

УДК 517.518.45(045)

В. Р. Берёзовый

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua

Рассмотрено применение модификации преобразования Фурье – преобразование Фурье на плоскости комплексной переменной, для которого обычное преобразование Фурье является естественным частным случаем для вычисления спектра абсолютно неинтегрируемых амплитудно манипулируемых сигналов.

Ключевые слова: спектр, абсолютно неинтегрируемые сигналы, преобразование Фурье, преобразование Лапласа.

Введение. В радиоэлектронике, акустотехнике, связи и смежных областях техники широкое применение находит преобразование Фурье как основа эффективных частотных методов анализа и синтеза сигналов. Однако при практических вычислениях преобразования Фурье

$$\mathfrak{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

возникают известные технические сложности, обусловленные требованием абсолютной интегрируемости процесса $x(t)$. Для их преодоления традиционно обращаются к одностороннему преобразованию Лапласа

$$L(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (2)$$

где

$$p = \alpha + j\omega.$$

К достоинствам преобразования Лапласа относят также наличие многочисленных таблиц таких преобразований. С учетом отмеченного, а также ввиду внешнего сходства формул (1) и (2) преобразование Лапласа является общим случаем преобразования Фурье (1), которое можно получить из (2) простой заменой p на $j\omega$, т. е. считается, что [2]:

$$\mathfrak{F}(\omega) = L(j\omega). \quad (3)$$

Однако для двухсторонних сигналов, задаваемых на интервале $-\infty < x < \infty$, данный метод не применим. Кроме того, в работе [1] показано, что при вычислении преобразования Фурье и односторонних (тождественно равных нулю при $t < 0$) сигналов использование преобразования Лапласа в ряде случаев приводит к появлению ошибок. Между тем двухсторонние сигналы, такие как, например, функция корреляции, имеют широкое практическое применение.

В работе [1] введено модифицированное преобразование Фурье $F(\omega, \alpha)$, которое является распространением преобразования Фурье на плоскость комплексной переменной, и позволяет вычислять преобразования Фурье двухсторонних абсолютно неинтегрируемых процессов:

$$F(\omega, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t} dt, \quad (4)$$

где $\alpha > 0$.

При переходе к новой комплексной переменной

$$\omega_k = \omega - j\alpha \quad (5)$$

уравнение (4) приводим к виду

$$\mathfrak{F}_k(\omega_k) = \int_0^{\infty} x(-t)e^{j\omega_k^* t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega_k t} dt. \quad (6)$$

Формула (6) является преобразованием Фурье на плоскости комплексной переменной. Преобразование Фурье (1) получаем из (6) по правилу:

$$\mathfrak{F}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{F}_k(\omega_k). \quad (7)$$

Цель работы. Целью работы является рассмотрение применения преобразования Фурье на плоскости комплексной переменной для вычисления спектра абсолютно неинтегрируемых амплитудно манипулируемых сигналов вида

$$x(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t, & t \geq 0; \\ B \cos \omega_0 t, & t < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для вычисления преобразования Фурье (6) сигнал $x(t)$ удобно раскладывать на четную $x_{\text{ч}}(t)$ и нечетную $x_{\text{н}}(t)$ составляющие:

$$x(t) = \frac{1}{2} [x_{\text{ч}}(t) + x_{\text{н}}(t)].$$

Тогда формула (6) приобретает вид [1]

$$\mathfrak{F}_k(\omega, \alpha) = \text{Re} \{ \mathfrak{F}_{\text{ч}0}(\omega_k) \} + j \text{Im} \{ \mathfrak{F}_{\text{н}0}(\omega_k) \}, \quad (9)$$

где

$$\mathfrak{F}_{\text{ч}0}(\omega_k) = \int_0^{\infty} x_{\text{ч}}(t)e^{-j\omega_k t} dt; \quad (10)$$

$$\mathfrak{F}_{\text{н}0}(\omega_k) = \int_0^{\infty} x_{\text{н}}(t)e^{-j\omega_k t} dt. \quad (11)$$

Применительно к сигналам (8) $\mathfrak{F}_{\text{ч}0}$ и $\mathfrak{F}_{\text{н}0}$ имеют вид:

$$x_{\text{ч}} = (A + B) \cos \omega_0 t; \quad (12)$$

$$x_{\text{н}} = (A - B) \cos \omega_0 t, \quad (13)$$

или после применения к (12) и (13) формул Эйлера получаем

$$x_{\text{ч}} = \frac{A+B}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t});$$

$$x_{\text{н}} = \frac{A-B}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}).$$

