперервну за часом систему в еквівалентну дискретну за часом систему, яка також має стохастичні параметри.

Завдання полягає у дослідженні таких властивостей еквівалентної дискретної за часом системи із стохастичними параметрами, як кореляція та стійкість.

Поширені самонастроювальні регулятори використовують дискретні моделі, які потребують інтервалу дискретизації. При цьому повинні бути враховані дві суперечливі обставини. З одного боку, інтервал дискретизації мають бути достатньо великим для того, щоб дозволити виконати всі необхідні обчислення у реальному часі. З другого боку, великий інтервал дискретизації може призвести до того, що модель об'єкта буде мати низьку якість, якщо об'єкт має малі постійні часу. Для того щоб розв'язати цю суперечність, скористаємося подвійною частотою вибірки.

Постановка завдання. Розглянемо цифрову систему керування, яка складається із неперервної за часом системи, зв'язаної з цифровим обчислювачем за допомогою імпульсного елемента і екстраполятора на вході й імпульсного елемента на виході. Моментами часу дискретизації є $t_0, t_1, \dots$. Неперервна за часом система, імпульсний елемент з екстраполятором і спостереження в дискретні моменти часу описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} dx(t) &= da(t)x(t) + db(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \\ u(t) &= u(t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\ y(t_i) &= x(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1)$$

де x – вектор стану; u – вектор керування; y – вектор виходу, i є повна інформація про стан.

Процеси $\{a(t), t \geq t_0\}$ і $\{b(t), t \geq t_0\}$ мають незалежні прирости і відомі перші та другі моменти часу. Визначимо декомпозиції a і b :

$$\begin{aligned} a(t) &= \bar{a} + \tilde{a}(t), \quad da(t) = \bar{a}dt + d\tilde{a}(t), \\ b(t) &= \bar{b} + \tilde{b}(t), \quad db(t) = \bar{b}dt + \tilde{b}(t), \end{aligned}$$

де $\bar{a}$ означає математичне сподівання. Тоді перші моменти часу визначаються величинами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, а другі моменти – виразами:

$$\begin{aligned} E\{da(t)^2\} &= v^{aa} dt, \\ E\{da(t)db(t)\} &= v^{ab} dt, \\ E\{db(t)^2\} &= v^{bb} dt. \end{aligned}$$

Початковою умовою для $x(t) \in x(t_0) = x_0$ з відомими першим і другим моментами:

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0, \quad E\{x(t_0) - \bar{x}_0\}^2 = v^{x_0}.$$

Початкова умова $x(t_0)$ з процесами $\{a(t)\}$ і $\{b(t)\}$ взаємно незалежні.

Дослідження дискретної системи із стохастичними параметрами. Неперервну за часом систему можна перетворити в еквівалентну дискретну за часом систему із стохастичними параметрами. Вважається, що інтервал дискретизації постійний і відомий, тобто $T = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Рівняння дискретної за часом системи записуються у вигляді

$$x_{i+1} = \phi_i x_i + \gamma_i u_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

де $x_i = x(t_i)$, $u_i = u(t_i)$, $y_i = y(t_i)$.

У випадку, коли $a \neq 0$, перші та другі моменти ϕ_i та γ_i визначаються виразами:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \exp(\bar{a}T); \\ \bar{\gamma} &= \frac{\bar{b}}{\bar{a}} (\exp(\bar{a}T) - 1); \\ \bar{\phi}^2 &= \exp((2\bar{a} + v^{aa})T); \\ \bar{\phi\gamma} &= \frac{\bar{b} + v^{ab}}{\bar{a} + v^{aa}} (\exp((2\bar{a} + v^{aa})T) - \exp(\bar{a}T)); \\ \bar{\gamma}^2 &= \frac{(v^{bb}(\bar{a} + v^{aa}) + 2\bar{b}(\bar{b} + v^{ab}))}{(2\bar{a} + v^{aa})(\bar{a} + v^{aa})} \exp((2\bar{a} + v^{aa})T) - \\ &\quad - \frac{2\bar{b}(\bar{b} + v^{ab})}{\bar{a}(\bar{a} + v^{aa})} \exp(\bar{a}T) + \frac{(2\bar{b} + v^{ab}) - \bar{a}v^{bb}}{\bar{a}(2\bar{a} + v^{aa})}. \end{aligned} \quad (3)$$

