УДК 519.217(045)

М. В. Приймак, д-р. техн. наук,
С. Ю. Прошин

ОЦІНЮВАННЯ МАТРИЦЬ ПЕРЕХОДІВ ПЕРІОДИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя

Із періодичного ланцюга Маркова виділено однорідні послідовності пар випадкових величин та показано, що для кожної з таких послідовностей імовірності переходів між випадковими величинами її пар задаються однією і тією ж матрицею переходів. Із використанням цих однорідних послідовностей вперше розроблено метод оцінювання матриць переходів періодичного ланцюга Маркова. Наголошено, що збіжність оцінок матриць до їх точних значень ґрунтується на законі великих чисел. Проведено імітаційне моделювання реалізації періодичного ланцюга, з використанням яких перевірено правильність методу оцінювання.

Ключові слова: періодичний ланцюг Маркова, матриця переходу, однорідність пар, оцінювання матриць, закон великих чисел.

Умовні позначення

$\{\xi_n\}$, $n = 0,1,\ldots$, – ланцюг Маркова;

$X = (1,2,\ldots,h,\ldots,i,\ldots)$ – множина станів ланцюга;

$p_{ij}(n)$ – умовна ймовірність переходу зі стану i в стан j;

$\Pi(n) = \|p_{ij}(n)\|$ – матриця ймовірностей переходів;

L – період періодичного ланцюга;

$\varphi = \{0,\ldots,k,\ldots,L-1\}$ – φ – множина фаз періодичного ланцюга;

$\{\Pi(0),\ldots,\Pi(k),\ldots,\Pi(L-1)\}$ – $\Pi_{(\varphi)}$ – множина матриць переходів періодичного ланцюга;

$n = k + sL$ – подання числа n з використанням значення періоду L та числа k із φ-множини;

$t_s^{(k)} = k + sL$ – позначення виразу $n = k + sL$, $k \in \varphi$-множині;

$\xi_s^{(k)}$ – скорочене позначення випадкової величини ξ_n, $n = k + sL$;

$\varphi^{(k)} = \{t_s^{(k)}\}$, $s = 0,1,\ldots$, – $\varphi^{(k)}$-ґратка з координатами (вузлами) $t_s^{(k)} = k + sL$;

$\{\xi_s^{(k)}\}$, $s = 0,1,\ldots$, – $\varphi^{(k)}$-ланцюг – вкладена відносно ланцюга Маркова послідовність випадкових величин, аргументами якої є вузли $\varphi^{(k)}$-ґратки;

$\hat{\xi}_s^{(k)} = (\xi_s^{(k)}, \xi_{s+1}^{(k)})$ – пара випадкових величин;

$\{\hat{\xi}_s^{(k)}\}$, $s = 0,1,\ldots$, – однорідна послідовність пар випадкових величин;

$\Pi_0^{(k)} = \Pi(k)$, $k \in \varphi$-множині, – матриця переходів для однорідної послідовності пар $\{\hat{\xi}_s^{(k)}\}$, $s = 0,1,\ldots$

Вступ. У працях [1; 2] був уведений новий клас випадкових послідовностей – клас періодичних ланцюгів Маркова. Періодичні ланцюги є моделями багатьох ритмічних (стохастично періодичних, коливних, циклічних) явищ, сигналів, систем, і тому становлять значний теоретичний інтерес та мають широке прикладне застосування. Натепер періодичні ланцюги вивчено ще порівняно мало, це ж стосується і методів їх статистичного аналізу. Перші кроки в цьому напрямі зроблено в праці [3], у якій розглянуто питання імітаційного моделювання періодичних ланцюгів. Важливою є робота [4], у якій виявлено елементи однорідності періодичних ланцюгів, зокрема з періодичного ланцюга виділено однорідні

послідовності пар випадкових величин, та виділено вкладені (відносно періодичного ланцюга) однорідні ланцюги. Це щось подібно тому, як періодичних випадкових послідовностей (процесів) стосуються елементи стаціонарності. І якщо елементи стаціонарності покладено в основу методів статистичного аналізу періодичних випадкових послідовностей, то виникають природні запитання: чи можливо та яким чином, ґрунтуючись на елементах однорідності періодичних ланцюгів, розробити методи їх статистичної обробки.

