УДК 007:681.51(045)

**Д. С. Демьяник,** асп.

# ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ В БАЗИСЕ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦИЙ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua

*Описана программа, реализующая быстрые преобразования Фурье в базисе функций Виленкина–Кресетенсона, а также результаты программного синтеза симметричных систем Виленкина–Кресетенсона функций.*

**Ключевые слова.** Быстрые преобразования Фурье, спектральный анализ, функции Виленкина–Кресненсона.

**Введение.** При обработке как непрерывных, так и дискретных сигналов зачастую возникает необходимость вычисления спектрального образа сигналов, образуемого при помощи преобразований Фурье. Спектр последовательности конечного числа дискретных значений (отсчётов) сигналов представляет собой такую же по длине конечную последовательность весовых коэффициентов для системы дискретных ортонормированных функций. Формулы прямого и обратного дискретных преобразований Фурье (ДПФ) имеют вид:

$$S(k)=\sum_{x=0}^{N-1} s(x)\varphi_k(x);$$
$$s(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)\overline{\varphi_k(x)}, \qquad (1)$$

где $s(x)$ – дискретный сигнал; $S(k)$ – его спектр в выбранном базисе дискретных ортонормированных функций $\varphi_k(x)$; $N$ – количество отсчётов сигнала; $x$ – аргумент функции или порядковый номер отсчёта, являющийся нормированным временем; $k$ – порядковый номер (или просто – порядок) базисной функции. Черта над функцией означает комплексно-сопряжённую функцию.

Часто преобразования Фурье осуществляются в базисе тригонометрических функций, а также в базисе функций Уолша. Базисные функции для тригонометрического преобразования Фурье имеют вид:

$$\varphi_k(x)=e^{j\frac{2\pi}{N}kx},$$

причем переменные функции совпадают с переменными, используемыми в системе (1).

Функции Уолша (упорядоченные по Адамару) аналитически описываются следующим образом:

$$\varphi_k(x)=(-1)^{\sum_{i=0}^{n} k_i x_i}.$$

Перспективным классом функций для решения задач спектрального анализа дискретных сигналов и изображений являются функции Виленкина–Крестенсона [1].

**Постановка задачи.** Для использования систем функций Виленкина–Крестенсона (ВКФ) для быстрых преобразований Фурье (БПФ) необходимо изучить их свойства. Для этого было бы удобно воспользоваться программой, которая может генерировать базисы ВКФ и осуществлять в этих базисах БПФ информационных блоков. В этой работе рассмотрена такая программа и изложены результаты её применения.

**Теоретические сведения.** Матрица системы ВКФ представляет собой кронекеровскую степень матрицы дискретно экспоненциальных функций (ДЭФ). Поэтому и матрицу ДЭФ, и матрицу функций Уолша (которая представляет собой кронекеровскую степень матрицы ДЭФ размером 2 на 2) можно считать частным случаем матрицы ВКФ [1]. Для получения спектра сигнала необходимо вектор-столбец, содержащий отсчёты сигнала, умножить справа на матрицу преобразования [2].

Базисная функция системы ВКФ описывается выражением

$$\varphi_k(x) = e^{j\frac{2\pi}{m}\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}, \tag{2}$$

где $m$ – основание системы счисления; $k_i$ – $i$-й разряд числа $k$, записанного в позиционной $m$-ичной системе; $n$ – количество разрядов в $m$-ичном представлении значения $N$, которое определяет длину выборочных отсчетов сигнала, причем $N = m^n$.

Быстрые преобразования Фурье в базисе ВКФ требуют меньшего количества вычислений, чем БПФ в базисе ДЭФ [1]. Это объясняется тем, что матрица преобразования для базиса ВКФ имеет в своём составе большее количество единичных элементов, чем матрица для базиса ДЭФ, соответственно для реализации БПФ в базисе ВКФ требуется совершить меньшее количество умножений, чем в базисе ДЭФ.

Для восстановления сигнала по его спектру необходимо спектр умножить справа на матрицу, транспонированную по отношению к матрице преобразования и содержащую элементы, комплексно-сопряжённые с элементами матрицы преобразования. Поэтому особый интерес для спектрального анализа представляют матрицы преобразования, симметричные относительно главной диагонали. С этой точки зрения матрицы ВКФ имеют преимущества перед матрицами ДЭФ и функциями Уолша, поскольку из матрицы системы ВКФ можно сгенерировать во много раз больше симметричных матриц, чем матриц двух других систем функций.

