УДК 681.3: 004.451.45(045)

[1]**В. В. Васильев, чл.-кор. НАН Украины,** д-р техн. наук,
[2]**Е. В. Киркач,** асп.

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ НА ОСНОВЕ БЛОЧНО-ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail:
[1]vsvv06@gmail.com, [2]kyrkach@voliacable.com

Проведен анализ линейной динамической системы с переменными параметрами операционным методом. Представлены программы и результаты вычислительных экспериментов в среде системы Mathematica с использованием блочно-импульсной системы базисных функций.

Ключевые слова: операционное исчисление, метод полиномиальной аппроксимации, интерполяционно-экстраполяционный метод, динамическая система.

Введение и постановка задачи. Операционные исчисления неклассического типа (S-преобразования) порождаются при использовании методов полиномиальных аппроксимаций [1 − 2]. В основу метода полиномиальной аппроксимации положено представление сигнала на конечном интервале изменения аргумента обобщенным полиномом по некоторой системе линейно-независимых базисных функций (степенная система базисных функций, экспоненциальная система, тригонометрический полином, ортогональные полиномы Лежандра и др.). Каждая система базисных функций порождает свое операционное исчисление.

Блочно-импульсная система базисных функций основана на использовании импульсных функций, имеющих вид прямоугольных импульсов, сдвинутых друг относительно друга на величину длительности импульса [2 − 3]. Диапазон изменения аргумента сигнала (диапазон аппроксимации) разделяется на m подинтервалов и на полученной сетке вводится система упомянутых импульсных функций. Аналитическое выражение системы блочно-импульсных функций имеет вид:

$$\nu(t,i,m,h)=\left\{\sigma\left(t-(i-1)h\right)-\sigma(t-ih)\right\}\Big|_{i=1}^{m}$$

где $\sigma(x)$ – функция единичного скачка, равная нулю при отрицательных значениях аргумента и единице в противном случае; $h = T/m$ – шаг сетки аргумента (длина подинтервала).

Подобные базисные системы являются ортогональными, а энергия каждой функции сосредоточена в ограниченной области изменения аргумента (в пределах шага сетки h). Задача нахождения системы коэффициентов аппроксимирующего полинома (блочно-импульсного спектра) упрощается и определяется следующими выражениями:

$$\vec{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1}\cdot\vec{\mathbf{Q}},$$

$$\mathbf{W} = h\mathbf{E},$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{h}\mathbf{E},$$

$$q_i = \int_0^T x(t)\nu_i(t)dt = \int_{(i-1)h}^{ih} x(t)dt,$$

$$X_i = \frac{q_i}{h} = \frac{m}{T}\int_{(i-1)h}^{ih} x(t)dt,$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка m.

Свойства функций базисной системы позволяют заменить интегрирование в пределах всего интервала изменения аргумента T интегрированием в пределах шага сетки h. Нахождение блочно-импульсного спектра сигнала осуществляется путем интегрирования сигнала в пределах h, а аппроксимация сигнала имеет вид кусочно-постоянной функции вида:

$$x_a(t)=\sum_{i=1}^{m} X_i \nu_i(t).$$

Увеличение количества базисных функций улучшает точность аппроксимации, но приводит к увеличению объемов вычислений и, вследствие этого, к возрастанию затрачиваемых ресурсов.

Интерполяционно-экстраполяционный метод. Аппроксимация сигналов на основе локальных спектров Лежандра нулевого порядка обладает двумя существенными недостатками [2; 4]. Первый заключается в том, что аппроксимация претерпевает разрывы на границах подинтервалов разбиения аргумента сигнала. Вторым недостатком является относительно низкая точность аппроксимации. Между тем, использование методов интерполяции и экстраполяции позволяет устранить этот недостаток, сохранив присущие локальным базисным системам преимущества.

При достаточно большом количестве интервалов разбиения оси абсцисс m точки пересечения кривой с ее аппроксимацией находятся приблизительно посередине отрезков $(i-1)h$ и ih, т. е. имеют абсциссы $(i-0{,}5)h$. Это является следствием метода наименьших квадратов, а именно равенство площадей, ограниченной данной кривой и ее аппроксимацией. Зная элементы блочно-импульсного спектра, можно построить аппроксимацию сигнала на основе линейной интерполяции между серединами подинтервалов разбиения оси аргумента.