У випадку, коли $\bar{a} = 0$, перші та другі моменти ϕ_i та γ_i мають вирази:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= 1; \\ \bar{\gamma} &= \bar{b}T; \\ \bar{\phi}^2 &= \exp(v^{aa}T); \\ \bar{\phi\gamma} &= \frac{\bar{b} + v^{ab}}{v^{aa}} (\exp(v^{aa}T) - 1); \\ \bar{\gamma}^2 &= \frac{2\bar{b}(\bar{b} + v^{ab})}{v^{aa}} \left(\frac{\exp(v^{aa}T) - 1}{v^{aa}} - T \right) + \frac{v^{bb}}{v^{aa}} (\exp(v^{aa}T) - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Дискретна за часом система (2) є еквівалентною висхідній системі, оскільки її поведінка в дискретні моменти часу збігається з поведінкою неперервної за часом системи (1).

Розглянемо коефіцієнти кореляції між процесами $\{a(t)\}$ і $\{b(t)\}$ в неперервній за часом системі $\{\phi_i\}$, $\{\gamma_i\}$ в еквівалентній дискретній за часом системі.

Коефіцієнт кореляції α_{cs} між $\{a(t)\}$ і $\{b(t)\}$ у неперервній за часом системі визначається співвідношенням:

$$(v^{ab})^2 = \alpha_{cs} v^{aa} v^{bb}. \quad (5)$$

Визначаючи величини $v^{\phi\phi}$, $v^{\phi\gamma}$, $v^{\gamma\gamma}$ виразами

$$\begin{aligned} v^{\phi\phi} &= \overline{\phi^2} - \bar{\phi}^2, \\ v^{\phi\gamma} &= \overline{\phi\gamma} - \bar{\phi}\bar{\gamma}, \\ v^{\gamma\gamma} &= \overline{\gamma^2} - \bar{\gamma}^2, \end{aligned} \quad (6)$$

знаходимо коефіцієнт кореляції α_{eds} між процесами $\{\phi_i\}$, $\{\gamma_i\}$ в еквівалентній дискретній за часом системі:

$$(v^{\phi\gamma})^2 = \alpha_{eds} v^{\phi\phi} v^{\gamma\gamma}. \quad (7)$$

Співвідношення (4) – (7) дозволяють у випадку, коли $\bar{a} = \bar{b} = 0$, встановити, що

$$\alpha_{cs} = \alpha_{eds}, \quad \forall v^{aa}, v^{bb}, T.$$

Використовуючи співвідношення (3) і (5) – (7), можна провести дослідження впливу статистик v^{aa} і v^{bb} процесів у неперервній за часом системі на співвідношення між α_{cs} і α_{eds} у випадку, коли $a \neq 0$. Розрахунки показують, що залежність між α_{cs} і α_{eds} майже лінійна.

Проведемо дослідження впливу кореляції і статистик процесів у неперервній за часом системі на стійкість еквівалентної дискретної за часом системи.

