УДК 621.372 (045)

[1]**М. О. Шутко,** д-р техн. наук, проф.,
[2]**В. М. Шутко,** д-р техн. наук, проф.,
[3]**О. Ф. Москалець**, асп., асис.

ПОБУДОВА СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ

[1,2]Інститут електроніки і систем управління, e-mail: shutko@nau.edu.ua
[3]Інститут електроніки і систем управління, e-mail: moskalec_o_f@ukr.net

Розглянуто загальний метод побудови сплайнів п'ятого та третього порядків методом найменших квадратів. Виконано програму мовою відомого математичного пакета MatLab.

Ключові слова. Метод найменших квадратів, сплайн п'ятого степеня, кубічний сплайн.

Постановка проблеми. Переважна більшість емпіричних даних містить як детерміновану складову, так і деякий випадковий шум, котрим не можна знехтувати. Найбільш прийнятним для технології цифрової обробки емпіричних сигналів є згладжування за методом найменших квадратів, що є найкращою за нормою апроксимацією, отриманою на базі скалярного добутку [1]. Сплайн п'ятого степеня дає більшу якість наближення, ніж кубічний сплайн.

Аналіз досліджень і публікацій. Теорія наближення сплайнами інтенсивно розвивається завдяки зручному апарату обчислень і добрим наближуваним властивостям. Популярні викладення сплайнів здебільшого обмежуються кубічними сплайнами, оскільки вони мають неперервну першу похідну і ефективні у розрахунках. Сплайни вищих степенів не використовували у зв'язку зі зростанням обсягів розрахунків.

Мета. Використання сплайнів п'ятого степеня, що є доцільним, якщо цього безпосередньо потребують умови конкретної задачі, або необхідних властивостей не вдається досягнути більш простими методами. Застосування цих сплайнів дає змогу отримати максимальне наближення до деякої шуканої функції.

Побудова сплайн-функцій. Дотепер не існує розробок чи пакетів функцій та програм, у яких сплайни були б повно і цілісно подані у вигляді певної технології обробки цифрових сигналів із врахуванням їх специфічних особливостей. Таким чином, відомі переваги сплайнів, детально досліджені в роботах математиків, не знайшли достатнього впровадження в сучасних інформаційних технологіях обробки цифрових сигналів [2].

Для згладжування сигналів, або для статистичного оцінювання параметрів сигналів найбільш широко користуються методом середньоквадратичного наближення. В загальному випадку задачу середньоквадратичного наближення сигналів подають так: $S(x) = f(x) + g$, де $f(x)$ – корисна, g – випадкова шумова складові. Перевагою методу найменших квадратів є поєднання розв'язання задачі оптимального наближення детермінованих залежностей з оптимальними властивостями статистичного оцінювання майже без зміни алгоритмів розрахунку. Теорія та практика методу найменших квадратів добре розроблені; існує велика кількість варіантів алгоритмів відповідних розрахунків, включаючи рекурентні, та реального часу [3].

Нехай на відрізку $[a,b]$ у точках $x = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ маємо значення з адитивною похибкою деякої гладкої функції $Y(x)$: $Y_i = f(x_i) + G_i$, де $f(x_i)$ – значення функції; G_i – шум. Для розв'язання поставленої задачі розіб'ємо весь інтервал спостережень на дві ділянки. Потрібно знайти поліноми $S_1(x)$ та $S_2(x)$, що забезпечують найкраще щодо мінімуму середньоквадратичного відхилення наближення на всьому розглянутому інтервалі спостережень:

$$S_1(x) = A_1x^5 + B_1x^4 + C_1x^3 + D_1x^2 + E_1x + F_1;$$
$$S_2(x) = A_2x^5 + B_2x^4 + C_2x^3 + D_2x^2 + E_2x + F_2.$$

За оптимальності середньоквадратичного наближення виконується умова

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N_1}(S_1(x_i) - Y(x_i))^2 + \sum_{i=N_1}^{N_2}(S_2(x_i) - Y(x_i))^2 + \lambda_1 \times$$
$$\times (S_1(x_{N1}) - S_2(x_{N1})) + \lambda_2(S_1'(x_{N1}) - S_2'(x_{N1})) \to \min,$$

де $\lambda_1(S_1(x_{N1}) - S_2(x_{N1})) + \lambda_2(S_1'(x_{N1}) - S_2'(x_{N1}))$ – умова неперервності в точці розриву, $N_1 \cup N_2 = N$ і $N_1 = N_2$.