Уравнение для определения коэффициентов интерполирующей прямой имеет вид:

$$\alpha_i+\beta_i t=\begin{cases} X(i), & \text{если} \quad t=(i-0{,}5)h; \\ X(i+1), & \text{если} \quad t=(i+0{,}5)h. \end{cases}$$

Решая это уравнение относительно α_i и β_i, получим

$$\beta_i=\frac{X(i+1)-X(i)}{h};$$

$$\alpha_i=X(i)(i+0{,}5)-X(i+1)(i-0{,}5).$$

Используя полученные выражения, можем построить интерполирующую кривую. Но аппроксимация строиться на интервале

$$\left[0+\frac{1}{2}h, T-\frac{1}{2}h\right],$$

поэтому на интервалах

$$\left[0,\frac{1}{2}h\right] \text{ и } \left[T-\frac{1}{2}h, T\right]$$

кривая экстраполируется. Тогда полное уравнение аппроксимирующей прямой имеет вид:

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{m-1}\left(X(i)(i+0{,}5)-X(i+1)(i-0{,}5)+\frac{X(i+1)-X(i)}{h}t\right)+$$

$$+\left(X(1)1{,}5-X(2)0{,}5+\frac{X(2)-X(1)}{h}t\right)\times\left(\sigma(t)-\sigma\left(t-\frac{h}{2}\right)\right)+\left(X(m-1)(m-0{,}5)-\right.$$

$$\left.-X(m)(m-1{,}5)+\frac{X(m)-X(m-1)}{h}t\right)\left(\sigma(t-(m-0{,}5)h)-\sigma(t-mh)\right).$$

Проведем вычислительные эксперименты над модельными примерами в программной среде системы Mathematica.

Рассмотрим динамическую систему, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a1\,\frac{dy(t)}{dt} + a2y(t) = 2\,e^{-t};$$

$$a1 = t,\ a2 = t,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -2.$$

Найдем точное решение на интервале изменения аргумента $0 \le t < 3$

```
In[1]:= a1[t_] := t; a2[t_] := t;
In[2]:= DSolve[{y''[t] + a1[t] * y'[t] + a2[t] * y[t] == 2 e^-t, y[0] == 5,
          y'[0] == -2}, y[t], t].
```

$$\text{Out[2]=}\ \left\{\left\{y[t] \to \frac{1}{2}\,e^{-2-t-\frac{t^2}{2}}\left(6\,e^{2+2t} + 4\,e^{2+\frac{t^2}{2}} - 3\,e^{2t}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Erfi}\left[\sqrt{2}\right] - 3\,e^{2t}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Erfi}\left[\frac{-2+t}{\sqrt{2}}\right]\right)\right\}\right\}$$

$$\text{In[3]:=}\ y := \frac{1}{2}\,e^{-2-t-\frac{t^2}{2}} \times \left(6\,e^{2+2t} + 4\,e^{2+\frac{t^2}{2}} - 3\,e^{2t}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Erfi}\left[\sqrt{2}\right] - 3\,e^{2t}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Erfi}\left[\frac{-2+t}{\sqrt{2}}\right]\right).$$

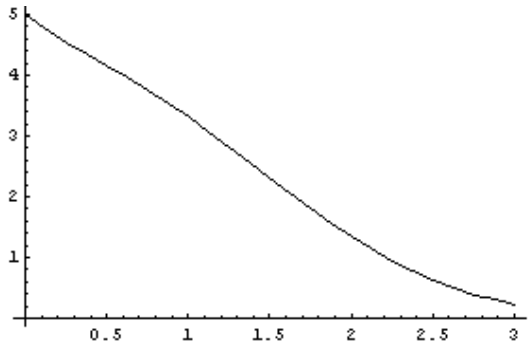


Рис. 1. График точного решения уравнения

Перед переходом в операционную область выполним ряд преобразований. Введем новую функцию

$$u(t) = y''(t).$$

Перейдем в операционное пространство. Операционным аналогом интегрального уравнения будет следующее выражение:

$$\vec{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_1\mathbf{P}^{\langle 1\rangle}\cdot\vec{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_2\mathbf{P}^{\langle 2\rangle}\cdot\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{F}},$$

где $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$ – диагональные матрицы изображений переменных коэффициентов.

