МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

УДК 621. 372. 061.9:517.9.001.57(045)

В. В. Васильев, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины,
Л. А. Симак, д-р техн. наук

РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ НА ОСНОВЕ НЕОДНОРОДНЫХ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: vsvv06@gmail.com

Исследованы частотно-пространственные характеристики входных импедансов отрезков неоднородных длинных линий RC-типа с экспоненциальными законами изменения распределенных параметров от пространственной координаты. Показано, что в ограниченном диапазоне частот характеристики входных импедансов (адмиттансов) длинных линий указанного типа аппроксимируют дифференциальные (интегральные) операторы нецелых порядков ($|\beta| < 1$). *Вычислительные эксперименты выполнены в программной среде системы Mathematica®.*

Ключевые слова: *интегродифференциальный оператор нецелых порядков, синтез электронных структур, неоднородная длинная линия.*

Введение. Синтез электронных цепей и структур, характеристики которых воспроизводят интегродифференциальные операторы нецелых (дробных) порядков, представляет большой интерес для создания электронных моделей дифференциальных уравнений нецелых порядков и использования в контроллерах систем управления. Известно [3; 4], что интегродифференциальный оператор порядка 1/2 воспроизводится электрохимическим двухполюсником в виде пористых электродов, помещенных в раствор электролита. Входной импеданс однородной длинной линии (кабеля) бесконечной длины также моделируют интегродифференциальный оператор порядка 1/2. Вопросам аппроксимации дробных интегродифференциальных операторов с помощью цепных схем *RC*-типа посвящена работа [2]. В статье [1] исследованы частотно-пространственные характеристики конечных отрезков однородных длинных линий RC-типа на основе решений дифференциального уравнения Риккати и показано, что входной импеданс (адмиттанс) отрезка длинной линии апроксимирует интегральный (дифференциальный) оператор порядка 1/2 в достаточно широком частотном диапазоне. В данной работе исследуются частотно-пространственные характеристики импедансов неоднородных длинных линий *RC*-типа с экспоненциальными законами изменения распределенных параметров. Показано, что при различных показателях экспонент для законов изменения распределенных емкостей и резисторов в определенном диапазоне частот аппроксимируются интегродифференциальные операторы порядков, отличающиеся от 1/2 и лежащие в диапазоне $|\beta| < 1$. Работа построена следующим образом. Сначала рассмотрены частотные свойства идеализированного гипотетического элемента электрической цепи, воспроизводящего свойства интегродифференциального оператора нецелых порядков (своеобразного «дробного» конденсатора (индуктивности)). Затем на основе аналитического решения дифференциального уравнения Риккати для входного импеданса неоднородной длинной линии *RC*-типа с переменными коэффициентами экспоненциального вида построены пространственно-частотные характеристики входных импедансов, а также диаграммы Бодэ для двух иллюстративных примеров аппроксимации интегродифференциальных операторов порядков 1/3 и 2/3. Рассмотрены семейства характеристик при различных длинах отрезков линий и различных диапазонов частот.

Частотные свойства элементов электронных цепей, реализующих интегро-дифференциальные операторы. Рассмотрим свойства гипотетического «дробного» конденсатора в частотной области. Предполагая, что конденсатор находится в установившемся режиме под воздействием источника напряжения синусоидальной формы с частотой ω, запишем выражение для комплексной проводимости такого конденсатора:

$$\dot{Y} = G(j\omega)^{\beta} = G\omega^{\beta} e^{j\pi\beta/2}. \qquad (1)$$

Амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики комплексной проводимости дробного конденсатора в соответствии с уравнением (1) имеют вид:

$$|Y(\omega)| = G\omega^{\beta};$$
$$\varphi(\omega) = \pi\beta/2.$$

В логарифмическом масштабе они имеют вид прямых:

$$\ln\left(\frac{|Y(\omega)|}{G}\right) = \beta\ln(\omega);$$
$$\phi(\omega) = \pi\beta/2. \qquad (2)$$

Семейство частотных характеристик, соответствующих различным значениям β, ограничивается прямыми:

$$\ln|Y| = \ln(G) \quad \text{для } \beta = 0;$$
$$\ln|Y| = \ln(G) + \ln(\omega) \quad \text{для } \beta = 1.$$

Семейство фазовых характеристик составляют прямые, параллельные оси частот в полосе от 0 до $\pi/2$. Переходные и частотные характеристики для комплексной проводимости индуктивностей нецелых порядков могут быть получены аналогично. Их внешний вид совпадает с рассмотренными характеристиками дробных конденсаторов при замене проводимостей на сопротивления, токов на напряжения и наоборот. Амплитудно-частотные характеристики комплексной проводимости индуктивностей нецелых порядков в логарифмическом масштабе имеют отрицательный угловой коэффициент, а фазовые характеристики параллельны оси частот и расположены в области отрицательных углов ($-\pi/2 < \varphi < 0$). Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики гипотетических реактивных элементов нецелых порядков (2) для порядков β, изменяющихся в диапазоне $-1 \le \beta \le 1$, можно визуализировать следующим образом (рис. 1 и 2):

