УДК 621.391.(045)

О. Ю. Красноусова, канд. техн. наук,
Ю. А. Егоршин, канд. техн. наук

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИМВОЛИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ СИГНАЛОВ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНЙ ИНТЕГРАЛОВ ЛАПЛАСА И ФУРЬЕ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua

Предложены способы определения операторных и спектральных изображений для импульсов и периодических колебаний, описываемых различными функциями времени, без вычислений интегралов Лапласа и Фурье.

Ключевые слова: операторные изображения, частотные спектры, импульсы, периодические последовательности импульсов.

Введение и постановка задачи. В операторном и в спектральном методах анализа электрических цепей и сигналов используют символические (операторные и спектральные) изображения сигналов. Эти изображения определяются при помощи интегралов Лапласа и Фурье [1]. В ряде случаев вычисления интегралов Лапласа и Фурье представляют собой громоздкие операции. Интегралы Фурье невозможно вычислить для незатухающих колебаний. Выражения спектральной плотности таких колебаний, полученные из их операторных изображений, приводимые в учебниках и справочниках [2; 3], являются ошибочными. На это указано в работе [4] и показано нами в [5]. Отсюда вытекает практическая целесообразность разработки способов определения символических изображений сигналов с исключением операции интегрирования и по Фурье, и по Лапласу. Некоторые из этих способов предлагаются в данной работе. В частности, рассматриваются импульсы и их периодические последовательности, описываемые на участках непрерывности экспоненциальными, гармоническими, степенными и полиномиальными функциями времени.

Основные положения предлагаемых способов.

1. Используется, обоснованное в работе [6], выражение операторного изображения производной порядка *n* для функции включения сигнала $U(t)$, где $h(t)$ – скачок *Хевисайда* в виде

$$L[V^{(n)}]=p^{n}L[V]=p^{n}L[U]. \qquad (1)$$

(Выражение (1) намного проще классического выражения $L[U^{(n)}]$ [1]).

Подобное выражение (1) используется нами и для спектральной плотности сигнала, независимо от его типа (затухающего, незатухающего), независимо от начальных условий:

$$V(0),V^{(1)}(0),...,V^{(n)}(0).$$

(Нами показано [6], что ненулевые начальные условия автоматически учитываются в выражениях производных $V^{(n)}(t)$ в виде δ-импульсов и их производных, неведомых во времена Лапласа-Фурье).

2. Для импульсов $w(t)$, описываемых степенными и полиномиальными функциями, используется обоснованное в работах [7; 8] выражение спектральной плотности

$$\dot{S}[w]=(j\omega)^{-n}\dot{S}[w^{(n)}], \text{ где } w(t)=U(t)[h(t)-h(t-\tau)].$$

Для таких импульсов нами также используется запись

$$w(t)=U(t)[y_0(t)-y_0(t-\tau)],$$

что позволяет находить спектр $\dot{S}[w]$ в виде алгебраической суммы спектров интегралов разных порядков по отношению к элементарным функциям:

$$h(t);\ \ y_0(t)=0,5\mathrm{sgnt};\ \delta(t)=y_0^{(1)}(t).$$

3. Для сигналов, описываемых экспоненциальными и гармоническими функциями, используется свойство воспроизводимости исходной функции при её дифференцировании [6]. Это свойство – в виде алгебраического соотношения – позволяет определять символические изображения исходных функций без определения изображения их производных.

4. Как показано в работе [5], для любых интегрируемых сигналов можно всегда использовать простой переход от операторного изображения к спектру, например:

$$\dot{S}(w)=\lim\nolimits_{p\to j\omega} L[w].$$

5. Для любых периодических колебаний (неинтегрируемых сигналов) их комплексные амплитуды гармоники $\dot{U}_{m,k}$ можно определить по спектральной плотности импульса $\dot{S}[w]$ за период колебаний T известным способом [4] в виде:

$$\dot{U}_{m,k}=2T^{-1}\lim\nolimits_{\omega\to k2\pi T^{-1}}\dot{S}[w]. \tag{2}$$

(Для нулевой гармоники множитель 2 в уравнении (2) следует опустить).

Способ, основанный на дифференцировании функции времени.

Вариант 1. Сигнал $U(t)$– степенная или полиномиальная функция. Дифференцирование функции включения, а также импульса w всегда в итоге приводит к взвешенной сумме δ-импульсов и их производных [6]. Спектры δ-импульсов и их производных известны. Отсюда можно записать спектр производных $V^{(n)}$, $w^{(n)}$ некоторого порядка n без вычислений интегралов Лапласа и Фурье. На основе доказанного в работе [7] свойства для спектров таких функций далее следует использовать равенство

$$\dot{S}[w]=(j\omega)^{-1}\dot{S}[w^{(n)}].$$

Пример 1. Импульс треугольной формы:

$$w=U[h(t)-h(t-\tau)],\ \ U(t)=\tau^{-1}t,$$

где τ – длительность импульса. Найдем производные $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ с учётом свойств δ-импульсов [1] получим

$$w^{(2)}=\tau^{-1}[\delta(t)-\delta(t-\tau)-\delta^{(1)}(t-\tau).$$

Отсюда получаем $\dot{S}[w^{(2)}]=\tau^{-1}(1-e^{-j\omega\tau})-j\omega e^{-j\omega\tau}$ и $\dot{S}[w]=(j\omega)^{-2}\dot{S}[w^{2}]$.