Розглянемо дискретну за часом розімкнену систему (2), яка характеризується парою (ϕ_i, γ_i) , за наявності лінійного оберненого зв'язку за станом:

$$u_i = -lx_i. \quad (8)$$

Визначаючи величину $\psi_{l,i}$ співвідношенням

$$\psi_{l,i} = \phi_i - l\gamma_i,$$

отримаємо за допомогою виразу (2) рівняння замкнутої системи:

$$x_{i+1} = \psi_{l,i} x_i. \quad (9)$$

Система (9) називається стійкою в середньому квадратичному, якщо $x_i^2 \rightarrow 0, \forall x_0$. Крім того, пара (ϕ_i, γ_i) називається стабілізованою в середньому квадратичному, якщо існує таке l , що замкнена система (9) виявляється стійкою в середньому квадратичному. Вважаємо, що $\bar{\gamma}^2 \neq 0$, і нехай $\tilde{\rho}$ означає мінімальне значення $\bar{\psi}_l^2$, яке досягається за допомогою l . Можна показати, що

$$\tilde{\rho} = \overline{\phi^2} - \frac{(\overline{\phi\gamma})^2}{\bar{\gamma}^2}, \quad (10)$$

і розімкнена система (2) стабілізована в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли $\bar{\rho} < 1$. Це необхідна і достатня умова того, щоб еквівалентна дискретна за часом система із стохастичними параметрами (8) мала стійкість в середньому квадратичному, явним чином залежить від параметрів і статистик еквівалентної дискретної системи і періоду дискретизації. Величину $\tilde{\rho}$ можна вважати мірою максимальної стабілізованості замкнутої системи в середньому квадратичному, яка досягається за допомогою l . Якщо $\bar{\gamma} \neq 0$ і замінити ϕ і γ на $\bar{\phi}$ і $\bar{\gamma}$, то $\tilde{\rho} = 0$. Використовуючи співвідношення (3), (5) і (10), можна дослідити залежність $\tilde{\rho}$ від v^{aa} , v^{bb} і α_{cs} у випадку, коли $\bar{a} \neq 0$. Розрахунки показують, що вплив v^{bb} на $\tilde{\rho}$ багато сильніший, ніж вплив v^{aa} . Корельований шум приводить до менших значень $\tilde{\rho}$, ніж некорельований. У випадку корельованого шуму і $v^{aa} \neq 0$ існує значення v^{bb} , за якого $\tilde{\rho}$ має мінімум. Зі збільшенням v^{bb} $\tilde{\rho}$ прямує до постійного значення. Вплив α_{cs} на $\tilde{\rho}$ виявляється сильніше в разі великих значень v^{aa} . Зі зростанням v^{aa} у випадку, коли $\alpha_{cs} \neq 1$, $\tilde{\rho}$ не прямує до постійного значення.

Цифровий регулятор з подвійною частотою вибірки. Розглянемо об'єкт без часових запізнень з некорельованим шумом, який описується рівнянням

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t-1) + \frac{1}{A(q^{-1})} e(t), \quad (11)$$

де $y(t)$ – вихід об'єкта; $u(t)$ – керування; $e(t)$ – дискретний за часом білий шум з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією,

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-n},$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{m-1} q^{-(m-1)},$$

а q^{-1} – оператор оберненого зсуву для інтервалу вибірки τ .

Вважаємо, що ідентифікація такого об'єкта і обчислення керування для нього вимагають інтервалу часу $j\tau$, у той час, як вихід об'єкта може вимірюватись через інтервал часу, який дорівнює τ . У результаті інтервал дискретизації керування буде відрізнятися від інтервалу дискретизації виходу об'єкта, що можна назвати подвійною частотою вибірки. Часовий інтервал, який визначається оператором q^{-1} , передбачається рівним τ , а часовий інтервал $j\tau$ визначається оператором q^{-j} .

Модель об'єкта з подвійною частотою вибірки визначаємо на основі моделі (11).