**Описание программы.** Разработанная программа, структурная схема которой приведена на рис. 1, осуществляет БПФ в базисе ВКФ. Для заданных параметров $m$ – основания системы счисления и $n$ – разрядности чисел в $m$-ичной системе – программа генерирует все возможные индикаторные матрицы. Индикаторными матрицами систем ВКФ являются такие невырожденные в кольце вычетов по модулю $m$ квадратные $n$-го порядка матрицы $M$ с элементами, принадлежащими множеству $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, с помощью которых устанавливается однозначное соответствие

$$y = (xM)_m \tag{3}$$

между номером $x \in \overline{0, N-1}$ строки матрицы ВКФ-Пэли и номером строки $y$ новой системы ВКФ [3]. Матрица ВКФ-Пэли образуется в результате $m$-ичной инверсии номеров строк матрицы, сформированной по формуле (2), т. е.

$$\varphi_k^{Peli}(x) = e^{j\frac{2\pi}{m}\sum_{i=1}^{n} k_{n+1-i} x_i}. \tag{4}$$

Для того чтобы матрица была индикаторной, её определитель и число $m$ должны быть взаимно простыми. Все такие матрицы являются правосторонне симметрическими [3]. Для того чтобы найти индикаторные матрицы, программа перебирает все возможные правосторонне симметрические матрицы с заданными параметрами $m$ и $n$. Индикаторные матрицы в сокращённом виде записываются в файл.