Преобразования Фурье на плоскости комплексной переменной для $\mathfrak{F}_{\text{ч}0}$ и $\mathfrak{F}_{\text{н}0}$ согласно выражениям (10) и (11) приобретают вид:

$$\mathfrak{F}_{\text{ч}0}(\omega_k) = \frac{A+B}{2} \int_0^{\infty} e^{-j(\omega_k - \omega_0)t} dt + \frac{A+B}{2} \int_0^{\infty} e^{-j(\omega_k + \omega_0)t} dt; \quad (14)$$

$$\mathfrak{F}_{\text{н}0}(\omega_k) = \frac{A-B}{2} \int_0^{\infty} e^{-j(\omega_k - \omega_0)t} dt + \frac{A-B}{2} \int_0^{\infty} e^{-j(\omega_k + \omega_0)t} dt. \quad (15)$$

После выделения в полученных выражениях (14) и (15) вещественных и мнимых составляющих и вычисления интегралов с учетом формулы (5) после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\omega_0}(\omega, \alpha) = & \frac{A+B}{2} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] - \\ & -j \frac{A+B}{2} \left[\frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\omega_0}(\omega, \alpha) = & \frac{A-B}{2} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] - \\ & -j \frac{A-B}{2} \left[\frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановки уравнений (16) и (17) в формулу (9) окончательно получаем выражение для преобразования Фурье на плоскости комплексной переменной для сигналов (8):

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_k(\omega, \alpha) = & \frac{A+B}{2} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] - \\ & -j \frac{A-B}{2} \left[\frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \end{aligned}$$

Для получения преобразования Фурье необходимо перейти к пределу (7). Поскольку

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{I}(\omega, \alpha) = & \frac{A+B}{2} [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] - \\ & -j \frac{A-B}{2} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

т. е. выражение (18) является преобразованием Фурье сигнала (8), вычисленным при помощи преобразования Фурье на плоскости комплексной переменной. Математический спектр амплитуд сигнала (8):

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}(\omega)| = & \frac{A+B}{2} [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] + \\ & + \left| \frac{A-B}{2} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)} \right] \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

Представляет интерес рассмотрение частных случаев сигналов (8):

1. $A \neq 0, B \neq 0, A > B$. График показан на рис. 1, а.
2. $A = 1, B = 0$. Сигнал сводится к полугармонике:

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (20)$$

График сигнала (20) показан на рис. 2, а.

3. $A = B = 1$. Сигнал сводится к гармонике:

$$x(t) = \cos \omega_0 t. \quad (21)$$

График сигнала (21) показан на рис. 3, а.

После применения уравнения (19) для приведенных сигналов получаем такие математические спектры амплитуд сигнала.

1. Математический спектр амплитуд сигнала (21) имеет вид (19), а его график показан на рис. 1, б.

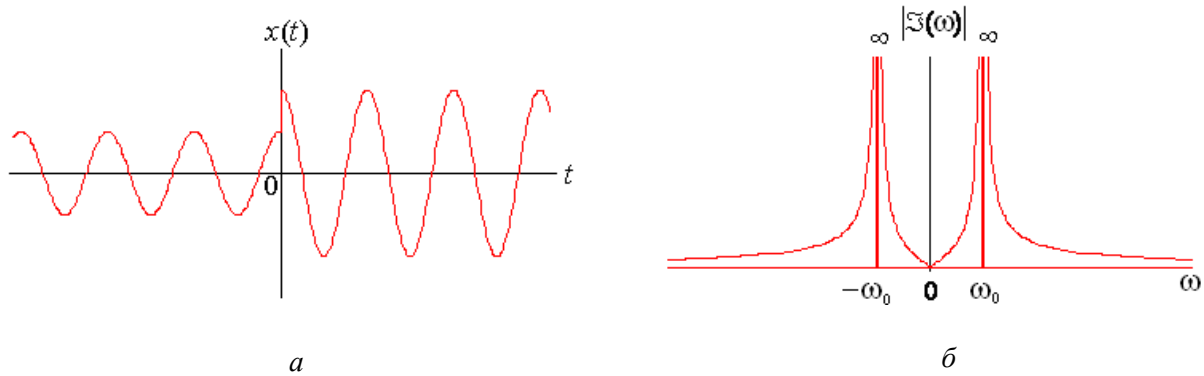


Рис. 1. График: а – сигнала (8); б – математического спектра амплитуд сигнала (8)

2. Математический спектр амплитуд сигнала (20) имеет вид

$$|\mathfrak{Z}(\omega)| = \frac{1}{2} [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] + \left| \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \right|, \quad (22)$$

а его график показан на рис. 2, б.