Знаходимо поліном

$$P_1(q^{-1}) = 1 + p_{11} + \dots + p_{1,j-1} q^{-(j-1)}$$

так, щоб коефіцієнти при $q^{-1}, q^{-2}, \dots, q^{-(j-1)}$ в $A(q^{-1})P_1(q^{-1})$ дорівнювали нулю:

$$A(q^{-1})P_1(q^{-1}) = A_1(q^{-1}) = 1 + a_{11} q^{-j} + \dots + a_{1n} q^{-(j+n-1)}.$$

Помноживши числівник і знаменник правої частини виразу (1) на $P_1(q^{-1})$, отримаємо

$$y(t) = \frac{P_1(q^{-1})B(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} u(t-1) + \frac{P_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} e(t). \quad (12)$$

Відзначимо, що керування змінюється через інтервал часу $j\tau$, тобто

$$u(t-1) = u(t-2) = \dots = u(t-j);$$

$$u(t-j-1) = u(t-j-2) = \dots = u(t-2j).$$

Нескладні перетворення дозволяють подати рівняння (12) у вигляді:

$$y(t) = \frac{B_1(q^{-j})}{A_1(q^{-1})} u(t-j) + \frac{1}{A_1(q^{-1})} e(t) =$$

$$= a_{11} y(t-j) - a_{12} y(t-j-1) - \dots - a_{1n} y(t-j-n+1) +$$

$$+ b_{10} u(t-j) + b_{11} u(t-2j) + \dots + b_{1s} u[t-(s+1)j] + e_1(t), \quad (13)$$

де $B_1(q^{-j}) = [b_{10} + b_{11} q^{-j} + \dots + b_{1s} q^{-sj}]$, а $e_1 = e(t) + p_{11} e(t-1) + \dots + p_{1,j-1} e(t-j+1)$.

Модель, яка описується рівнянням (13), можна називати моделлю з подвійною частотою вибірки, оскільки в ній використовуються два інтервали вибірки: інтервал часу τ – для $y(t)$, який є меншим інтервалом, та інтервал часу $j\tau$ – для керування $u(t)$, який є більшим інтервалом. Модель (13) визначає упереджене значення $y(t)$ на основі

$$y(t-j), \dots, y(t-j-n+1) \quad \text{і} \quad u(t-j), u(t-2j), \dots, u[t-(s+1)j]$$

тільки на інтервалах часу $j\tau$.

Для обчислення упереджених значень $y(t-j)$, ..., $y(t-n+1)$ на основі тих же значень необхідно розширити. Для системи n -го порядку така розширена модель має вигляд

$$\begin{bmatrix} 100 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-j) \\ y(t-j-1) \\ \vdots \\ y(t-j-n+1) \end{bmatrix} =$$

$$= q^{-j} \begin{bmatrix} B_1(q^{-j}) \\ B_2(q^{-j}) \\ \vdots \\ B_n(q^{-j}) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t-1) \\ \vdots \\ e_n(t-n+1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

або

$$\bar{y}(t) = -[A]\bar{y}(t-j) + \bar{B}(q^{-j})u(t-j) + \bar{E}(t). \quad (15)$$

Рівняння (15) подібне до дискретного рівняння стану за винятком того, що $\bar{B}$ містить члени відносно q^{-j} , а вектор u не включає стану, проте включає зсуви самого u за часом. У зв'язку з цим рівняння (4) можна назвати рівнянням псевдостану.

Розглянемо рівняння (13) як опис об'єкта з $e_1(t)$, який являє собою помилку керування. Оскільки $e_1(t)$ та величини, які використовуються для обчислення упередження $y(t)$, незалежні, то можна одержати незміщені оцінки $\hat{A}_1(q^{-1})$, $\hat{B}_1(q^{-j})$ поліномів $A_1(q^{-1})$, $B_1(q^{-j})$, відповідно, використовуючи відомі алгоритми ідентифікації на основі методу найменших квадратів.

Керування таким об'єктом здійснюється в моменти часу $(t-Nj)$, $[t-(N-1)j]$, ..., і т. д. Вважаючи вихід у кожний момент часу j т рівним нулю, можна забезпечити вихід з мінімальною дисперсією.