Мета роботи. Побудувати метод оцінювання матриць переходів періодичного ланцюга Маркова, перевірити цей метод та навести приклади оцінювання.

Спочатку згадаємо [1; 2; 4] деякі положення і поняття, пов'язані із ланцюгами Маркова та виділеними із них періодичними ланцюгами. Для цього розглянемо послідовність цілочислових випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 0,1,...$, кожна з яких може набувати значень із множини $X = (1,2,...,h,...,i,...)$, яку ще називають множиною станів або фазовим простором.

Послідовність цілочислових випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 0,1,...$, що набувають значень із фазового простору $X = (1,2,...,h,...,i,...)$, називається **ланцюгом Маркова**, якщо для всіх $n \geq 0$

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_0 = h,...,\xi_{n-1} = k, \xi_n = i\} = P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\} \overset{df}{=} p_{ij}(n),$$

тобто **умовна ймовірність** того, що випадкова величина ξ_{n+1} набуде значення j, залежить тільки від того, якого значення набула випадкова величина ξ_n і не залежить від попередніх значень $h,...,k$, яких набули випадкові величини $\xi_0,...,\xi_{n-1}$. Для $n = 0$ початковий розподіл імовірностей $P(\xi_0 = i) \overset{df}{=} p_i(0)$ вважається заданим, причому $\sum_{i \in X} p_i(0) = 1$.

Зауважимо, що замість терміна «умовна ймовірність» іноді використовують «умовна ймовірність переходу», «імовірність переходу», «перехідна ймовірність», якщо не виникає непорозумінь, – просто «ймовірність». Будемо дотримуватися термінів «імовірність переходу» та «перехідна ймовірність».

Перехідні ймовірності $p_{ij}(n)$ в сукупності утворюють матрицю переходів

$$\Pi(n) = \|p_{ij}(n)\|, \; i, j \in X, \; n = 0,1,... .$$

Із ланцюгів Маркова виділено два важливі класи – однорідні та періодичні ланцюги. Ланцюг $\{\xi_n\}$, $n = 0,1,...$, називається **однорідним,** якщо перехідні ймовірності $p_{ij}(n)$ не залежать від n, тобто $p_{ij}(n) = p_{ij}$, $i, j \in X$. Звідси видно, що однорідний ланцюг визначається лише однією матрицею переходів $\Pi = \|p_{ij}\|$.

Ланцюг Маркова $\{\xi_n\}$, $n = 0,1,...$, називається **періодичним** [1; 2], якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле $L > 1$, що

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(n + L), \; i, j \in X,$$

де i, j – стани, $i, j \in X$.

Очевидно, що для періодичного ланцюга Маркова його матриці переходів $\Pi(n) = |p_{ij}(n)|$ теж змінюються періодично з цим же періодом L:

$$\Pi(n) = \Pi(n + L), \; n = 0,1,... . \qquad (1)$$

З означення також випливає, що періодичний ланцюг визначається першими L матрицями переходів

$$\{\Pi(0),...,\Pi(k),...,\Pi(L-1)\}.$$

Важливо, що періодичні ланцюги Маркова мають певні властивості однорідності, які використаємо для оцінювання матриць переходів. Розглянемо ці властивості, посилаючись здебільшого на працю [4]. Для цього через φ позначимо множину чисел $0,...,k,...,L-1$, де L – період ланцюга:

$$\varphi = \{0,...,k,...,L-1\}, \tag{2}$$

і називатимемо її φ-**множиною фаз**, окремі числа k цієї множини – фазами. Відповідно до виразу (2) множину матриць

$$\{\Pi(0),...,\Pi(k),...,\Pi(L-1)\} \tag{3}$$

назвемо множиною **фазових** матриць, а матриці $\Pi(k), k \in \varphi$-множині – **фазовими** матрицями.