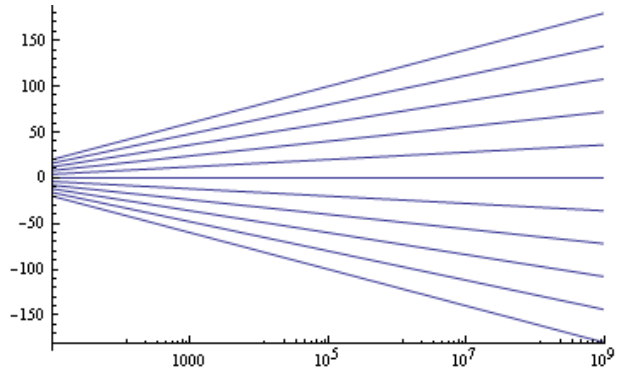

Рис. 1. Семейство амплитудно-частотных характеристик реактивных элементов дробного порядка в диапазоне $-1 \le \beta \le 1$ (шаг по порядку 0,2)

```
f[ω_, β_] := -20 β Log[10, ω];
φ[ω_, β_] := -β π/2;
LogLinearPlot[Table[f[ω, β], {β, -1, 1, 0.2}],
 {ω, 10, 10^9}]
```

```
LogLinearPlot[Table[φ[ω, β], {β, -1, 1, 0.2}],
 {ω, 10, 10^9}]
```

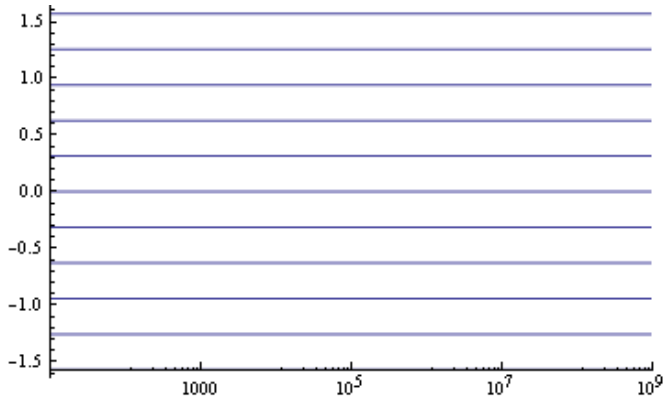

Рис. 2. Семейство фазочастотных характеристик реактивных элементов дробного порядка в диапазоне $-1 \le \beta \le 1$ (шаг по порядку 0,2)

Математические модели импедансов неоднородных длинных линий *RC*-типа. Входной импеданс неоднородной длинной линии, как известно с работы [5], определяется нелинейным дифференциальным уравнением Риккати:

$$\frac{dZ(x)}{dx} + Y\ell(x)Z(x)^2 - Z\ell(x) = 0, \tag{3}$$

где $Z(x)$ – входной импеданс линии в сечении с координатой x; $Z\ell(x)$ – продольный импеданс линии на единицу длины линии; $Y\ell(x)$ – поперечный адмиттанс линии на единицу длины линии.

Уравнение (3) записано для случая начала координат в конце линии и предполагает задание комплексного сопротивления нагрузки $Z(0) = z_0$ в качестве начального условия. Реализация интегральных операторов дробных порядков, отличных от 1/2, возможна на основе неоднородных длинных линий *RC*-типа. Рассмотрим несколько примеров реализации интегральных операторов порядков 1/3 и 2/3. Прежде всего, необходимо отметить, что неоднородные длинные линии с одинаковыми законами изменения распределенных по длине линии параметров ($r(x) = r_0 f(x)$; $c(x) = c_0 f(x)$) проявляют свойства интегрального оператора порядка 1/2 независимо от вида функциональной зависимости $f(x)$. Для нашего рассмотрения используем случай неоднородной длинной линии с экспоненциальными зависимостями от пространственной координаты распределенных сопротивления и емкости вида:

$$r(x) = r_0 e^{-\alpha x};$$
$$c(x) = c_0 e^{-\gamma x},$$

где $\alpha \ne \gamma$. Позднее можно будет убедиться, что порядок интегрального оператора определяется следующей простой формулой, зависящей от показателей экспонент:

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}.$$

Выбор именно экспоненциальных длинных линий объясняется возможностью получения в системе Mathematica аналитического решения уравнения Риккати. Поиск других типов неоднородных длинных линий, реализующих интегральные операторы нецелых порядков, является одним из возможных направлений дальнейших исследований.

Вычислительные эксперименты с решениями уравнения Риккати для случая длинных линий с различными законами изменения распределенных параметров.

Пример 1. Линия с параметрами:

$r(x) = \mathrm{r} \cdot e^{-x}$; $c(x) = \mathrm{Ca} \cdot e^{-2x}$.

Фрагменты программы с комментариями приведены ниже.