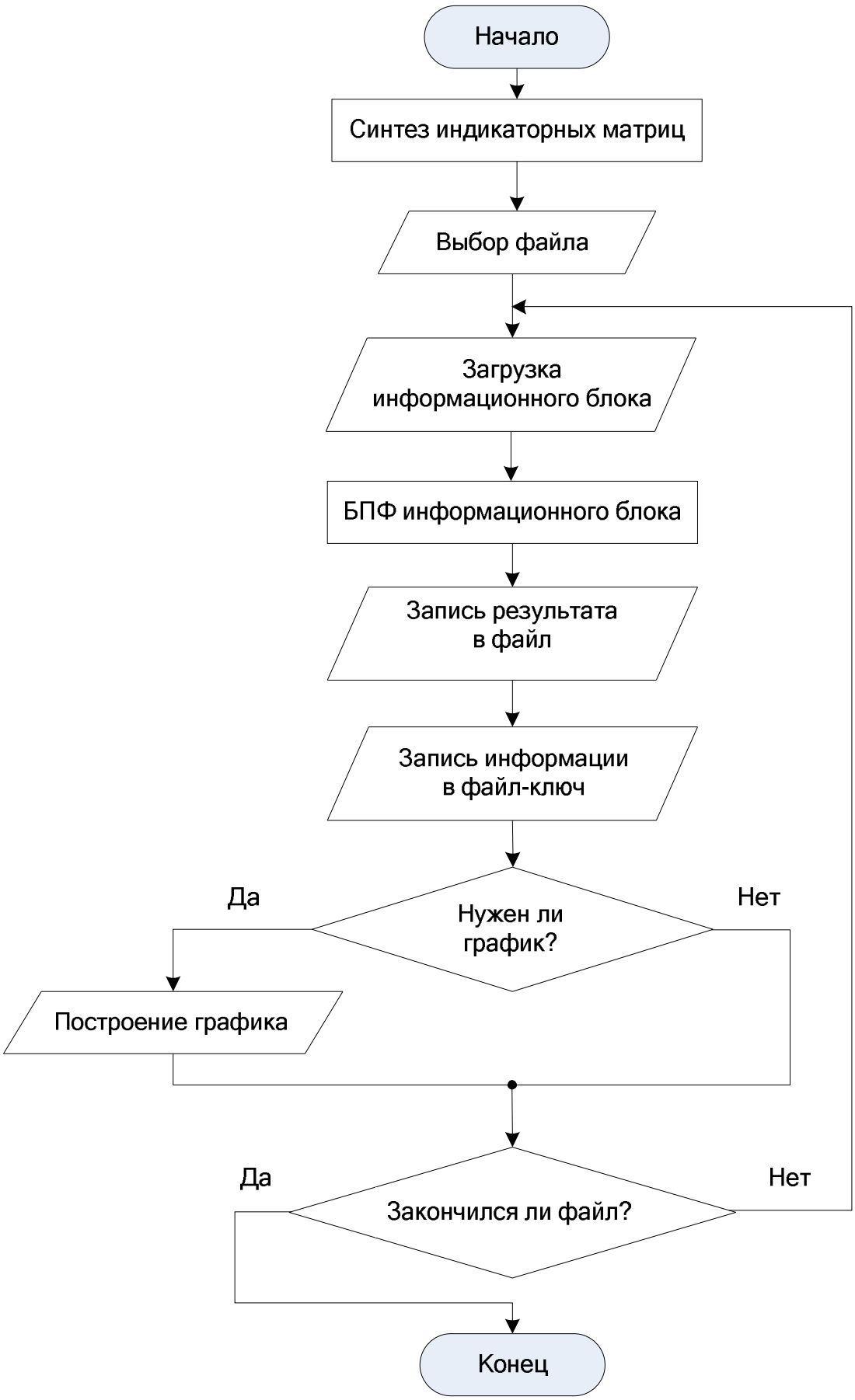


Рис. 1. Структурная схема программы

После того, как все индикаторные матрицы найдены и записаны в файл, есть возможность провести БПФ в одном из найденных базисов ВКФ. Информационный блок загружается в программу в виде файла. Каждая пара байтов из вещественного файла представляется программе в виде комплексных чисел. Реальная и мнимая компоненты чисел, которые предъявляются программе, могут изменяться в пределах от 0 до 255. Как только в программу загружена последовательность байтов длиной $2m^n$ (т. е., $m^n$ комплексных чисел), начинается непосредственное формирование спектра. Результатом БПФ является последовательность комплексных чисел длиной $m^n$. Данная последовательность заносится в файл, указанный пользователем (и представляет собою целые части реальной и мнимой составляющих спектральных коэффициентов). Далее в программу загружается следующая последовательность байт из файла, которая в свою очередь подвергается БПФ в выбранном базисе ВКФ и записывается в тот же файл, что и первая последовательность. И так происходит до тех пор, пока не закончится файл.

Помимо этого файла создаётся файл-ключ, содержащий информацию, необходимую для правильного восстановления информации, содержащейся в исходном файле. В этом файле хранятся числа *m* и *n*, а также сокращённая форма индикаторной матрицы.

При восстановлении исходной информации над файлом, в котором содержатся спектры, проводится обратное БПФ в базисе ВКФ, указанном в файле-ключе. При этом, если указан неправильный файл-ключ, восстановленная информация будет представлять бессмысленный набор байтов.

Другой метод записи спектров в файл, который может быть применён при использовании программы, заключается в том, что массив комплексных чисел, полученных после БПФ, округляется до целых значений, затем преобразуется в 256-ичную систему счисления и поразрядно записывается в файл. Причём каждый разряд записывается как символ и занимает один байт компьютерной памяти. Например, десятичное число «11064» имеет длину 5 символов и для его записи требуется 5 байтов. Если его представить в 256-ичной системе, то оно будет выглядеть как «[43][56]». Если теперь числа 43 и 56 записать в файл, как символы, то запись будет иметь вид «+8» и занимать 2 байта памяти, поскольку число 43 – это ASCII-код символа «+», а 56 – «8». При такой форме записи существенно снижается объём файла, в котором хранятся спектры файла. В случае применения такого метода записи значительно увеличивается размер файла-ключа, поскольку в него записывается дополнительная информация, возникающая из-за особенностей использованного метода представления числа в 256-ичной системе, однако по сравнению с уменьшением размера файла, в котором хранятся спектры, это увеличение несущественно.

Также программа имеет возможность строить графики амплитудного и частотного спектров, полученных в результате выполнения БПФ над одним из блоков байтов файла.

Для этого перед началом преобразований нужно указать номер блока, для которого должны быть построены графики. Если указанный номер не больше количества блоков байтов размером $2m^n$, содержащихся в файле, то после окончания преобразования появятся графики амплитудного и частотного спектров. На рис. 2 показан график амплитуды и фазы для ряда комплексных чисел, полученных из фразы «Объявление прочла вся Барцелона. Начались поиски. Было задержано шестьдесят женщин, походивших на искомую ведьму, были пытаемы ее родственники... Существовало сме». Амплитудные и фазовые коэффициенты получены следующим образом: двенадцатая пара символов «Ба» образует комплексное число номер 11. Символ «Б» имеет ASCII-код: «-63», «а» – «-32». Соответственно, алгебраическая форма данного числа будет иметь вид – 63-i32. А показательная форма записывается так: $77e^{j0,15\pi}$, как и показано на графике. Приведённый отрывок рассказа имеет длину 162 байта и содержит 81 комплексное число, полученное приведённым выше образом. После осуществления над этим рядом 81-го точечного БПФ в базисе ВКФ с параметрами $m = 3$, $n = 4$ получается спектр, изображённый на рис. 3.