Оскільки будь-яке число $n \geq 0$ можна подати у вигляді $n = k + sL$, де $k = n(\mathrm{mod}\, L)$ – залишок від ділення числа n на L, $s = [n/L]$ – ціла частина числа, то суму $k + sL$ позначимо через $t_s^{(k)}$:

$$k + sL \overset{df}{=} t_s^{(k)}, \tag{4}$$

де, очевидно, $k \in \varphi$-множині фаз. Якщо у виразі $t_s^{(k)}$, де k – одне із чисел φ-множини, індекс s вважати змінним, $s = 0,1,...$, то сукупність чисел $t_s^{(k)}$ утворює послідовність

$$\left\{t_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,... .$$

Значення елементів цієї послідовності у свою чергу утворюють гратку з кроком L, яку будемо називати $\varphi^{(k)}$-**граткою**.

Виокремимо з періодичного ланцюга випадкові величини, аргументи яких збігаються з вузлами $\varphi^{(k)}$-ґратки, та подібно до рівняння (4) позначимо їх через $\xi_s^{(k)}$, тобто для $n = k + sL = t_s^{(k)}$ випадкова величина

$$\xi_n = \xi_{k+sL} \overset{df}{=} \xi_s^{(k)}. \tag{5}$$

У сукупності ці випадкові величини утворюють послідовність

$$\left\{\xi_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,... ,$$

яку назвемо $\varphi^{(k)}$-**послідовністю**. Очевидно, таких $\varphi^{(k)}$-послідовностей нараховується L – для кожного $k = 0,1,...,L-1$ із φ-множини фаз.

Аналогічно до виразів (4) та (5) позначимо матриці переходів:

$$\Pi(k + sL) = \Pi\left(t_s^{(k)}\right) \overset{df}{=} \Pi_s^{(k)}, s = 0,1,.... \tag{6}$$

Послідовність матриць переходів

$$\left\{\Pi_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,..., \tag{7}$$

назвемо $\Pi_s^{(k)}$-**послідовністю**. Таких $\Pi_s^{(k)}$-послідовностей теж нараховується L – для кожного $k \in \varphi$-множині фаз.

Ураховуючи рівняння (1) та позначення (6), очевидно, дістаємо

$$\Pi_s^{(k)} = \Pi_0^{(k)}, s = 1,2,... . \tag{8}$$

Для $s = 0$ матриці

$$\Pi_0^{(k)} = \Pi(k),\ k = 0,1,...,L-1, \tag{9}$$

тобто перші матриці кожної із послідовностей (7) є фазовими матрицями, а замість виразу (3) множину фазових матриць можна записати у вигляді

$$\left\{\Pi_0^{(0)},...,\Pi_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}\right\}. \tag{10}$$

Утворимо із сусідніх випадкових величин $\xi_s^{(k)} = \xi_{k+sL}$ і $\xi_s^{(k+1)} = \xi_{k+sL+1}$ пару випадкових величин $\left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$ і позначимо їх через $\hat{\xi}_s^{(k)}$:

$$\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right),\ s = 0,1,...,$$

або в розгорнутому вигляді

$$\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_{k+sL}, \xi_{k+sL+1}\right),\ s = 0,1,... .$$

Легко бачити, що для кожної з пар $\hat{\xi}_s^{(k)}$, $s = 0,1,...$, імовірності переходів від випадкової величини $\xi_s^{(k)}$ до величини $\xi_s^{(k+1)}$ задаються матрицями переходів $\Pi_s^{(k)}$. З урахуванням також виразу (8) видно, що ймовірності переходів між випадковими величинами кожної з пар $\hat{\xi}_s^{(k)}$, $s = 0,1,...$, задаються однією й тією ж матрицею $\Pi_0^{(k)}$. Це є підставою для того, щоб виділену із періодичного ланцюга Маркова $\{\xi_n\}$, $n = 0,1,...$, послідовність пар випадкових величин

$$\left\{\hat{\xi}_s^{(k)}\right\},\ s = 0,1,..., \tag{11}$$

називати **однорідною k-послідовністю пар**, $k = 0,1,...,L-1$.

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді леми.

Лема. Для виділеної із періодичного ланцюга Маркова однорідної k-послідовності пар $\left\{\hat{\xi}_s^{(k)}\right\}$, $s = 0,1,...$, $k \in \varphi$-множині фаз, переходи між випадковими величинами кожної з пар $\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$, $s = 0,1,...$, визначаються однією і тією ж фазовою матрицею переходів $\Pi_0^{(k)}$.