Нахождение аналитического решения уравнения Риккати:

```
In[1]:= DSolve[{z'[x] - r * e^-x + i * 2 * π * f * Ca * e^-2x * z[x]^2 == 0, z[0] == w}, z[x], x]
```

Аналитическое решение уравнения, полученное системой Mathematica, здесь не приводится в связи с его громоздкостью. Далее, как и в случае однородных длинных линий, решение этого уравнения определяется как функция, определяемая пользователем (user defined function): **zo[r_, Ca_, f_, x_, w_].**

Задание числовых параметров и упрощение выражения:

```
In[3]:= z0 = zo[1000, 10^-8, f, x, 0];
In[4]:= z1 = FullSimplify[z0]
```

$$\text{Out[4]=}\ \left(2000\left(\left((1+i)\sqrt{f}\right)^{2/3}\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{2}{3},\frac{i e^{-3x} f\pi}{450000}\right]\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{4}{3},\frac{i f\pi}{450000}\right]-\left((1+i)\sqrt{e^{-3x}}\sqrt{f}\right)^{2/3}\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{2}{3},\frac{i f\pi}{450000}\right]\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{4}{3},\frac{i e^{-3x} f\pi}{450000}\right]\right)\right)\Big/\left(2e^{x}\left((1+i)\sqrt{e^{-3x}}\sqrt{f}\right)^{2/3}\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{1}{3},\frac{i e^{-3x} f\pi}{450000}\right]\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{2}{3},\frac{i f\pi}{450000}\right]-\frac{i e^{-2x}\left((1+i)\sqrt{f}\right)^{2/3} f\pi\,\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{4}{3},\frac{i f\pi}{450000}\right]\text{HypergeometricOFl}\left[\frac{5}{3},\frac{i e^{-3x} f\pi}{450000}\right]}{50000}\right)$$

Из последнего выражения (Out [4]) видно, что были заданы числовые значения **r, Ca, w**, в то же время частота и пространственная координата **f, x** выбраны в качестве аргументов. При этом входной импеданс описывается достаточно сложным выражением, в состав которого входит гипергеометрическая функция класса 0F1 [6].

Определение амплитудной и фазовой пространственно-частотных характеристик входного импеданса линии:

```
In[5]:= zm = Abs[z1];
In[6]:= az = Arg[z1];
```

Визуализация амплитудной пространственно-частотной характеристики входного импеданса линии (рис. 3):

```
In[7]:= p1 = Plot3D[zm, {f, 10^2, 10^6}, {x, 1, 15}, PlotPoints → 100,
  PlotLabel -> "Space-frequency plot of magnitude of nonuniform long line impedance"]
```

Out[7]=

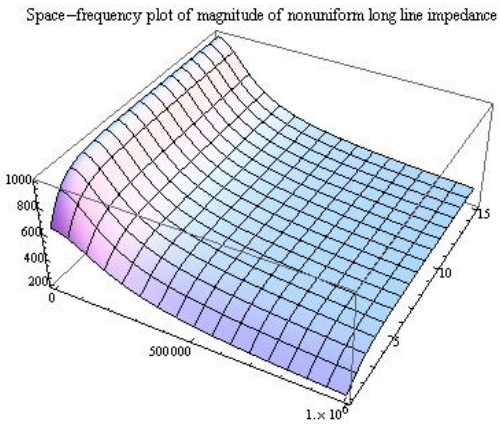

Рис. 3. Амплитудная пространственно-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии: диапазоны частот 100 Гц – 1МГц, длин – 1 – 15 м.

Визуализация фазовой пространственно-частотной характеристики входного импеданса линии (рис. 4):

```
In[8]:= p2 = Plot3D[az, {f, 10^2, 10^6}, {x, 1, 15}, PlotPoints → 100,
        PlotLabel -> "Space-frequency plot of angle of nonuniform long line impedance"]
```

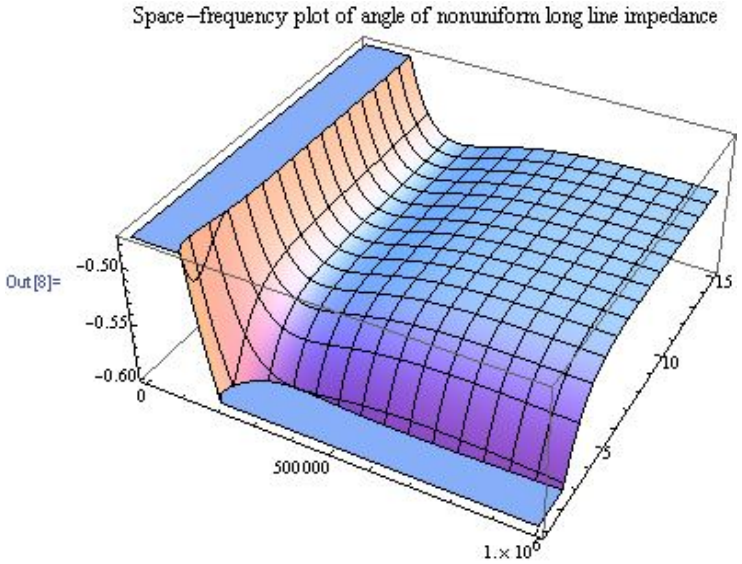

Рис. 4. Фазовая пространственно-частотная характеристика входного импеданса линии