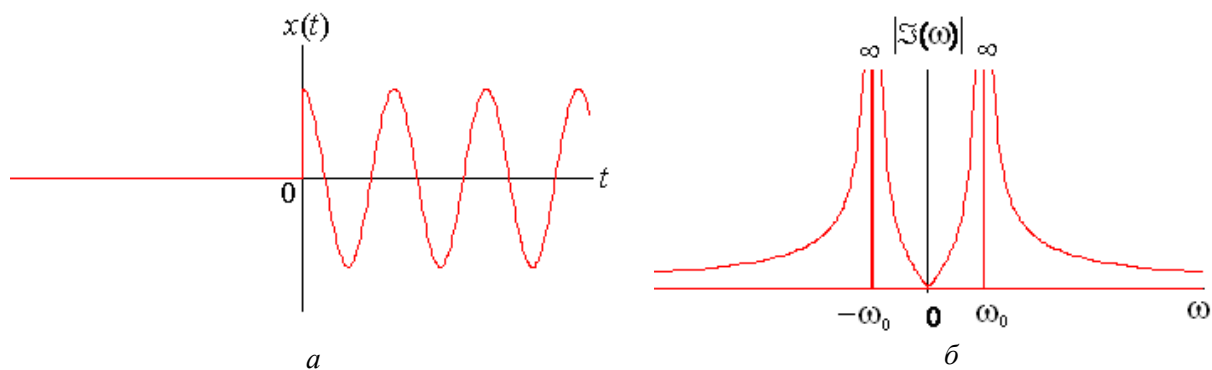


Рис.2. График: а – сигнала (20); б – математического спектра амплитуд сигнала (20)

Из известного в литературе преобразования Лапласа для полугармоники (20):

$$L(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2},$$

определено из (3), преобразование Фурье для (20) имеет вид

$$\mathfrak{Z}(\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (23)$$

Модуль от преобразования (23):

$$|\mathfrak{Z}(\omega)| = \left| \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right|. \quad (24)$$

Как видно, формулы (22) и (24) не совпадают. В конечном результате вычисления математического спектра амплитуд сигнала (20) при помощи преобразования Лапласа отсутствует δ -функция.

3. Математический спектр амплитуд сигнала (21) имеет вид

$$|\mathfrak{Z}(\omega)| = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0), \quad (25)$$

а его график показан на рис. 3, б.

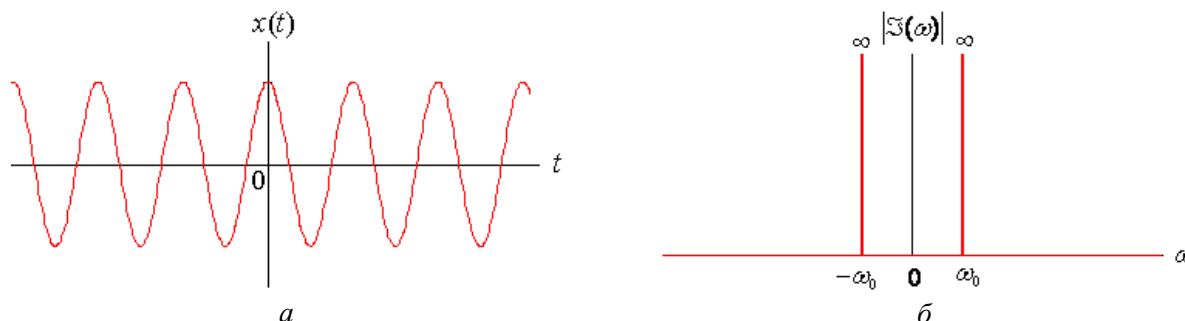


Рис.3. График: а – сигнала (21); б – математического спектра амплитуд сигнала (21)

Результат (25) совпадает с известным преобразованием Фурье гармоника, определенным искусственным методом.

Вывод. Преобразование Фурье на плоскости комплексной переменной может эффективно использоваться для вычисления преобразования Фурье абсолютно неинтегрируемых, в том числе и двусторонних сигналов без применения преобразования Лапласа. При вычислении можно использовать таблицы преобразований Лапласа.

Список литературы

1. Миронов Н. А. Преобразование Фурье на плоскости комплексной переменной. – Радиоэлектроника (известия вузов). – 2004. – Т.47. №5 – 6. – С. – 74 – 77.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник. – М.: Высш. шк., 1983. – 536 с.

В. Р. Березовий

Використання перетворення Фур'є на площині комплексної змінної

Розглянуто застосування модифікації перетворення Фур'є – перетворення Фур'є на площині комплексної змінної, для якого звичайне перетворення Фур'є є окремим випадком для обчислення спектра абсолютно не інтегрованих амплітудно маніпульованих сигналів.

V. R. Berezovij

The using of Fourier transformation on the plane of the complex variable

Application of updating of Fourier transformation – Fourier transformation on a plane of a complex variable for which usual Fourier transformation is a natural special case, for calculation of a spectrum absolutely not integrated signals with peak manipulation is considered.