МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

УДК 517.2(045)

Э. Г. Азнакаев, д-р физ.-мат. наук,
Д. Э. Азнакаева

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: aznakayev@nau.edu.ua

Предложен метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных методом интегральных преобразований для функций одной и многих переменных.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, метод интегральных преобразований.

Введение. В связи с усложнением природы процессов, изучаемых современной наукой, возникает необходимость в разработке и усовершенствовании необходимого для этого математического аппарата [1; 2]. А при описании поведения сложных технических и природных систем возникает необходимость в разработке новых методов решения и введения нового математического аппарата.

Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений *n*-го порядка. При рассмотрении различных задач науки и техники приходится решать дифференциальные уравнения.

Эта работа посвящена исследованию решений дифференциальных уравнений n-го порядка.

Пусть имеется дифференциальное уравнение n-го порядка типа

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^{(i)}(x) = h(x), \tag{1}$$

где $f_i(x)$, $h(x)$ – некоторые заданные функции; y – функция; x – аргумент; (i) – порядок дифференцирования.

Для решения уравнения перейдем от переменной x к новому аргументу z:

$$y(x) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} y(z) e^{-ixz} dz, \quad h(x) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} h(z) e^{-ixz} dz, \quad f_i(x) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(z) e^{-ixz} dz. \tag{2}$$

Здесь A – нормированная постоянная, равная единице в случае преобразования Лапласа; i – мнимая единица.

Подставляя эти соотношения (2) в исходное уравнение (1), имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-ixz} \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y(x)(-iz)^i = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z) e^{-ixz} dz. \tag{3}$$

Приравнивая подинтегральные выражение слева и справа в равенстве (3), запишем:

$$\sum_{i=0}^{n} y(z)(-iz)^i f_i(x) = h(z).$$

Отсюда

$$y(z) = \frac{h(z)}{\sum_{i=0}^{n} (-iz)^i f_i(x)}.$$

Тогда можно записать решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка в следующем виде:

$$y(x)=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} y(z)e^{-ixz}dz=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(z)e^{-ixz}}{\sum_{i=0}^{n}(-iz)^i f_i(x)}dz=$$

$$=\frac{2\pi i}{A}\sum_k \mathrm{Re}\,s\left[\frac{h(z_k)e^{-ixz_k}}{\sum_{i=0}^{n}(-iz_k)^i f_i(x)}\right]+Pf\,, \tag{4}$$

где Res – вычет; Pf – главное значение по Коши интеграла в соотношении (4).

Задавая явный вид функций $f_i(x)$ и $h(x)$, автоматически получаем решение исходного дифференциального уравнения n-го порядка в явном виде.

Аналогично поступаем в случае задания произвольно интеграла преобразования при переходе к новому аргументу. Решение выполняем подобным образом. Выбор интегрального преобразования диктуется соображениями удобства.

Метод решения дифференциальных уравнений *n*-го порядка в частных производных. Случай дифференциальных уравнений (обыкновенных) n-го порядка был разобран ранее. Исследуем решения дифференциальных уравнений n-го порядка в частных производных.

Пусть имеет исходное дифференциальное уравнение n-го порядка в частных производных:

$$\sum_{\{\ell\}=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{k} f_{ej_1}(\vec{x})y_{j_1}^{\{\ell\}}(\vec{x})+\sum_{\substack{\{\ell\}=o\\ \ell_1+\ell_2=\ell}}^{n}\sum_{j_1}^{k}\sum_{\substack{j_2=0\\(j_1\neq j_2)}}^{k} f_{ej_1j_2}(\vec{x})\cdot y_{j_1j_2}^{\{\ell\}}(\vec{x})+\cdots+$$

$$+\sum_{\substack{\{\ell\}=0\\(\ell=\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_k)}}^{n}\ \sum_{\substack{j_1=0\\(j_1\neq\ldots\neq j_k)}}^{k}\ldots\ldots\sum_{j_k=0}^{k} f_{ej_1j_2\cdots j_k}(\vec{x})\cdot y_{j_1\cdots j_k}^{\{\ell\}}(\vec{x})=h(\vec{x})\,, \tag{5}$$

где $\vec{x}\equiv(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)$; k – количество переменных; $\{\ell\}$ – порядок дифференцирования; ℓ_i – порядок дифференцирования по x_i; индекс j_1 – показывает, что производная берется по одной переменной (любой из x_1 ... $x_к$); j_1j_2 – показывает, что производная по двум переменным берется (любым из $\vec{x}$), … j_1j_2 … j_k – показывает, что производная берется по всем k переменным от x_1 до $x_к$; $\ell=\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_k$; $\{\ell\}\equiv(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k)$.