Определение и визуализация семейства фазочастотных характеристик линии при фиксированных длинах отрезков линии от 1 до 13 с шагом 2 (показаны также линии фазовых углов $-\pi/4$ *и* $-\pi/6$ *радиан) (рис. 5):*

```
In[13]:= p61 = Plot[{-π/4, -π/6, Table[az, {x, 1, 13, 2}]}, {f, 10^2, 10^6},
 PlotLabel -> "az(f),x=const", AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

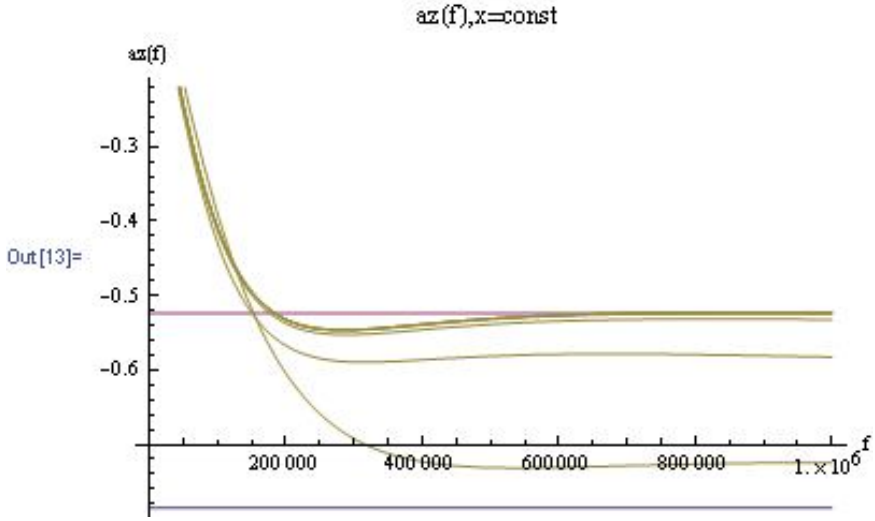

Рис. 5. Семейство фазочастотных характеристик входного импеданса линии
(длины отрезков линии от 1 до 13 с шагом 2)

На рис. 5 отчетливо видно, что при длинах отрезков линии, близких к 13м, фазовые характеристики асимптотически приближаются к $\pi/6$.

Определение и визуализация семейства фазочастотных характеристик линии при фиксированных длинах отрезков линии от 1 до 5 с шагом 1 (рис. 6):

```
In[15]:= p63 = Plot[{-π/4, -π/6, Table[az, {x, 1, 5, 1}]}, {f, 10^2, 10^6},
 PlotLabel -> "az(f),x=const", AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

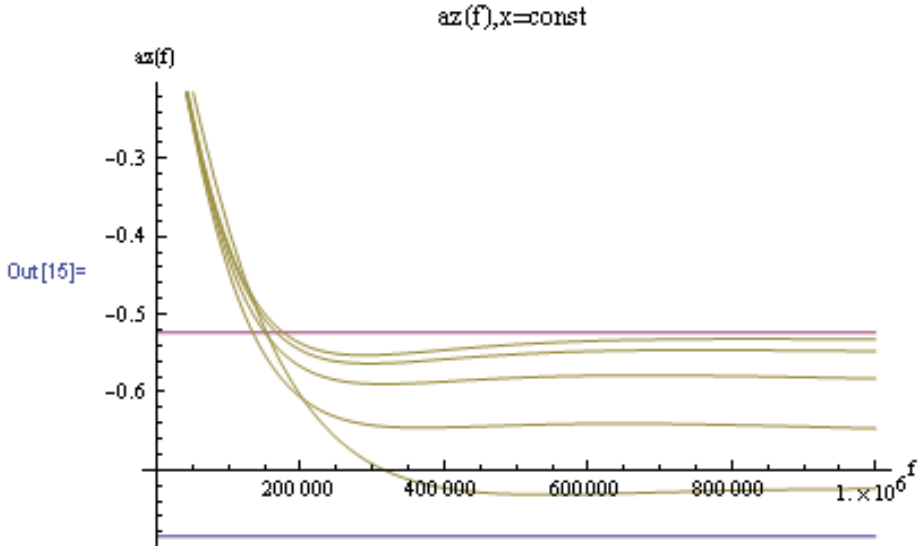

Рис. 6. Семейство фазочастотных характеристик входного импеданса неоднородной линии (длины отрезков линии от 1 до 5 с шагом 1)

Важной особенностью фазочастотных характеристик (рис. 5 и 6) является наличие горизонтальных участков, свидетельствующих о наличии свойств интегральных операторов дробных порядков в диапазоне 30 – 45 угловых градусов для линий с относительно малой длиной.