Результат цієї леми використаємо для розроблення методу оцінювання матриць переходів періодичного ланцюга Маркова. При цьому надалі вважатимемо, що множина станів ланцюга є скінченною, тобто $X = (1,...,i,...,m)$, а порядок матриці переходів відповідно дорівнює m.

Метод оцінювання матриць переходів періодичного ланцюга Маркова. Перейдемо до оцінювання фазової матриці переходів

$$\Pi_0^{(k)} = \begin{vmatrix} p_{11}(k) & ... & p_{1m}(k) \\ ... & ... & ... \\ ... & p_{ij}(k) & ... \\ ... & ... & ... \\ p_{m1}(k) & ... & p_{mm}(k) \end{vmatrix},\ k = 0,1,...,L-1,$$

$k \in \varphi$-множині фаз. Нехай

$$\{x_n\},\ n = 0,1,...,N,$$

реалізація періодичного ланцюга, причому її обсяг $N >> m$, тобто набагато більший m. Із цієї реалізації виділимо k-послідовність пар

$$\left\{\hat{x}_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,...,z, z = \left[N/L\right], \tag{12}$$

яка, очевидно, є реалізацією k-послідовності пар (11). Оскільки кожна пара $\hat{x}_s^{(k)} = \left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right)$, то послідовність (12) запишемо в більш зручному вигляді

$$\left\{\left(x_0^{(k)}, x_0^{(k+1)}\right),...,\left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right),...,\left(x_{z0}^{(k)}, x_z^{(k+1)}\right)\right\}. \tag{13}$$

Щоб оцінити елемент $p_{ij}(k), i, j = 1,2,...,m$, матриці $\Pi_0^{(k)}, k = 0,1,...,L-1$, в підпослідовності (13) серед перших елементів $x_s^{(k)}$ кожної з пар $\hat{x}_s^{(k)} = \left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right), s = 0,1,...,z$, виявимо ті елементи, значення яких дорівнюють i. Кількість таких елементів позначимо через $N_i(k)$. Після цього серед тих пар $\hat{x}_s^{(k)} = \left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right)$, у яких їх перші елементи i, виявимо ті пари, в яких їх другі елементи $x_s^{(k+1)}$ набувають величини j. Кількість таких елементів позначимо через $N_{ij}(k)$. Тепер за оцінку перехідної ймовірності $p_{ij}(k)$ будемо вважати відношення (статистику)

$$\tilde{p}_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(k)}{N_i(k)}, i, j = 1,2,...,m. \tag{14}$$

У сукупності елементи $\tilde{p}_{ij}(k)$ утворюють матрицю $\tilde{\Pi}_0^{(k)}$, яка і є оцінкою матриці $\Pi_0^{(k)}$. Виконавши такі самі обчислення для всіх $k = 0,1,...,L-1$ із φ-множини фаз, знаходимо матриці $\tilde{\Pi}_0^{(0)},...,\tilde{\Pi}_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}$, що є оцінками фазових матриць переходів $\Pi_0^{(0)},...,\Pi_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}$.

Ураховуючи використані в цій роботі позначення, зокрема (9), видно, що розглянутий метод дає змогу отримати матриці $\tilde{\Pi}(0),...,\tilde{\Pi}(k),...,\tilde{\Pi}(L-1)$, які є оцінками фазових матриць переходів $\Pi(0),...,\Pi(k),...,\Pi(L-1)$.

Якщо звернутися до схеми Бернуллі, то очевидно, що статистика (14) як оцінка для перехідних ймовірностей $p_{ij}(k)$ має чітку частотну інтерпретацію, яка в розглядуваному випадку полягає в такому. Будемо вважати, що $N_i(k)$ – кількість випробувань, $N_{ij}(k)$ – кількість «успіхів» у $N_i(k)$ випробуваннях. За цих умов відношення $\tilde{p}_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(k)}{N_i(k)}$ є частотою успіхів. Згідно із законом великих чисел частота (оцінка) $\tilde{p}_{ij}(k)$ збігається за ймовірністю з перехідною імовірністю $p_{ij}(k)$, тобто

$$\lim_{N_i(k)\to\infty} P\left\{\left|\tilde{p}_{ij} - p_{ij}\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Можна показати, що математичне сподівання $M\tilde{p}_{ij} = p_{ij}$. Узявши до уваги останню рівність, сформулюємо остаточний результат.