Решение этого векторно-матричного уравнения будет иметь вид:

$$\vec{\mathbf{U}} = \left(\mathbf{E} + \mathbf{D}_1\mathbf{P}^{\langle 1\rangle} + \mathbf{D}_2\mathbf{P}^{\langle 2\rangle}\right)^{-1}\cdot\vec{\mathbf{F}}$$

$$\vec{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{\langle 2\rangle}\cdot\vec{\mathbf{U}} + y'(0)\vec{\mathbf{t}} + y(0)\vec{\mathbf{1}}.$$

Аппроксимацию решения можно построить с помощью выражения:

$$y_a(t) = \vec{\mathbf{Y}}^* \cdot \vec{\mathbf{S}}(t).$$

Построим аппроксимацию решения уравнения на основе системы блочно-импульсных функций при равномерном разбиении интервала на 10, 25 и 50 равных подинтервалов.

Задание параметров системы базисной функции:

```
In[5]:= m = 10; a := 0; b := 3; h := (b - a)/m;
```

Формирование системы базисных функций:

```
In[6]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
In[7]:= V = Table[v[t, i, h], {i, 1, m}];
```

Определение операционной матрицы интегрирования первого и второго порядка:

```
In[8]:= IntegrMatrBPF = Function[{a, b, m, β}, h = (b - a)/m;
          h^β/(Gamma[β + 2]) *
           Table[Which[i < j, 0, i == j, 1, i > j,
             (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)],
            {i, 1, m}, {j, 1, m}]];
In[9]:= β = 1;
In[10]:= P1 = IntegrMatrBPF[a, b, m, β];
In[12]:= β = 2;
In[13]:= P2 = IntegrMatrBPF[a, b, m, β];
```

Задание правой части интегрального уравнения:

```
In[14]:= y0 := 5; y10 := -2;
In[15]:= f = 2 e^-t + 2 t + 2 t * t - 5 t;
```

Определение операционного изображения правой части интегрального уравнения:

```
In[16]:= F = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) f dt, {i, 1, m}];
```

Определение изображения линейной функции t:

```
In[17]:= Z = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) t dt, {i, 1, m}];
```

Формирование диагональной матрицы изображения переменных коэффициентов:

```
In[18]:= D1 = DiagonalMatrix[Z];
```

Нахождение функции $u(t)$ в операционной области:

```
In[20]:= U = Inverse[IdentityMatrix[m] + D1.P1 + D1.P2].F;
```

Определение изображения константы 1:

```
In[21]:= k = 1;
In[22]:= K = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) k dt, {i, 1, m}];
```

Нахождение изображения решения в операционной области:

```
In[23]:= Y = P2.U - 2 Z + 5 K;
```

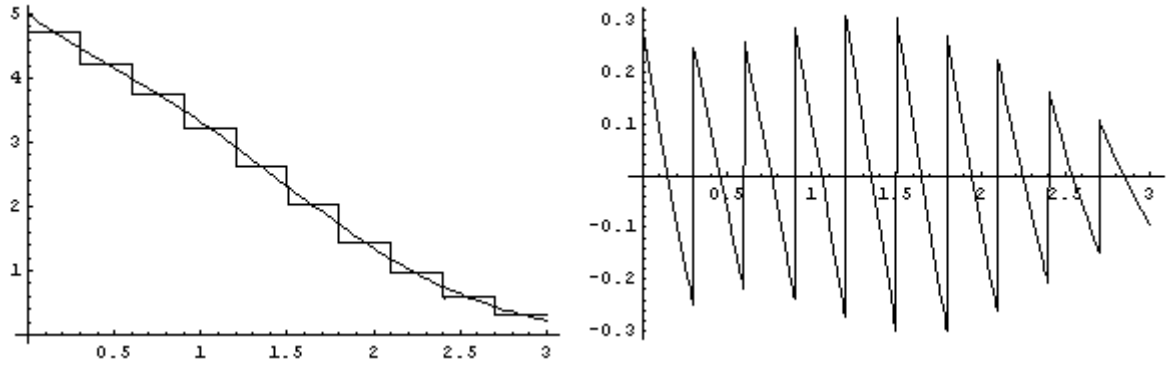
Определение аппроксимации решения уравнения:

```
In[24]:= ya = Y.V;
```