Определение и визуализация фазочастотной характеристики линии при x = 14 с указанием зоны допуска $30° \pm 2°$ (рис. 7):

```
In[21]:= p69 = Plot[{-29 π / 180, -31 π / 180, -π / 6, az /. x → 14}, {f, 10^4, 10^7}, PlotLabel -> "az(f),x=14", AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

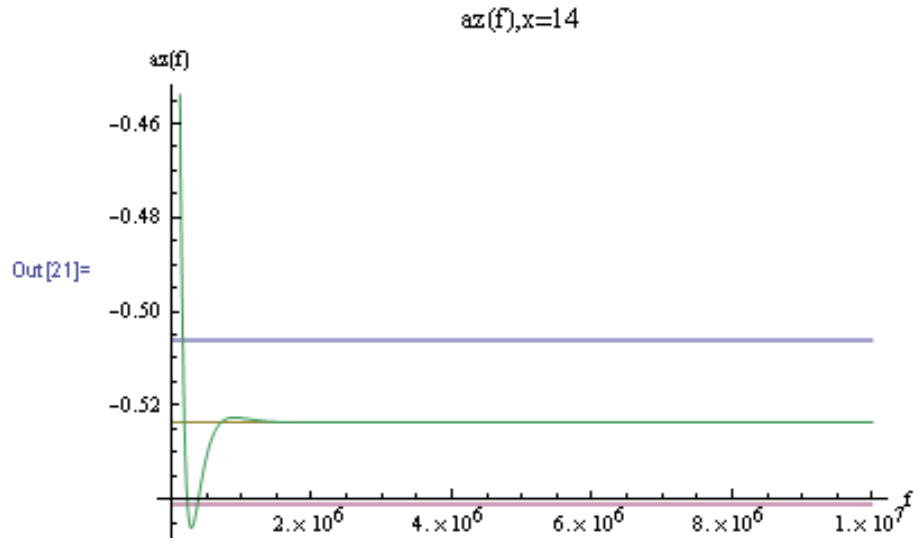

Рис. 7. Фазочастотная характеристика входного импеданса неоднородной линии (длина отрезка линии 14 ед. и зона допуска $\pm$ 2°)

Определение и визуализация семейства частотных характеристик линии в логарифмическом масштабе (рис. 8):

```
In[22]:= poo = LogLogPlot[{Table[zm, {x, 1, 11, 2}], 10^6/f}, {f, 10^3, 10^8}, GridLines → Automatic, PlotLabel -> "zm(f),x=1,3,...,11",
         AxesLabel → {"f", "zm(f)"}]
In[23]:= paa = LogLinearPlot[{-π/6, Table[az, {x, 1, 11, 2}]}, {f, 10^3, 10^8}, GridLines → Automatic, PlotLabel -> "az(f),x=1,3,...,11",
         AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

Наряду с семейством амплитудно-частотных характеристик линий, входной импеданс которых аппроксимирует интегральный оператор порядка 1/3 на рис. 8, для сравнения показана амплитудно-частотная характеристика обычного интегратора порядка 1.

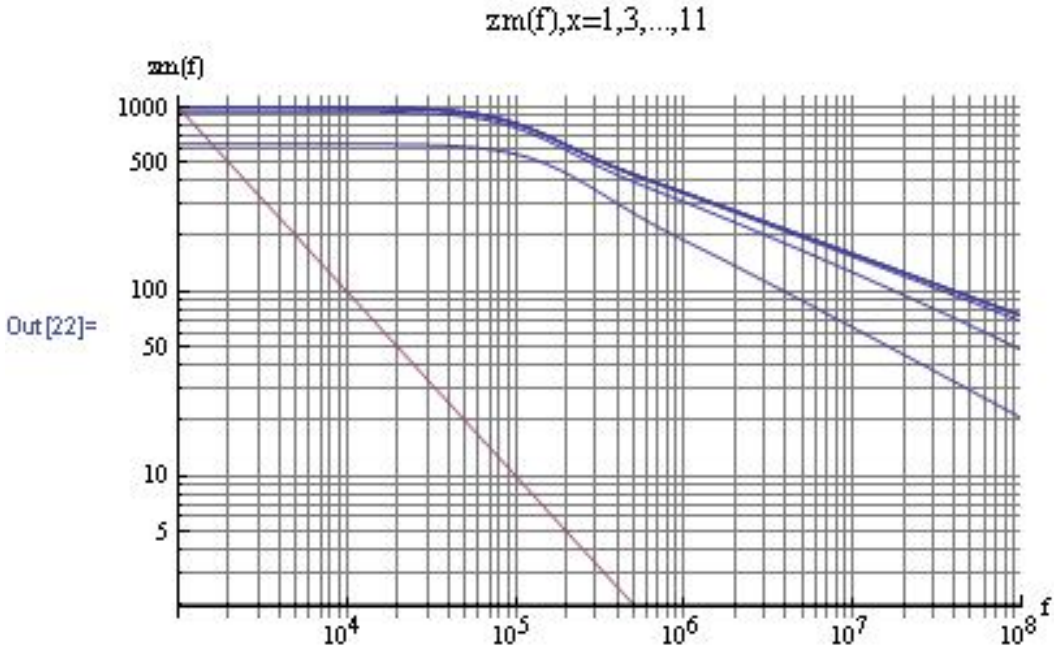

Рис. 8. Семейство амплитудно-частотных характеристик входного импеданса неоднородной линии в логарифмическом масштабе