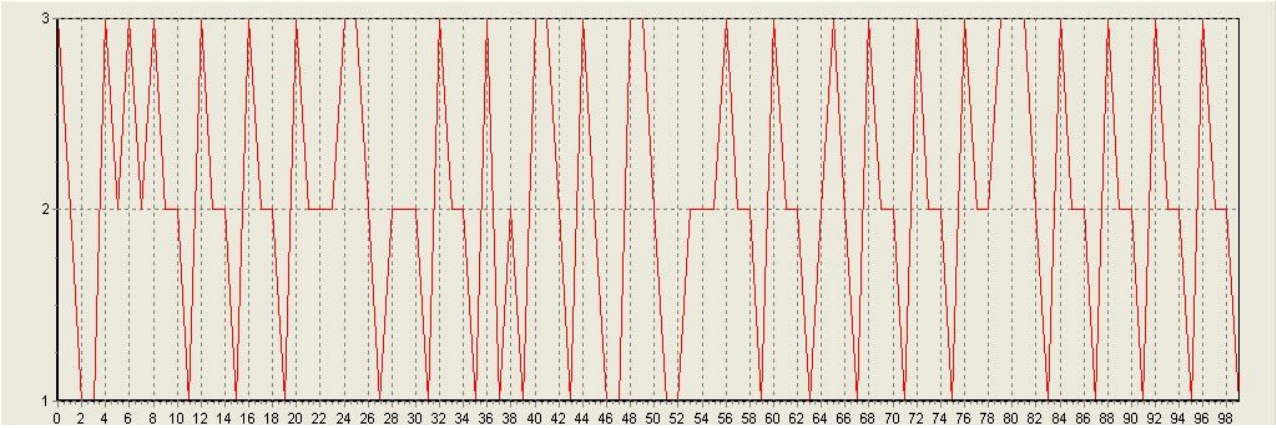
Теорема. Статистики $\tilde{p}_{ij}(k), i, j = 1,2,...,m,\ k = 0,1,...,L-1$, є незміщеними та слушними оцінками ймовірностей переходів $p_{ij}(k), i, j = 1,2,...,m,\ k = 0,1,...,L-1$, і в сукупності утворюють матриці $\tilde{\Pi}(0),...,\tilde{\Pi}(k),...,\tilde{\Pi}(L-1)$, що є оцінками матриць переходів $\Pi(0),...,\Pi(k),...,\Pi(L-1)$ періодичного ланцюга Маркова.

Наведемо приклади оцінок матриць переходів періодичного ланцюга Маркова $\{\xi_n, n=0,1,2,...\}$ із множиною станів $X=(1,2,3)$, періодом $L=4$ та матрицями переходів $\Pi(0),\Pi(1),\Pi(2)$ і $\Pi(3)$:

$$\Pi(0)=\begin{vmatrix}0{,}0500 & 0{,}0500 & 0{,}9000\\ 0{,}0500 & 0{,}0500 & 0{,}9000\\ 0{,}0500 & 0{,}0500 & 0{,}9000\end{vmatrix} \qquad \Pi(1)=\begin{vmatrix}0{,}0500 & 0{,}9000 & 0{,}0500\\ 0{,}0500 & 0{,}9000 & 0{,}0500\\ 0{,}0500 & 0{,}9000 & 0{,}0500\end{vmatrix}$$

$$\Pi(2)=\begin{vmatrix}0{,}0500 & 0{,}9000 & 0{,}0500\\ 0{,}0500 & 0{,}9000 & 0{,}0500\\ 0{,}0500 & 0{,}9000 & 0{,}0500\end{vmatrix} \qquad \Pi(3)=\begin{vmatrix}0{,}9000 & 0{,}0500 & 0{,}0500\\ 0{,}9000 & 0{,}0500 & 0{,}0500\\ 0{,}9000 & 0{,}0500 & 0{,}0500\end{vmatrix}$$

Для оцінювання матриць переходів використаємо реалізацію ланцюга $x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N$, отриману шляхом імітаційного моделювання [3]. Перші сто значень цієї реалізації показано на рисунку.