Мінімізуючи математичне сподівання (13) відносно $u(t)$, отримаємо

$$-(a_{11} + a_{12}q^{-1} + \cdots + a_{1n}q^{-(n-1)})y(t) + (b_{10} + b_{11}q^{-j} + \cdots + b_{1s}q^{-sj})u(t) = 0.$$

Якщо врахувати, що ідентифікація об'єкта забезпечила отримання оцінок коефіцієнтів $\hat{A}_1(q^{-1})$, $\hat{B}_1(q^{-j})$, то керування визначається виразом

$$u(t) = \left[\frac{\hat{a}_{11} + \hat{a}_{12}q^{-1} + \cdots + \hat{a}_{1n}q^{-(n-1)}}{\hat{b}_{10} + \hat{b}_{11}q^{-j} + \cdots + \hat{b}_{1s}q^{-sj}} \right] y(t), \quad (16)$$

де $t = Nj$, а N – ціле число.

Для аналізу замкненої системи необхідно підставити керування (16) в рівняння (14), отримавши тим самим рівняння повної системи, яка описує її поведінку як на меншому, так і на більшому інтервалі часу. Оскільки це рівняння досить складне, можна мати розв'язок лише на більшому інтервалі, який являє собою особливий інтерес. Цей розв'язок визначається співвідношенням

$$y(t) = \frac{\hat{B}_1(q^{-j})}{B_1(q^{-j})} e_1(t). \quad (17)$$

Якщо $\hat{B}_1(q^{-j}) = B_1(q^{-j})$, то $y(t) = e_1(t) = (1 + p_{11}q^{-1} + \cdots + p_{1j-1}q^{-(j-1)})e(t)$.

Рівняння замкненої системи (17) не має дійсних коренів полінома B у випадку описання на меншому інтервалі. Воно має модифіковані полюси, які є коренями $B_1(q^{-j})$. Звідки випливає, що у регулятора з періодом вибірки jT поліном $B(q^{-j})$ може мати корені поза одиничним кругом. Однак для того ж об'єкта $B_1(q^{-j})$ може мати корені в середині одиничного круга. Це означає, що навіть у випадку не мінімально фазової системи поведінка системи на великому інтервалі буде стійкою за наявності неточностей у визначенні параметрів $B_1(q^{-j})$, хоч поведінка її на меншому інтервалі буде визначатися нестійкими коренями.

Порівняння поведінки звичайного регулятора із запропонованим на прикладі об'єкта другого порядку показує, що регулятор, який використовує подвійну частоту вибірки, явно кращий.

Висновки. Дослідження кореляції і стійкості еквівалентних дискретних за часом систем із стохастичними параметрами показало, що залежність між коефіцієнтами кореляції в неперервній і еквівалентній дискретній за часом системах майже лінійна, а необхідна і достатня умова того, щоб дискретна система мала стійкість у середньому квадратичному безпосередньо залежить від параметрів і статистик неперервної, еквівалентної дискретної систем та періоду дискретизації. Корельований шум призводить до менших значень запасу стійкості, ніж некорельований. Аналіз роботи цифрового регулятора, що ґрунтується на використанні вибірки з подвійною частотою, показав, що навіть у випадку не мінімально фазової системи поведінка системи на більшому інтервалі буде стійкою у разі неточностей у визначенні параметрів, хоча поведінка її на меншому інтервалі буде визначатися нестійкими коренями. Порівняння звичайного регулятора із запропонованим показує, що регулятор, який використовує подвійну частоту вибірки, явно кращий.

М. С. Фельзер, М. О. Назарчук

Цифровой регулятор с использованием выборки с двойной частотой

Рассмотрены вопросы исследования корреляции и устойчивости дискретной во времени системы со стохастическими параметрами и проанализирован цифровой регулятор с двойной частотой выборки, одна из которых применяется для идентификации объекта, а вторая – для вычисления интервала управления.

M. S. Felser, M. O. Nazarchuk

Digital regulator based on dual-rate sampling

Problems of stability and correlation study of a discrete in time system with stochastic parameters are considered in this paper. Digital regulator with double-frequency sampling is analyzed. One frequency is usual for the plant identification, and the other one for the control calculation.