Определение и визуализация фазочастотной характеристики импеданса отрезка длинной линии в полулогарифмическом масштабе (рис. 9).

```
In[24]:= paz = LogLinearPlot[{-π / 4, -π / 6, az /. x → 15}, {f, 10^2, 10^8}, PlotLabel -> "az(f),x=15", AxesLabel → {"f", "az(f)"},
  GridLines → Automatic, PlotLabel -> "az(f),x=15", AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

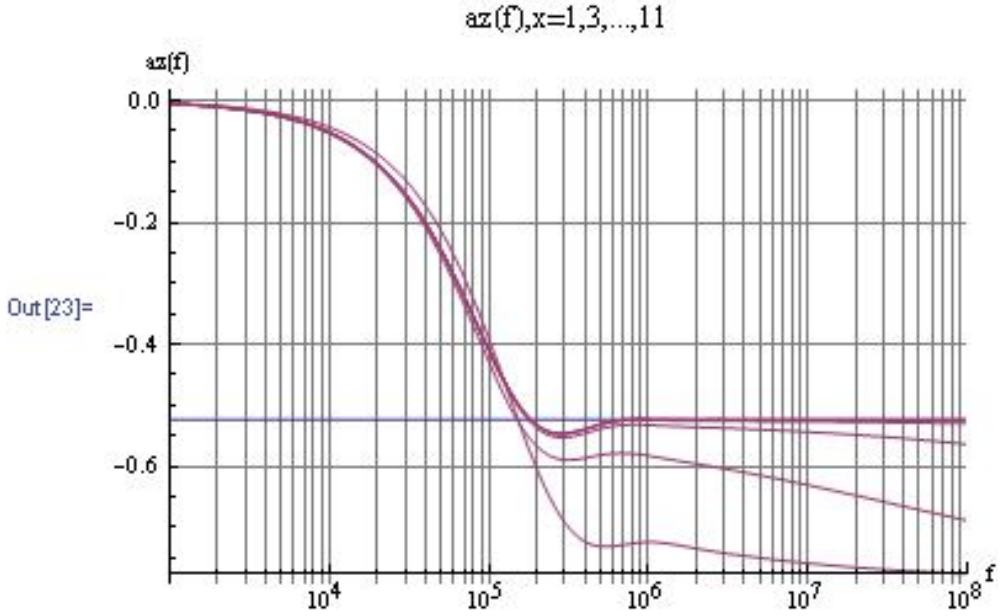

Рис. 9. Семейство фазочастотных характеристик входного импеданса неоднородной линии в полулогарифмическом масштабе

Анализ частотных характеристик линий рис. 5 – 10 показывает, что они в достаточно широком диапазоне частот воспроизводят свойства интегрального оператора порядка 1/3.

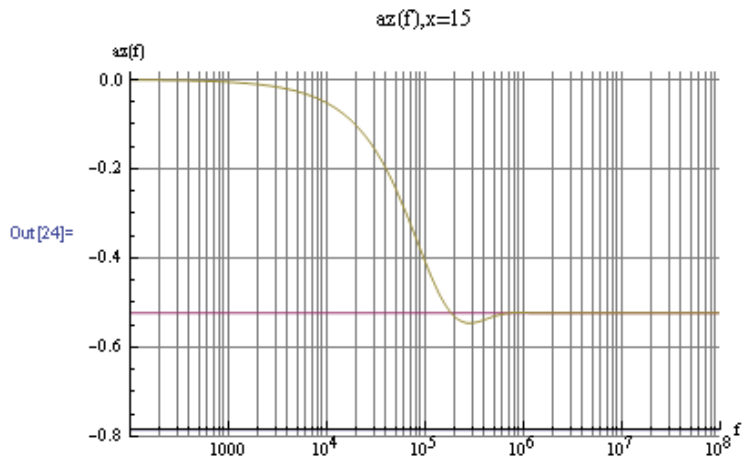

Рис. 10. Фазо-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии в полулогарифмическом масштабе

Пример 2. Линия с параметрами:

$$r(x) = \mathrm{r} \cdot \mathrm{e}^{-2x};\ c(x) = \mathrm{Ca} \cdot e^{-x}.$$

Так как для исследования данного варианта линии использовалась программа примера 1, фрагменты и результаты ее работы приводятся без особых пояснений (рис. 11 – 15).