Перейдем к новым аргументам согласно соотношениям:

$$y(\vec{x})=\frac{1}{A}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{k} y(\vec{z})e^{-i\vec{x}\vec{z}}d\vec{z}\ , \qquad f_{ej_1}\ldots(\vec{x})=\frac{1}{A}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{k} f_{ej_1}\ldots(\vec{z})e^{-i\vec{x}\vec{z}}d\vec{z}\,,$$

$$h(\vec{x})=\frac{1}{A}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\ldots\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{k} h(\vec{z})d\vec{z}\ ,\quad e^{-i\vec{x}\vec{z}}\equiv e^{-i(x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_kz_k)}\,, \tag{6}$$

A – нормировочная постоянная; $\vec{z}\ \equiv\ (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k)$.

Подставляя данные соотношения (6) в исходное уравнение (5) и проводя дифференцирование и приравнивая подинтегральные выражения слева и справа в полученном уравнении, имеем:

$$\frac{y(\vec{z})}{h(\vec{z})} = \left\{ \sum_{\{\ell\}}^{n} \sum_{j_1=0}^{k} f_{ej_1}(\vec{x})(-iz_{j_1})^{\ell_{j1}} + \sum_{\substack{\{\ell\} \\ (\ell=\ell_1+\ell_2)}}^{n} \sum_{\substack{j_1 \\ (j_1 \neq j_2)}}^{k} \sum_{j_2}^{k} f_{ej_1j_2}(\vec{x}) \cdot (-iz_{j_1})^{\ell_{j_1}} (-iz_{j_2})^{\ell_{j_2}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\{\ell\} \\ (\ell=\ell_1+\ell_2+..+\ell_k)}}^{n} \sum_{\substack{j_1=0 \\ (j_1 \neq j_2 \neq .. \neq j_k)}}^{k} \sum_{j_2=0}^{k} \ldots \sum_{j_k}^{k} f_{ej_1 j_2 \ldots j_k}(\vec{x})(-iz_{j_1})^{\ell_{j1}} (-iz_{j_2})^{\ell_{j2}} \ldots (-iz_{j_k})^{\ell_{jk}} \right\} \equiv H(\vec{z},\vec{x}). \quad (7)$$

Тогда запишем решение исходного уравнения (5) в частных производных:

$$y(\vec{x}) = \frac{1}{A} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{k} y(\vec{z}) e^{-i\vec{x}\vec{z}} d\vec{z} = \frac{1}{A} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{k} H(\vec{z},\vec{x}) e^{-i\vec{x}\vec{z}} d\vec{z} =$$

$$= \frac{1}{A} \sum_i \mathrm{Re}s \left[H(\vec{z},\vec{x}) e^{-i\vec{x}\vec{z}_i} \right] + Pf, \quad (8)$$

где Res – вычет; Pf – главное значение по Коши интеграла в соотношении (8).

Задавая явный вид функций $f(\vec{x})$ и $h(\vec{x})$, получаем решение исходного дифференциального уравнения в частных производных n-го порядка в явном виде.

Аналогично поступаем в случае задания производного интегрального преобразования при переходе к новому аргументу (аргументам). Решение проводится подобным образом. Выбор интегрального преобразования (преобразований) диктуется соображениям удобства.

Выводы. В работе предложен новый метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных методом интегральных преобразований для функций одной и многих переменных.

Список литературы

1. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1970. – 720 с.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. – 1956. – 628 с.

Е. Г. Азнакаєв, Д. Е. Азнакаєва

Спосіб розв’язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних методом інтегральних перетворень

Запропоновано метод розв’язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних методом інтегральних перетворень.

E. G. Aznakayev, D. E. Aznakayeva

Decision method for the ordinary differential equations and the equation in partial derivatives by the integrated transformations method

The solution method of the ordinary differential equations and the differential equations in partial derivatives by the method of integrated transformations.