Перші сто значень реалізації періодичного ланцюга Маркова, отриманої імітаційним моделюванням

Спочатку було оцінено матриці переходів з використанням перших $n=5000$ значень реалізації. Результати оцінювання такі:

$$\widetilde{\Pi}(0)=\begin{vmatrix}0{,}0448 & 0{,}0385 & 0{,}9167\\ 0{,}0667 & 0{,}0267 & 0{,}9067\\ 0{,}0690 & 0{,}0862 & 0{,}8448\end{vmatrix} \qquad \widetilde{\Pi}(1)=\begin{vmatrix}0{,}0678 & 0{,}9153 & 0{,}0169\\ 0{,}0800 & 0{,}8800 & 0{,}0400\\ 0{,}0473 & 0{,}9062 & 0{,}0465\end{vmatrix}$$

$$\widetilde{\Pi}(2)=\begin{vmatrix}0{,}0645 & 0{,}9194 & 0{,}0161\\ 0{,}0424 & 0{,}9125 & 0{,}0451\\ 0{,}0536 & 0{,}9464 & 0{,}0000\end{vmatrix} \qquad \widetilde{\Pi}(3)=\begin{vmatrix}0{,}8727 & 0{,}0909 & 0{,}0364\\ 0{,}8915 & 0{,}0604 & 0{,}0481\\ 0{,}9615 & 0{,}0192 & 0{,}0192\end{vmatrix}$$

Аналогічні оцінки матриць переходів були знайдені з використанням реалізацій обсягом $n = 10000$, $n = 50000$ та $n = 100000$ відліків. Для кожного з цих випадків наведемо лише результати обчислень.

Якщо обсяг $n = 10000$, оцінки матриць переходів будуть такими:

$$\tilde{\Pi}(0) = \begin{vmatrix} 0{,}0536 & 0{,}0527 & 0{,}8936 \\ 0{,}0301 & 0{,}0752 & 0{,}8947 \\ 0{,}0450 & 0{,}0811 & 0{,}8739 \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Pi}(1) = \begin{vmatrix} 0{,}0462 & 0{,}8769 & 0{,}0769 \\ 0.0942 & 0.8551 & 0{,}0507 \\ 0{,}0529 & 0{,}9028 & 0{,}0444 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}(2) = \begin{vmatrix} 0{,}0292 & 0.9197 & 0{,}0511 \\ 0{,}0521 & 0{,}9016 & 0{,}0463 \\ 0{,}0345 & 0{,}9483 & 0{,}0172 \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Pi}(3) = \begin{vmatrix} 0{,}9200 & 0{,}0400 & 0{,}0400 \\ 0{,}8983 & 0{,}0553 & 0{,}0464 \\ 0{,}9646 & 0{,}0265 & 0{,}0088 \end{vmatrix}$$

Якщо $n = 50000$, матимемо такі оцінки матриць переходів:

$$\tilde{\Pi}(0) = \begin{vmatrix} 0{,}0512 & 0{,}0518 & 0{,}8970 \\ 0{,}0412 & 0{,}0488 & 0{,}9101 \\ 0{,}0510 & 0{,}0557 & 0{,}8933 \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Pi}(1) = \begin{vmatrix} 0{,}0442 & 0{,}9131 & 0{,}0427 \\ 0{,}0617 & 0{,}8935 & 0{,}0448 \\ 0{,}0502 & 0{,}9006 & 0{,}0492 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}(2) = \begin{vmatrix} 0{,}0555 & 0{,}8906 & 0{,}0539 \\ 0{,}0508 & 0{,}8973 & 0{,}0519 \\ 0{,}0543 & 0{,}8964 & 0{,}0493 \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Pi}(3) = \begin{vmatrix} 0{,}8891 & 0{,}0500 & 0{,}0609 \\ 0{,}8970 & 0{,}0527 & 0{,}0503 \\ 0{,}9106 & 0{,}0508 & 0{,}0385 \end{vmatrix}$$