Построение графика аппроксимации, совмещенного с сигналом, и графика погрешности аппроксимации.

```
In[25]:= Plot[{y, ya}, {t, 0, 3}, PlotPoints → 100]
In[26]:= Plot[{y - ya}, {t, 0, 3}]
```

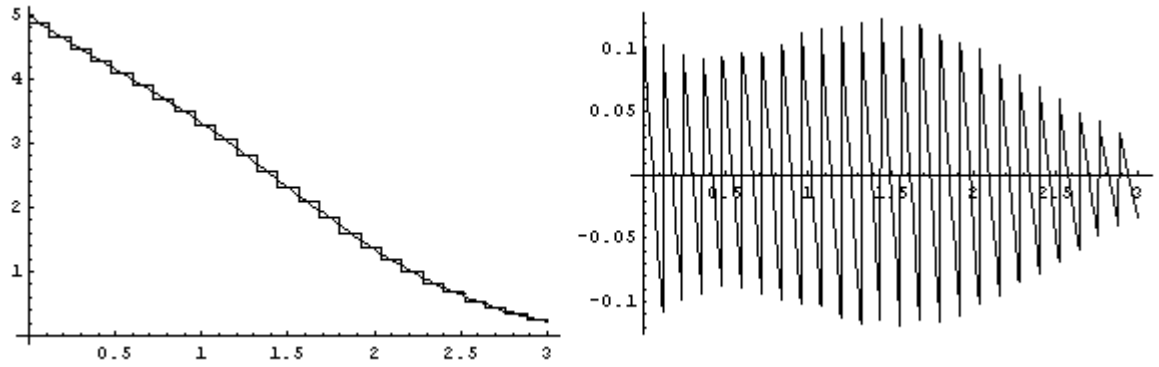
Аппроксимация решения уравнения приведена на рис. 2.



а *б*

Рис. 2. Аппроксимация сигнала при $m = 10$:
а − сигнал и его блочно-импульсная аппроксимация; *б* − график погрешности аппроксимации

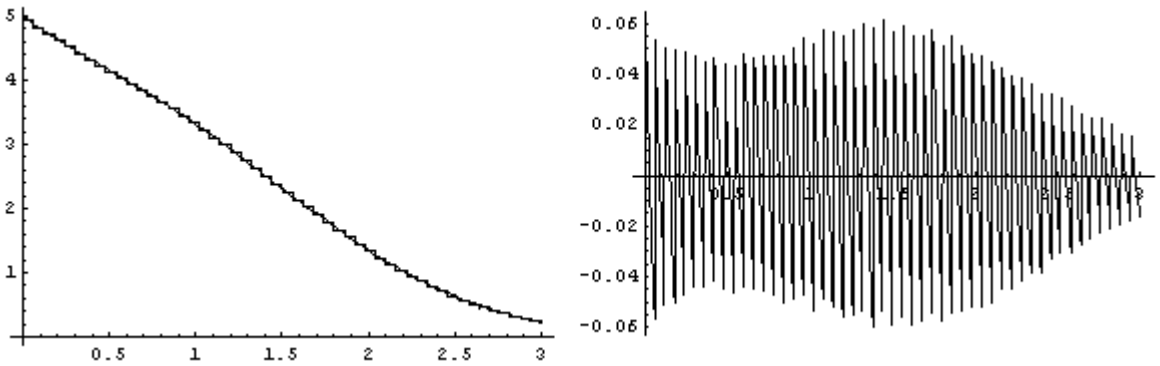
При разбиении интервала на 25 равных подинтервалов график аппроксимации сигнала будет иметь вид, представленный на рис. 3.



а *б*

Рис. 3. Аппроксимация сигнала при $m = 25$:
а − сигнал и его блочно-импульсная аппроксимация; *б* − график погрешности аппроксимации

При разбиении интервала на 50 равных подинтервалов график аппроксимации сигнала будет иметь вид, представленный на рис. 4.



а *б*

Рис. 4. Аппроксимация сигнала при $m = 50$:
а − сигнал и его блочно-импульсная аппроксимация; *б* − график погрешности аппроксимации

Теперь построим аппроксимацию решения дифференциального уравнения интерполяционно-экстраполяционным методом при равномерном разбиении интервала на 10 равных частей ($m = 10$).