Для знаходження коефіцієнтів $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ поліномів $S_1(x)$ та $S_2(x)$ необхідно продиференціювати σ за $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, \lambda_1, \lambda_2$ та роз'язати отриману систему рівнянь.

Аналогічно розраховуємо і сплайн третього степеня для тих самих вхідних даних.

Програма 1

```
N=1;
I=0.01:0.01:N; % інтервал першої ділянки
x1=(9*pi/4)*I;
y1=sin(x1);
Y1=awgn(y1,N);
% x1, y1 значення функції корисного сигналу для  першої ділянки
% У1 значення функції корисного сигналу з шумом для першої ділянки
G=N:0.01:2*N-0.01; % інтервал другої ділянки
x2=(9*pi/4)*G;
y2=cos(x2);
Y2=awgn(y2,1.99);
% x1, y1 значення функції корисного сигналу для другої ділянки
% У1 значення функції корисного сигналу з шумом для другої ділянки
for m=1:6
   for n=1:6
      A(m,n)=sum(2*(x1.^(12-m-n)));
   end
end
for m=drange(7:12)
   for n=drange(7:12)
     A(m,n)=sum(2*(x2.^(24-m-n)));
   end
end
for m=drange(13)
   for n=drange(1:6)
      A(m,n)=x1(100)^(6-n);
   end
end
for m=drange(13)
   for n=drange(7:12)
      A(m,n)=-x2(1)^(12-n);
   end
end
```

```
for m=drange(1:6)
   for n=drange(13)
      A(m,n)=x1(100)^(6-m);
   end
end
for m=drange(7:12)
   for n=drange(13)
      A(m,n)=-x2(1)^(12-m);
   end
end
for m=drange(14)
   for n=drange(1:6)
      A(m,n)=(6-n)*x1(100)^(5-n);
   end
end
for m=drange(14)
   for n=drange(7:12)
      A(m,n)=(n-12)*x2(1)^(11-n);
   end
end
for m=drange(1:6)
   for n=drange(14)
      A(m,n)=(6-m)*x1(100)^(5-m);
   end
end
for m=drange(7:12)
   for n=drange(14)
      A(m,n)=(m-12)*x2(1)^(11-m);
   end
end
% матриця B для знаходження коефіцієнтів поліномів S1 та S2
for m=drange(1:6)
   for n=drange(1)
      B(m,n)=sum(2*(x1.^(6-m).*Y1));
   end
end
for m=drange(7:12)
   for n=drange(1)
      B(m,n)=sum(2*(x2.^(12-m).*Y2));
   end
end
 for m=drange(13:14)
   for n=drange(1)
      B(m,n)=0;
   end
 end
 % матриця значень B
C=A\B; % матриця значень сплайнів S1 та S2
S1=C(1)*x1.^5+C(2)*x1.^4+C(3)*x1.^3+C(4)*x1.^2+C(5)*x1+C(6); % поліном на першій
ділянці
```

S2=C(7)*x2.^5+C(8)*x2.^4+C(9)*x2.^3+C(10)*x2.^2+C(11)*x2+C(12); % сплайн на другій ділянці

plot(x1,S1,x2,S2,x2,y2,x1,y1,x1,Y1,x2,Y2); % графіки корисного сигналу, корисного сигналу з шумом, згладженого сигналу;

P=stg(y1-S1)+stg(y2-S2); % значення середньоквадратичного відхилення корисного сигналу і сплайну п'ятого степеня.

Програма за наведеним вище алгоритмом розраховує коефіцієнти поліномів $S_1(x)$ та $S_2(x)$ сплайна п'ятого степеня і виводить на графіку корисний сигнал, корисний сигнал з шумом та згладжений сигнал (рис. 1).