```
In[1]:= DSolve[{z'[x] - r * e^(-2 x) + i * 2 * π * f * Ca * e^(-x) * z[x]^2 == 0, z[0] == w}, z[x], x]
In[3]:= z0 = zo[1000, 10^-8, f, x, 0];
In[4]:= zo = FullSimplify[z0]
```

$$\text{Out[4]=}\ \Big(150\,000\,000\, e^{-2x}\Big(e^{2x}\sqrt{e^{-3x}}\,\big((1+i)\sqrt{f}\big)^{1/3}\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{1}{3},\tfrac{i e^{-3x} f\pi}{450\,000}\Big]\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{5}{3},\tfrac{i f\pi}{450\,000}\Big] - \big((1+i)\sqrt{e^{-3x}}\sqrt{f}\big)^{1/3}\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{1}{3},\tfrac{i f\pi}{450\,000}\Big]\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{5}{3},\tfrac{i e^{-3x} f\pi}{450\,000}\Big]\Big)\Big) \Big/ \Big(450\,000\big((1+i)\sqrt{e^{-3x}}\sqrt{f}\big)^{1/3}\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{1}{3},\tfrac{i f\pi}{450\,000}\Big]\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{2}{3},\tfrac{i e^{-3x} f\pi}{450\,000}\Big] - i\sqrt{e^{-3x}}\,\big((1+i)\sqrt{f}\big)^{1/3} f\pi\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{4}{3},\tfrac{i e^{-3x} f\pi}{450\,000}\Big]\,\text{HypergeometricOFlRegularized}\Big[\tfrac{5}{3},\tfrac{i f\pi}{450\,000}\Big]\Big)$$

```
In[5]:= zm = Abs[zo];
In[6]:= az = Arg[zo];
In[7]:= p1 = Plot3D[zm, {f, 10^2, 10^6}, {x, 1, 15}, PlotPoints → 100,
          PlotLabel → "Space-frequency plot of magnitude of nonuniform long line impedance"]
```

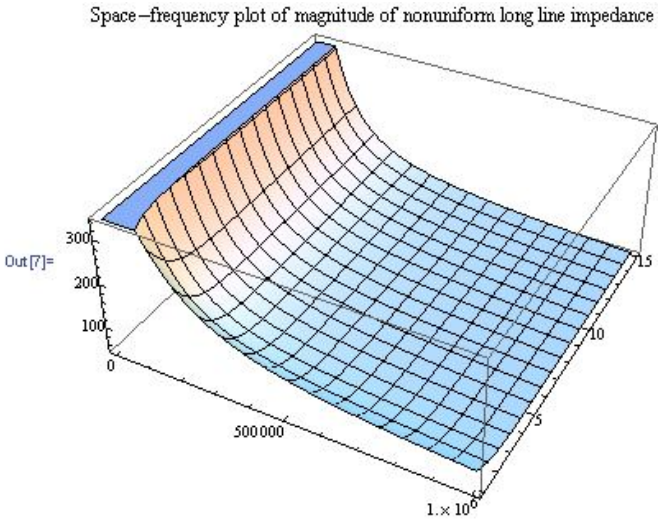

Рис. 11. Амплитудная пространственно-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии

```
In[8]:= p2 = Plot3D[az, {f, 10^2, 10^6}, {x, 1, 15}, PlotPoints → 100,
    PlotLabel → "Space-frequency plot of angle of nonuniform long line impedance"]
```

Out[8]=

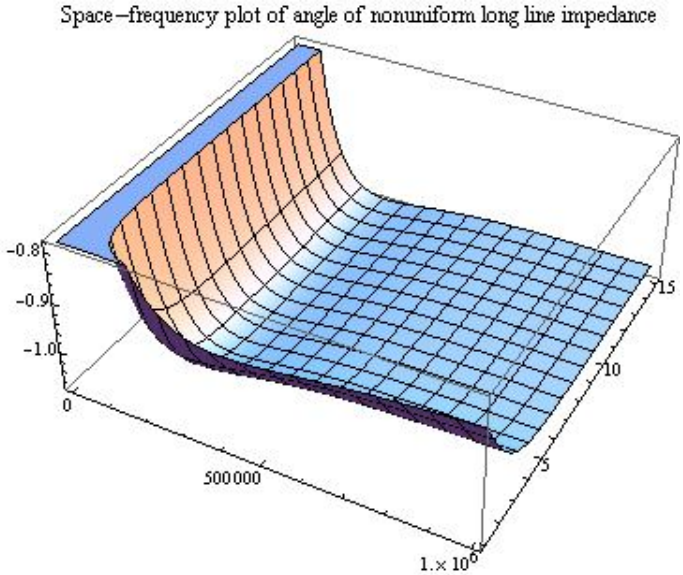

Рис. 12. Фазовая пространственно-частотная характеристика входного импеданса линии

```
In[33]:= poo = LogLogPlot[{Table[zm, {x, 2, 10, 2}], 10^6/f^(2/3)}, {f, 10^3, 10^8}, GridLines → Automatic, AxesLabel → {"f", "zm(f)"}]
```

Out[33]=

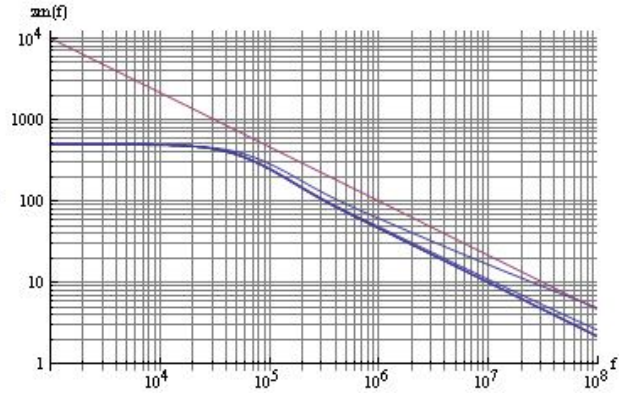

Рис. 13. Семейство амплитудно-частотных характеристик входного импеданса линии в логарифмическом масштабе

