

УДК 629.735.051.681.323(045)

М. С. Фельзер, канд. техн. наук,
О. М. Кравченко

АНАЛІЗ ПОМИЛОК МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ

Інститут електроніки і систем управління НАУ, e-mail: fsu@nau.edu.ua

Порівняно шість методів оцінювання параметрів, а саме: метод найменших квадратів, інструментальних змінних, ортогональної регресії та узагальнені форми цих методів. Показано, що метод найменших квадратів для обчислювання великого значення відношення шум / сигнал найбільш прийнятний. У разі малого рівня шуму і стійких моделей оптимальним є метод інструментальних змінних.

Ключові слова: різницева модель, метод найменших квадратів, метод інструментальних змінних, метод ортогональної регресії.

Вступ і постановка завдання. Останнім часом приділяється велика увага питанням визначення динамічних моделей систем керування і їх основних ланок через те, що апріорна інформація про особливості цих систем і умови їх роботи неповна, а в деяких випадках – взагалі немає. Тому створення оптимальних за точністю систем вимірювання і керування зумовлено великими теоретичними і практичними труднощами [1]. Особливе значення в процесі ідентифікації є визначення параметрів систем і помилок під час їх визначення.

Розглянемо лінійну систему, яка описується лінійною різницевою моделлю вигляду:

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=1}^{n_1} a_{1i} \tilde{x}_{1,t-i+1} + \dots + \sum_{i=1}^{n_q} a_{qi} \tilde{x}_{q,t-i+1} + \sum_{i=1}^{n_s} b_i \tilde{y}_{t-i} + C, \quad (1)$$

де y_t – вихід у момент часу t ; $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{qt}$ – входи в момент часу t ; $a_{1i}, \dots, a_{qi}$ – коефіцієнти вхідних сигналів; b_i – коефіцієнти за виходом; C – постійне відхилення. Ці три класи коефіцієнтів позначимо через A, B, C . Саме ці коефіцієнти потрібно оцінювати.

За наявності T спостережень модель записуємо у вигляді співвідношення

$$\tilde{Y} = \tilde{S}\beta, \quad (2)$$

де Y – T -вимірний вектор виходів $[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_T]$; S – матриця сигналів, k -й рядок якої має вигляд: $[\tilde{x}_{1,k} \dots \tilde{x}_{1,k-n_1+1}, \dots, \tilde{x}_{q,k} \dots \tilde{x}_{q,k-n_q+1}, \tilde{y}_{k-1} \dots \tilde{y}_{k-n_s}, 1]$. Ця матриця має розмірність $T \times n$, де $n = n_1 + n_2 + \dots + n_q + n_s + 1$.

Позначимо вихід через Y , а вектор шуму – через u . Тоді

$$Y = \tilde{Y} + u. \quad (3)$$

Матрицею сигналів є $S = \tilde{S} + U$. Вважається, що вектор шуму є автокорельованим, тобто u_i є лінійною функцією попередніх значень u_{i-1}, u_{i-2} і т. д. У цьому випадку u_i можна подати у вигляді

$$u_i = \sum_{j=1}^p a_j u_{i-j} + e_j, \quad (4)$$

де e_i – випадковий шум. Підставивши вираз (3) у (2), отримаємо

$$Y = S\beta + \varepsilon, \text{ де } \varepsilon = u - U\beta.$$

З урахуванням співвідношення (4) елементи вектора помилок ε є автокорельованими. Через Ω позначимо математичне сподівання $\varepsilon\varepsilon'$.

Методи оцінювання параметрів. Розглянемо шість методів оцінювання параметрів, зокрема методи найменших квадратів, інструментальних змінних, ортогональної регресії і узагальнені форми цих методів.

Оцінювання за методом найменших квадратів записуємо у вигляді

$$\beta_{LS} = (S'S)^{-1}S'Y, \quad (5)$$

а за узагальненим методом найменших квадратів:

$$\beta_{GLS} = (S'\Omega^{-1}S)^{-1}S'\Omega^{-1}Y. \quad (6)$$

Вирази (5) і (6) є зміщеними і необґрунтованими. Якщо Ω не пропорційно одиничній матриці, то оцінкам (6) віддають перевагу, тому що їм властиві менші дисперсії. Оцінка Ω , яка використовується у виразі (6), утворюється на основі вектора нев'язок у рівнянні (5) і оцінок коефіцієнтів b_i за допомогою виразу (5).

Оцінювання за методом інструментальних змінних виражають у вигляді

$$\beta_{IV} = (Z'S)^{-1}Z'Y, \quad (7)$$

де Z – така $T \times n$ -матриця, що $(p \lim)T^{-1}Z'\varepsilon = 0$, причому $p \lim T^{-1}Z'S$ існує і не вироджена.

Оцінювання за узагальненим методом інструментальних змінних визначають за виразом

$$\beta_{GIV} = (Z'\Omega^{-1}S)^{-1}Z'\Omega^{-1}Y. \quad (8)$$

Вирази (7) і (8) обґрунтовані. Оптимальною матрицею Z , яка забезпечує мінімальні дисперсії оцінок, є матриця $\tilde{S}$, тобто вільна від шумів матриця сигналів. Матрицю Z для використання у виразі (7) можна визначити підлаштуванням на основі оцінок найменших квадратів (5) або узагальнених найменших квадратів (6), причому використанню (6) слід віддати перевагу. Оцінки Z і Ω для використання в рівнянні (8) можна визначити підлаштуванням на основі (7) або (6). Хоча підлаштування на основі (7) має перевагу, однак її використання може призвести до нестійкості процесу.