Для периодической последовательности таких импульсов с периодом τ имеем:

$$\dot{U}_{m,k}=2\lim\nolimits_{\omega\to k\cdot 2\pi\cdot\tau^{-1}}\dot{S}[w]\tau^{-1}.$$

Пример 2. Мощность импульса треугольной формы: $w=U^{2}[h(t)-h(t-\tau)]$.

Берем третью производную, получая:

$$w^{(3)}=2\tau^{-2}[\delta(t)-\delta(t-\tau)]-2\tau^{-1}\delta^{(1)}(t-\tau)-\delta^{(2)}(t-\tau).$$

Отсюда: $\dot{S}[w^{(3)}]=2\tau^{-2}(1-e^{-j\omega\tau})-2\tau^{-1}j\omega e^{-j\omega\tau}+\omega^{2}e^{-j\omega\tau}$, $\dot{S}[w]=(j\omega)^{-3}\dot{S}[w^{(3)}]$.

Для периодичной последовательности таких импульсов w получим комплексные амплитуды:

$$\dot{P}_{m,k} = 2\tau^{-1} 2 \lim_{\omega \to k \cdot 2\pi \cdot \tau^{-1}} \dot{S}[w].$$

Среднее значение – средняя мощность – находится в виде:

$$P_0 = \tau^{-1} \lim_{\omega \to 0} \dot{S}[w].$$

Вариант 2. Сигнал $U(t)$ – экспоненциальная или гармоническая функция. Дифференцирование функций включения, а также импульсов приводит к алгебраической взаимосвязи исходной функции и её производной. Эта взаимосвязь приводит к выражениям $L[V]$, $L[w]$.

Пример 3. Экспоненциальная функция времени:

$$V(t) = 1e^{-\alpha t} h(t).$$

Берём производную, получая $V^{(1)} = -\alpha V + \delta(t)$, отсюда имеем: $L[V^{(1)}] = -\alpha L[V] + 1$.

Учитывая выражение (1), получаем: $L[V] = (\alpha + p)^{-1}$.

Пример 4. Гармоническое колебание $V(t)$ и его импульс $w(t)$:

$$V(t) = 1\sin \omega_0 (t) h(t), \quad w(t) = 1 \sin \omega_0 t [h(t) - h(t - \tau)].$$

Дважды дифференцируем $V(t)$, получаем

$$V^{(2)} = -\omega_0^2 V + \omega_0 \delta(t), \text{ тогда } L[V^{(2)}] = -\omega_0^2 L[V] + \omega_0.$$

Приравниваем $L[V^2]$ в соответствии с уравнением (1) выражению $p^2 L[V]$, тогда получаем

$$L[V] = \omega_0 (\omega_0^2 + p^2)^{-1}.$$

Подобным способом находим $w^{(2)}$. Если $\tau = \pi\omega_0^{-1}$, то $w^{(2)} = -\omega_0^2 w + \omega_0 [\delta(t) + \delta(t - \tau)]$.

Отсюда имеем: $L[w^{(2)}] = -\omega_0^2 L[w] + \omega_0 [1 + e^{-p\tau}] = p^2 L[w]$.

В итоге: $L[w] = \omega_0 [1 + e^{-p\tau}](\omega_0^2 + p^2)^{-1}$. Заменяя p на $j\omega$, получаем $\dot{S}[w]$.

Для двухполупериодного диодного выпрямления с учетом выражения (5), получаем амплитуду первой гармоники:

$$\dot{U}_{m,1} = 2\tau^{-1} \lim_{\omega \to 2\pi\tau^{-1}} \dot{S}[w] = -4/(3\pi).$$

Среднее значение равно: $V_0 = \tau^{-1} \lim_{\omega \to 0} \dot{S}[w] = 2/\pi$.

Коэффициент пульсаций составляет $\left|\dot{U}_{m1}\right| / U_0 = 2/3$.

Способ, основанный на использовании интегралов для элементарных функций времени. Этот способ удобно применять, когда сигнал описывается степенными и полиномиальными функциями времени. Известно [8], что центральные первообразные функции разных порядков (интегралы с нулевой постоянной интегрирования) по отношению к единице, а также к $\delta(t)$, $h(t)$ и $y_0(t)$ являются степенными функциями:

$$(1)^{(-n)} = \frac{t^n}{n!}; \; [\delta(t)^{(-n)}] = [y_0(t)]^{(-n+1)}; \; y_0^{(-n)} = t^n \frac{y_0}{n!}; \; h^{(-n)} = t^n \frac{h}{n!}. \quad (3)$$

Спектры элементарных функций известны. Тогда, с использованием выражений (3) можно оценить и спектры степенных функций. Доказано [7], что импульсы $w(t)$ степенных и полиномиальных функций времени можно выразить в виде сумм центральных первообразных функций. Тогда их спектры определяются без вычисления интегралов Фурье.