Задание параметров системы базисной функции:

```
In[5]:= m = 10; a := 0; b := 3; h := (b - a)/m;
```

Определение операционной матрицы интегрирования первого и второго порядка:

```
In[6]:= IntegrMatrBPF = Function[{a, b, m, β}, h = (b - a)/m;
          h^β/Gamma[β + 2] *
           Table[Which[i < j, 0, i == j, 1, i > j,
             (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)],
            {i, 1, m}, {j, 1, m}]];
In[7]:= β = 1;
In[8]:= P1 = IntegrMatrBPF[a, b, m, β];
In[10]:= β = 2;
In[11]:= P2 = IntegrMatrBPF[a, b, m, β];
```

Задание правой части интегрального уравнения:

```
In[12]:= y0 := 5; y10 := -2;
In[13]:= f = 2 e^-t + 2 t + 2 t * t - 5 t;
```

Определение операционного изображения правой части интегрального уравнения:

```
In[14]:= F = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) f dt, {i, 1, m}];
```

Определение изображения линейной функции t:

```
In[15]:= Z = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) t dt, {i, 1, m}];
```

Формирование диагональной матрицы изображения переменных коэффициентов:

```
In[16]:= D1 = DiagonalMatrix[Z];
```

Нахождение функции $u(t)$ в операционной области:

```
In[18]:= U = Inverse[IdentityMatrix[m] + D1.P1 + D1.P2].F;
```

Определение изображения константы 1:

```
In[19]:= k = 1;
In[20]:= K = Table[1/h * ∫_((i-1)*h)^(i*h) k dt, {i, 1, m}];
```

Нахождение изображения решения в операционной области:

```
In[21]:= Y = P2.U - 2 Z + 5 K;
```

Формирование систем базисных функций для интерполяционно-экстраполяционного метода:

```
In[22]:= v1[t_, i_, h_, a_] :=
           If[(i - 1) * h + a ≤ t < (i - 0.5) * h + a, 1, 0];
In[23]:= V1 = Table[v1[t, i, h, a], {i, 1, m}];
In[24]:= v2[t_, i_, h_, a_] :=
           If[(i - 0.5) * h + a ≤ t < (i + 0.5) * h + a, 1, 0];
```

```
In[25]:= V2 = Table[v2[t, i, h, a], {i, 1, m}];
In[26]:= v3[t_, i_, h_, a_] :=
           If[(i + 0.5) * h + a ≤ t < (i + 1) * h + a, 1, 0];
In[27]:= V3 = Table[v3[t, i, h, a], {i, 1, m}];
```

Определение аппроксимации решения уравнения на интервале $[0,0,5h]$:

```
In[28]:= j = 1;
In[29]:= ya1 =
           (Y[[j]] (j + 0.5) - Y[[j + 1]] (j - 0.5) +
              (Y[[j + 1]] - Y[[j]]) t / h) V1[[j]];
```

Определение аппроксимации решения уравнения на интервале $[0 + 0,5h, T - 0,5h]$:

```
In[30]:= ya2 =
```

$$\sum_{j=1}^{m-1} (Y[[j]]\,(j + 0.5) - Y[[j + 1]]\,(j - 0.5) + (Y[[j + 1]] - Y[[j]])\,t / h)\,V2[[j]];$$

Определение аппроксимации решения уравнения на интервале $[T - 0,5h, T]$:

```
In[31]:= j = m - 1;
In[32]:= ya3 =
           (Y[[j]] (j + 0.5) - Y[[j + 1]] (j - 0.5) +
              (Y[[j + 1]] - Y[[j]]) t / h) V3[[j]];
```