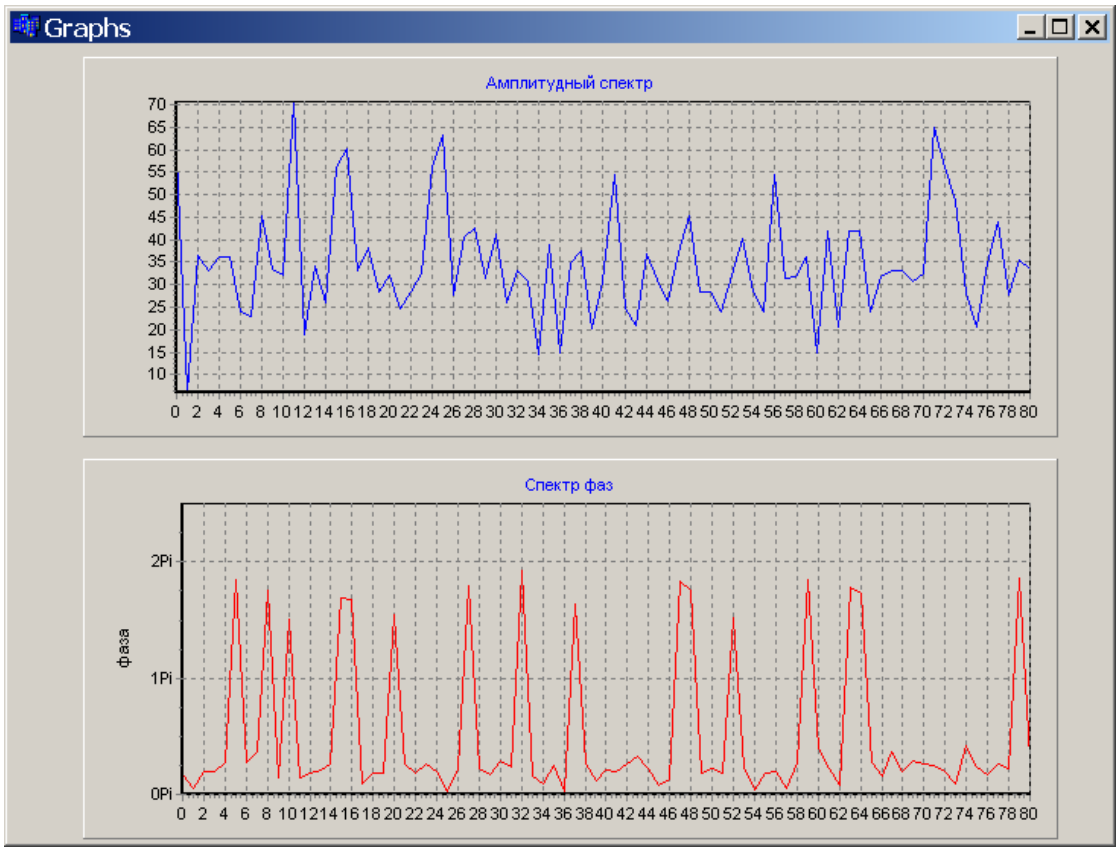


Рис. 2. Последовательность комплексных чисел, полученных из файла

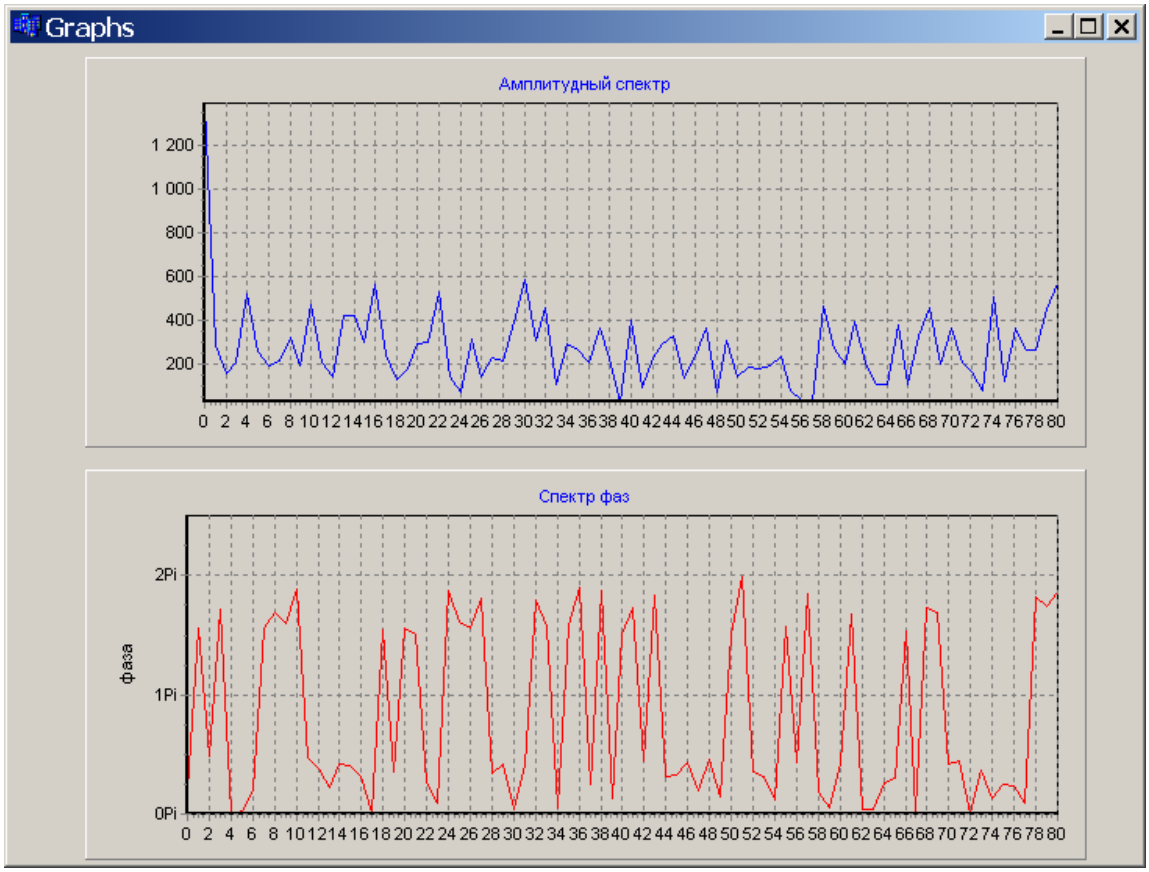


Рис. 3. Спектр в базисе ВКФ

**Выводы.** Данная программа может быть использована для изучения свойств спектров различных функций в базисах ВКФ.

При работе с данной программой была подтверждена эмпирическая формула для количества симметричных матриц ВКФ из [3] для трёх пар чисел $m$ и $n$. Формула имеет вид

$$L_{m,n} = L_{m,1}\prod_{i=2}^{n}(m^i - \mathrm{mod}(i,2))$$

где $m$, $n$ – параметры системы ВКФ; $L_{m,1}$ – количество симметричных матриц ДЭФ, размерностью $m$, равное количеству чисел от 1 до $m$ – 1 взаимно простых с $m$.

Индикаторные матрицы были найдены для следующих пар $m$ и $n$:

$m = 4$, $n = 5$ (455 081 984 матрицы);

$m = 7$, $n = 4$ (241 415 748 матрицы);

$m = 7$, $n = 5$ (469 762 048 матрицы).

Эти значения совпали с расчётными.

Кроме того, данная программа демонстрирует возможность использования систем ВКФ в криптографических целях. Файл, в который занесены спектры, полученные при ВКФ, представляет собой криптограмму, правильная расшифровка которой возможна лишь при наличии правильного файла-ключа.

## Список литературы

1. *Трахтман А. М.* Основы теории дискретных сигналов на конечных інтервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
2. *Бабак В. П.* Сигналы и спектры: учеб. пособие / В. П. Бабак, А. Я. Белецкий, А. Н. Гуржий – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 520 с.
3. *Белецкий А. Я.* Преобразования Грея: моногр.: в 2 т. / А. Я. Белецкий, А. А. Белецкий, Е. А. Белецкий – К.: Книжкове вид-во НАУ – 2007. – Т.2. Прикладные аспекты. – 644 с.

Д. С. Дем’яник

**Програмна реалізація швидких перетворень Фур’є у базисі Віленкина–Крестенсона функцій**

Описано програму, що реалізує швидкі перетворення Фур’є у базисі функцій Віленкина–Крестенсона, а також результати програмного синтезу симетричних систем Віленкина–Крестенсона функцій.

D. S. Demyanik

**Program realization of fast Fourier transforms in basis of Vilenkin–Krestenson functions**

Program that realizes fast Fourier transform is described in this article. Also results of program synthesis symmetrical systems of Vilenkin–Krestenson functions are described.