```
In[34]:= paa = LogLinearPlot[{-π/3, Table[az, {x, 2, 10, 2}]}, {f, 10^3, 10^8}, GridLines → Automatic, AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

Out[34]=

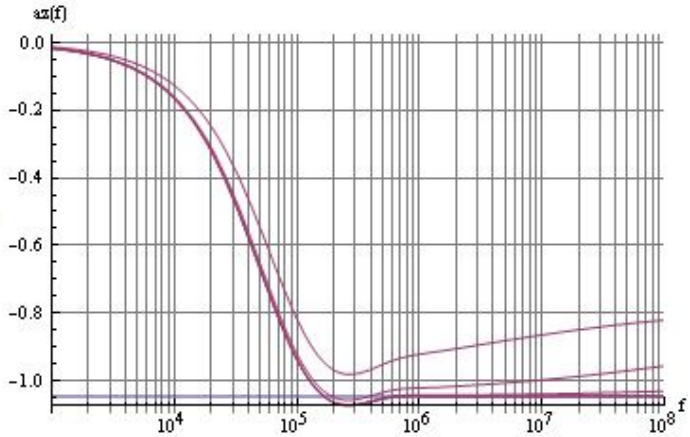

Рис. 14. Семейство фазочастотных характеристик входного импеданса линии в полулогарифмическом масштабе

```
In[35]:= p10 = LogLinearPlot[{-π/2, -π/3, az /. x → 12}, {f, 10^3, 10^8}, GridLines → Automatic, AxesLabel → {"f", "az(f)"}]
```

Out[35]=

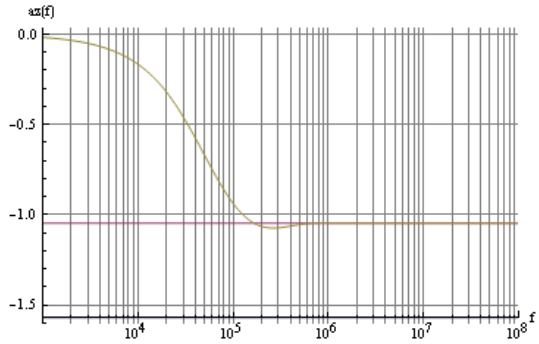

Рис. 15. Фазочастотная характеристика входного импеданса линии в полулогарифмическом масштабе

Заключение. Анализ частотных характеристик линий на рис. 3 – 15 показывает, что они в достаточно широком диапазоне частот воспроизводят свойства интегральных операторов 1/3 и 2/3. Аппаратная реализация элементов электронных цепей, аппроксимирующих интегральные операторы нецелых порядков, по-видимому, потребует использования техники нанотехнологий.

Список литературы

1. *Васильев В. В.* Исследование частотно-пространственных характеристик импедансов длинных линий на основе решений уравнения Риккати / В. В. Васильев, Л. А. Симак // Електроніка та системи управління. – 2008, № 2(16). – С. 125 – 132.
2. *Симак Л. А.* Аппроксимационный синтез электронных цепей, моделирующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков // Електроніка та системи управління. – 2005. – № 1. – С. 140 – 151.
3. *Dutta Roy S. C.* On the Realization of a Constant – Argument Immitance or Fractional Operator // IEEE Transactions on Circuit Theory. – 1967. – Vol.CT-14, No. 3. – P. 264 – 274.
4. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. –New-York & London: Academic Press, 1974. – 234 p.
5. *Pipes Louis A.* Computation of the Impedances of Nonuniform Lines by a Direct Method // A.J.E.E. Transactions of the Amer. Inst. Electr.Eng.. – 1956. – Vol. 75. – Pt.1. – P. 551 – 554.
6. *Wolfram S.* The Mathematica Book. – Wolfram Media & Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.

В. В. Васильєв, Л. О. Сімак

Реалізація інтегродиференціальних операторів нецілих порядків на основі неоднорідних довгих ліній експоненційного типу

Досліджувано частотно-просторові характеристики вхідних імпедансів неоднорідних довгих ліній *RC*-типу скінченної довжини з експоненційним законом змінювання розподілених параметрів від просторової координати. Показано, що в обмеженому діапазоні частот характеристики вхідних імпедансів (адмітансів) довгих ліній вказаного типу аппроксимують диференціальні (інтегральні) оператори нецілих порядків ($|\beta|<1$). Обчислювальні експерименти виконували в програмному середовищі системи Mathematica®.

V. V. Vasylyev, L. A. Simak

Implementation of non-integer order integro-differential operators based on exponential type nonuniform long transmission lines

The space and frequency characteristics of input impedances for exponential nonuniform long transmission lines of RC-type have been investigated. It has been shown, that for given type of long lines input impedances (admittances) display properties, that approximate non-integer order integro-differential operators for limited range of frequency ($|\beta|<1$).The computer experiments were completed via Mathematica® program area.