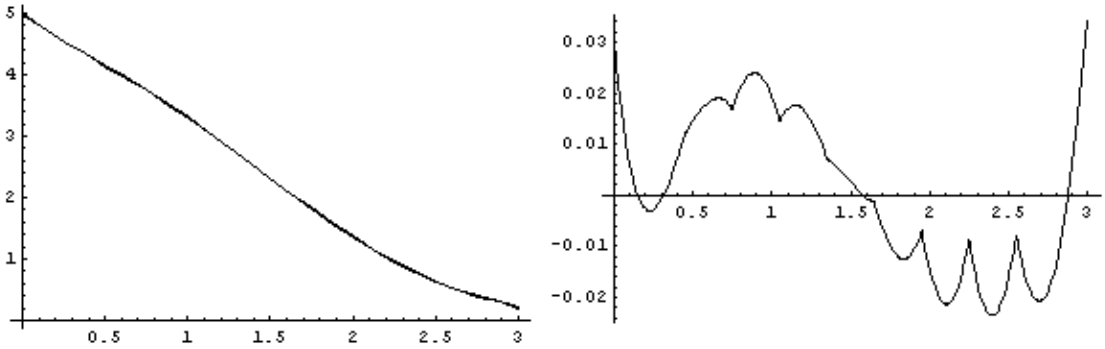
Определение аппроксимации решения уравнения:

```
In[33]:= ya = ya1 + ya2 + ya3;
```

Построение графика аппроксимации, совмещенного с сигналом, и графика погрешности аппроксимации.

```
In[34]:= Plot[{y, ya}, {t, 0, 3}]
In[35]:= Plot[{y - ya}, {t, 0, 3}]
```

Аппроксимация решения уравнения приведена на рис. 5.



а *б*

Рис. 5. Аппроксимация сигнала интерполяционно-экстраполяционным методом при $m = 10$: *а* − сигнал и его аппроксимация; *б* − график погрешности аппроксимации

Выводы. Из анализа полученных графиков при выполнении вычислительных экспериментов аппроксимации сигнала на основе блочно-импульсных базисных функций видно, что при увеличении количества подинтервалов разбиения повышается точность аппроксимации. То есть при увеличении количества базисных функций улучшается точность аппроксимации.

Как показывают результаты вычислительных экспериментов, использование интерполяционно-экстраполяционного метода устраняет разрывы на границах подинтервалов разбиения аргумента сигнала. При помощи этого метода при одинаковом количестве подинтервалов по сравнению с блочно-импульсной аппроксимацией можно достичь намного большей точности. Точность аппроксимации интерполяционно-экстраполяционным методом при m = 10 может сравниться с точностью аппроксимации на основе блочно-импульсной системы базисных функций при m = 100.

Список литературы

1. *Васильев В. В.* Достижения научной школы Г. Е. Пухова в области операционных методов анализа систем // Электрон. моделирование / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – 2003. – 25, № 6. – С. 57 – 75. – Библиогр.: 156 назв. – рус.
2. *Васильев В. В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем: науч. изд. / В. В. Васильев, Л. А. Симак; НАН Украины, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова. – К.: НАН Украины, 2008. — 256 с. – Библиогр. в конце гл. – ISBN 978-966-02-4384-2.
3. *Васильєв В. В.* Математичне і комп'ютерне моделювання процесів і систем: Апроксимація сигналів із застосуванням системи Mathematica®: навч. посіб. / В. В. Васильєв, Л. О. Сімак; НАН України, Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова, М-во освіти і науки України, Національний авіаційний університет – К.: НАН України, 2007. – 127 с. – Бібліогр.: 126 с. – ISBN 978-966-02-4386-6.
4. *Васильєв В. В.* Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі некласичних операційних числень. / В.В. Васильєв, Л.О. Сімак, О.А. Зеленков.; НАН України, Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, М-во освіти і науки України, Національний авіаційний університет – К.: НАН Украины, 2006. – 184 с. – Бібліогр. в кінці гл. – ISBN 966-02-0964-9.

В.В. Васильєв, К.В. Киркач

Аналіз лінійної динамічної системи зі змінними параметрами операційним методом на основі блочно-імпульсної системи базисних функцій

Проаналізовано лінійну динамічну систему зі змінними параметрами операційним методом. Подано програми та результати обчислювальних експериментів у середовищі системи Mathematica з використанням блочно-імпульсної системи базисних функцій.

V. V. Vasylyev, K. V. Kyrkach

The analysis of linear dynamic system with variable parameters by operational method based on block-pulse system of basis functions

The analysis of linear dynamic system with variable parameters by operational method is carried out. Programs and results of computing experiments in the environment of system Mathematica with use of block-pulse system of basic functions are presented.