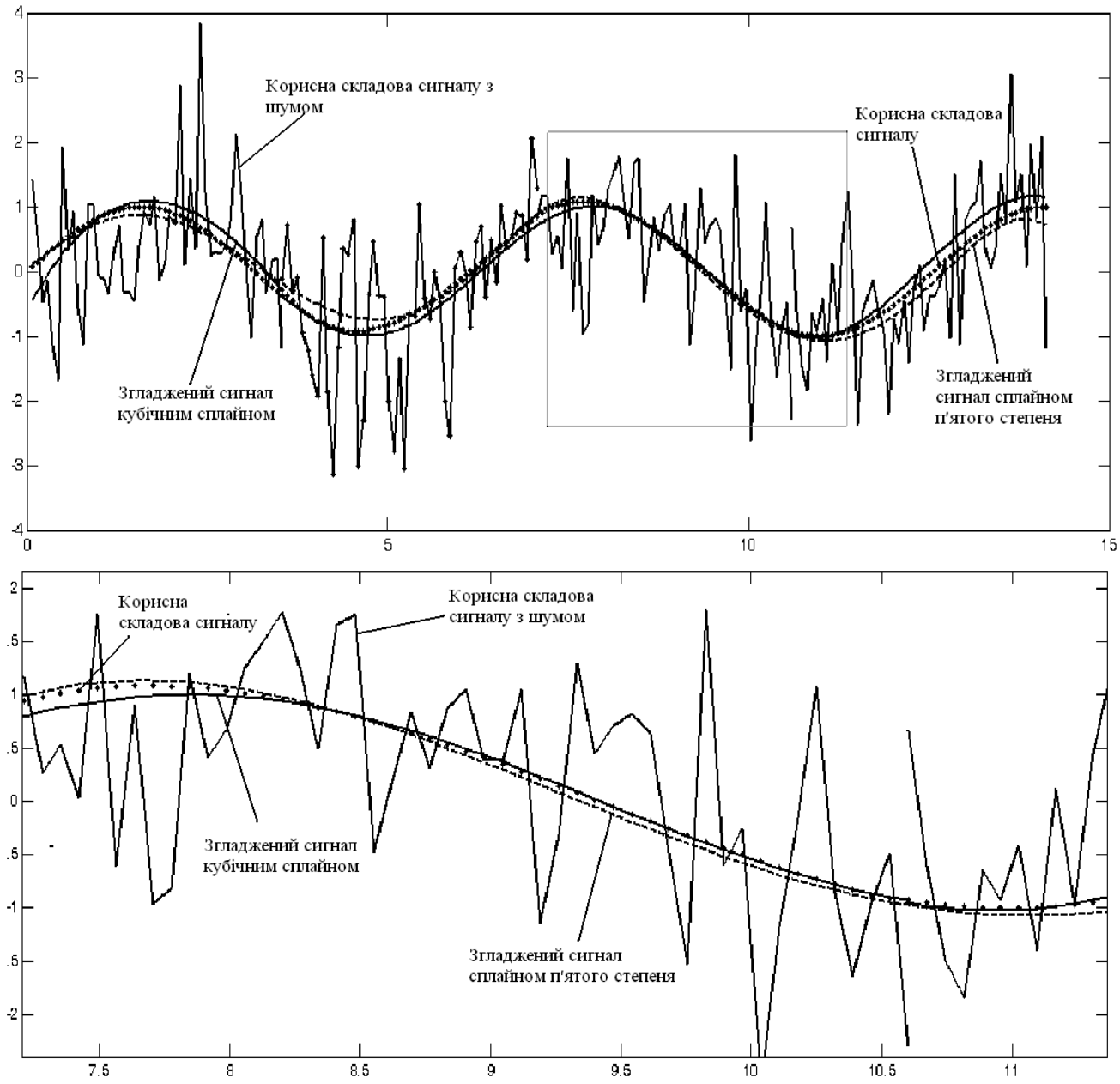


Рис. 1. Графіки корисної складової сигналу, корисної складової сигналу з шумом, згладжуваного сигналу сплайном п'ятого степеня та кубічним сплайном

Середньоквадратичне відхилення наближення корисного сигналу і сплайном п'ятого степеня цього сигналу становить 0,3389, кубічним сплайном – 0,6015.

Висновки. Отже, метод найменших квадратів із сплайновою моделлю має ряд особливостей, не характерних для класичних поліноміальних моделей. Ускладнення сплайнової моделі не пов'язано зі складністю базисних функцій, тому збільшення кількості оцінюваних параметрів не призводить до погіршення обумовленості нормальних рівнянь.

Сплайн п'ятого степеня має краще наближення, ніж кубічним сплайн, але більші обсяги розрахунку.

Список літератури

1. *Шелевицький І. В.* Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. – Кривий Ріг: Європ. ун-т, 2002. – 304 с.
2. *Шутко М. О.* Сплайни в цифровій обробці даних і сигналів / М. О. Шутко, І. В. Шелевицький, В. М. Шутко, – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 232 с.
3. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

Н. О. Шутко, В. Н. Шутко, Е. Ф. Москалец

Построение функций сплайна пятой степени

Рассмотрен общий метод построения сплайнов пятого и третьего порядков методом наименьших квадратов. Выполнена программа на языке известного математического пакета MatLab.

M. O. Shutko, V. M. Shutko, O. F. Moskalec

Construction functions of spline of fifth degree

The general method of construction of splines of fifth and third orders is considered by a least-squares method. The program is executed in language of the known mathematical package of MatLab.