Пример 5. Степенная функция $u(t)=t^2$.

Найдем спектр этого неинтегрируемого сигнала. Поскольку $t^2=2(1)^{(-2)}$ и $\dot{S}[1]=2\pi\delta(\omega)$, то можно сразу записать: $\dot{S}[u]=2(j\omega)^{-2}2\pi\delta(\omega)$.

Пример 6. Импульс треугольной формы.

Пусть $w(t)=t\tau^{-1}[h(t)-h(t-\tau)]$ с учётом того, что $h(t)=y_0(t)+0{,}5$, запишем:

$$w(t)=t\tau^{-1}[y_0(t)-y_0(t-\tau)]=\tau^{-1}ty_0(t)-\tau^{-1}(t-\tau)y_0(t-\tau)-y_0(t-\tau).$$

Используя выражения (3), получим: $w(t)=\tau^{-1}[y_0^{(-1)}(t)-y_0^{(-1)}(t-\tau)]0-y_0(t-\tau)$.

С учётом $\dot{S}[y_0]=(j\omega)^{-1}$ имеем: $\dot{S}[w]=\tau^{-1}(j\omega)^{-2}(1-e^{-j\omega\tau})-(j\omega)^{-1}e^{-j\omega\tau}$.

Пример 7. Импульс прямоугольной формы: $w(t)=U[h(t)-h(t-\tau)]$.

Его спектр $\dot{S}[w]$ можно найти по спектрам: $\dot{S}[h(t)]$, $\dot{S}[h(t-\tau)]$. Известно [4], что $\dot{S}[h(t)]=(j\omega)^{-1}+\pi\delta(\omega)$. Тогда спектр $\dot{S}[w]=U(j\omega)^{-1}(1-e^{-j\omega\tau})$. Заметим, что составляющая спектра $\dot{S}[w]$, равная $U_\pi\delta(\omega)[1-e^{-j\omega\tau}]$, обращается в нуль благодаря свойству $f(x)\delta(x)=$ $=f(0)\delta(x)$. Таким же образом δ – составляющая спектров любых интегрируемых сигналов – всегда обращается в нуль. Поэтому спектры этих сигналов можно получать из операторных изображений. Нетрудно видеть, что изображения сигналов, приводимые в примерах 1, 2, 3, 4, 6 и 7, полностью совпадают с приводимыми в литературе. Спектр сигнала, полученный в примере 5, позволяет получить известный спектр единицы, если сигнал t^2 дважды продифференцировать, разделить на 2 и использовать выражения типа (1).

Выводы.

1. Предлагаемые способы и можно и целесообразно использовать для определения операторных изображений, а также спектров сигналов, описываемых экспоненциальными, гармоническими, степенными, полиномиальными функциями времени, без вычислений интегралов Лапласа и Фурье.
2. Приведенные примеры полностью подтверждают достоверность получаемых выражений операторных изображений и спектров сигналов.

Список литературы

1. *Корн Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1978. – 832 с.
2. *Атабеков Г. И.* Теоретические основы электротехники. – М.: Энергия, 1978. – ч.1. – 593 с.
3. *Татур Т. А.* Теория электрических цепей (справочное пособие). – М.: Высш. шк. – 1980. – 271 с.
4. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк. – 1988.– 448 с.
5. *Егоршин Ю. А.* Определение спектров неинтегрируемых сигналов – мультипликативных комбинаций гармонических и степенных функций / Ю. А. Егоршин, О. Ю. Красноусова // Електроніка та системи управління. – К.: НАУ, 2007. – № 4. – С. 55 – 60.

6. *Єгоршин Ю. О.* Визначення операторних зображень сигналів та процесів без обчислення інтегралів Лапласа / Ю. О.Єгоршин, О. Ю.Красноусова // Вісник НАУ. – К.: НАУ, 2007.– № 1. – С. 58 – 62.
7. *Єгоршин Ю. О.* Використання властивостей δ-імпульсів при визначенні спектрів сигналів / Ю. О.Єгоршин, О. Ю.Красноусова // Вісник НАУ. – К.: НАУ, 2007. – №2. – С. 6 – 9.
8. *Красноусова О. Ю.* Определение частотных спектров для степенных функций времени. Проблеми інформатизації та управління. – К.: НАУ, 2008. – №2. – С. 111–115.

О. Ю. Красноусова, Ю. А. Єгоршин

Способи визначення символічних зображень сигналів без обчислень інтегралів Лапласа і Фур'є

Запропоновано способи визначення операторних та спектральних зображень для імпульсів і періодичних коливань, що описуються різними функціями часу, без обчислень інтегралів Лапласа та Фур'є.

O. Y. Krasnousova, Y. A. Yegorshin

Methods of determination of symbolic images of signals are without the calculations of integrals of Laplace and Fourier

It's offered the methods of determination of the operator and spectral representations for impulses and periodic oscillations that are described by different time functions, without calculating the Laplace and Fourier integrals.