Розглянемо методи ортогональної регресії і узагальненої ортогональної регресії. Подамо рівняння (1) у формі:

$$0 = \sum_{i=1}^{m_1} a_{1i} \bar{x}_{1,t-i+1} + \dots + \sum_{i=1}^{m_1} a_{qi} \bar{x}_{q,t-i+1} + \sum_{i=1}^{n_s+1} b_i \bar{y}_{t-i} + c, \quad (9)$$

де величини $\tilde{x}, \tilde{y}$ вимірюються відносно своїх математичних сподівань. Позначимо вектор математичних сподівань через r . Сукупність із T спостережень можна записати у вигляді

$$R\alpha = F,$$

де $R = \tilde{R} + W$, а W є матрицею помилок. Тоді $E = W\alpha$. Через Ω позначимо математичне сподівання EE' .

Звичайне оцінювання ортогональної регресії для рівняння (9) можна записати таким чином:

$$(R'R - \lambda I)\alpha = 0, \quad \alpha'\alpha = 1, \quad c = r'\alpha.$$

де α – власний вектор, який відповідає найменшому власному значенню матриці $R'R$.

Оцінки за методом ортогональної регресії еквівалентні оцінкам максимальної правдоподібності, коли помилки нормально розподілені з нульовими математичними сподіваннями і рівними дисперсіями. За цими умовами вони обґрунтовані й ефективні. Слід зазначити, що оцінки за методом ортогональної регресії залежать від одиниць вимірювання різних змінних.

У випадку автокорельованого шуму оцінювання за узагальненим методом ортогональної регресії записують у вигляді:

$$(R'\Omega^{-1}R - \beta\lambda I)\alpha = 0, \quad \alpha'\alpha = 1, \quad c = r'\alpha.$$

Якщо не всі змінні зашумлені, R розщеплюється: $R = [R_1 R_2]$, де R_1 – частина, вільна від шуму, R_2 – зашумлена $T \times l$ -матриця. При цьому α також розщеплюється: $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2]$.

У цьому разі звичайне оцінювання за методом ортогональної регресії набуває вигляду

$$\alpha_1 = -[R_1' R_1]^{-1} R_1' R_2 \alpha_2;$$

$$\{R_2' [I - R_1 (R_1' R_1)^{-1} R_1'] R_2 - \lambda I\} \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 = 1, \quad c = [\alpha_1 \alpha_2] r,$$

де α_2 – власний вектор, який відповідає найменшому власному значенню матриці $R_2' [I - R_1 (R_1' R_1)^{-1} R_1'] R_2$. Оцінювання за узагальненим методом ортогональної регресії в цьому випадку виражається таким чином:

$$\alpha_1 = -(R_1' \Omega^{-1} R_1)^{-1} (R_1' \Omega^{-1} R_2) \alpha_2;$$

$$\{R_2' [\Omega^{-1} - \Omega^{-1} R_1 (R_1' \Omega^{-1} R_1)^{-1} R_1' \Omega^{-1}] R_2 - \lambda I\} \alpha_2 = 0;$$

$$\alpha_1' \alpha_2 = 1, \quad c = [\alpha_1 \alpha_2] r,$$

де α_2 – власний вектор, який відповідає найменшому власному значенню матриці $R_2' [\Omega^{-1} - \Omega^{-1} R_1 (R_1' \Omega^{-1} R_1)^{-1} R_1' \Omega^{-1}] R_2$.

Методи оцінювання параметрів порівнювали в умовах різних рівнів шумів за рівномірного і нормального розподілень помилок як на моделях, які перебувають на межі стійкості, так і на стійких моделях.

Висновки. Узагальнені форми методів оцінювання параметрів мають перевагу над відповідними звичайними формами. Метод найменших квадратів в обчислювальному сенсі виявився найбільш робастним методом. За великого значення відношення шум/сигнал, а також, коли сама модель не надто стійка, результати моделювання показують, що метод найменших квадратів є найкращим. У разі невеликого рівня шуму і досить стійких моделей найкращим є метод інструментальних змінних. Цей метод чутливий, однак, до помилок округлення.

Що стосується відносних помилок оцінювання різних класів коефіцієнтів, то оцінки коефіцієнтів C і B у середньому більш точні, ніж оцінки коефіцієнтів A за будь-яких співвідношень шум/сигнал для обох типів розподілення помилок і всіх методів оцінювання, які розглядались, тобто оцінки вхідних сигналів роблять найбільший внесок у загальну помилку оцінювання. Суттєве поліпшення оцінок коефіцієнтів B забезпечує використання методу інструментальних змінних.

Список літератури

Блохін Л. М. Оптимізація характеристик вимірювальних комплексів: навч. посіб. / Л. М. Блохін – К.: КМУЦА, 1997. – 100 с.

М. С. Фельзер, О. М. Кравченко

Анализ ошибок методов оценки параметров

Проведено сравнение шести методов оценивания параметров, а именно: методов наименьших квадратов, инструментальных переменных, ортогональной регрессии и обобщенные формы этих методов. Показано, что метод наименьших квадратов для вычислений большого значения отношения шум/сигнал является наиболее приемлемым. При небольшом уровне шума и устойчивых моделях оптимальным является метод инструментальных переменных.

M. S. Felzer, O. M. Kravtchenko

Diagnosis of errors for parameter estimation methods

Comparison of six methods of parameter estimation, namely, least-squares methods, tool variables, orthogonal regression and the generalized forms of these methods, was made. It shown that the least-squares method computationally at great value of the ratio of noise to a signal is the best one. At small noise level and steady models the best is the method of tool variables.