Насамкінець, за обсягу вибірки $n = 100000$ оцінки матриць переходів становлять:

$$\tilde{\Pi}(0) = \begin{vmatrix} 0{,}0492 & 0{,}0473 & 0{,}9035 \\ 0{,}0597 & 0{,}0573 & 0{,}8830 \\ 0{,}0447 & 0{,}0583 & 0{,}8970 \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Pi}(1) = \begin{vmatrix} 0{,}0460 & 0{,}9039 & 0{,}0501 \\ 0{,}0471 & 0{,}9098 & 0{,}0430 \\ 0{,}0488 & 0{,}9008 & 0{,}0504 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}(2) = \begin{vmatrix} 0{,}0477 & 0{,}9078 & 0{,}0444 \\ 0{,}0499 & 0{,}9002 & 0{,}0499 \\ 0{,}0472 & 0{,}9009 & 0{,}0520 \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Pi}(3) = \begin{vmatrix} 0{,}8872 & 0{,}0483 & 0{,}0645 \\ 0{,}8993 & 0{,}0486 & 0{,}0521 \\ 0{,}8914 & 0{,}0547 & 0{,}0539 \end{vmatrix}$$

Із порівняння значень перехідних імовірностей матриць переходів з їх оцінками видно, що зі збільшенням обсягу вибірки оцінки перехідних ймовірностей кожної з матриць переходів наближаються до їх точних значень. Цей результат підтверджується і сформульованою вище теоремою, згідно з якою оцінки перехідних імовірностей матриць переходів періодичного ланцюга Маркова є незміщеними і слушними. Питання отримання числового значення точності оцінок матриць переходів з використанням поняття норми матриці буде розглянуто в одній із наступних робіт.

Висновки. Ґрунтуючись на понятті однорідної послідовності пар випадкових величин, виділеної із періодичного ланцюга Маркова, розроблено метод оцінювання його матриць переходів з використанням для цього лише однієї реалізації ланцюга. Показано, що оцінки ймовірностей переходів як елементи відповідних матриць переходів є незміщеними і слушними. Отриманий результат, крім теоретичного значення, має і виняткове прикладне застосування, оскільки дозволяє знаходити оцінки матриць переходів реальних ритмічних сигналів, характерною особливістю яких є марковість, і модель яких обґрунтована у вигляді періодичного ланцюга Маркова.

Список літератури

1. *Приймак М. В.* Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: автореф. дис…д-ра техн. наук: 05.13.06 / К., НАУ, 2001. – 34 с.
2. *Приймак М. В.* Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3 – 7.
3. *Приймак М. В.* Імітаційне моделювання періодичних ланцюгів Маркова / М. В. Приймак, С. А. Лупенко, Л. М. Щербак // Вимірювальна техніка та метрологія. – Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львівська політехніка». – 2002. – №60. – С. 7 – 10.
4. *Приймак М. В.* Елементи однорідності для періодичних ланцюгів Маркова / М. В. Приймак, С. В. Прошин // Вісн. Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2009. – Т.8. № 2. – С. 17 – 21.

Н. В. Приймак, С. Ю. Прошин

Оценка матриц переходов периодических цепей Маркова

Из периодической цепочки Маркова выделены однородные последовательности пар случайных величин и показано, что для кождой из таких последовательностей вероятности переходов между случайными величинами ее пар задаются одной и той же матрицей переходов. С использованием указанных однородных последовательностей впервые разработан метод оценивания матриц переходов периодической цепочки Маркова. Указано, что совпадение оценок матриц до их точных значений обосновывается законом больших чисел. Проведено имитационное моделерование реализации периодической цепочки с использованием которой, проверено правильность метода оценивания.

M. V. Pryjmak, S. Ju. Proshyn

Estimation of matrices of transitions of periodic markov's chains

The homogeneous sequences of pair of casual sizes are abstracted from the periodic Markov's chain and it is demonstrated that for each of such sequences of probability of transitions between the random variables of its pairs assigned by one the same matrix of transitions. By using the homogeneous sequences described above, the method of estimation of matrices of transitions of periodic Markov's chain is developed for the first time. It is significant that convergence of estimations of matrices to their precise meanings is based on the Law of Large Numbers. The simulation of realization of periodic chain was carried out, and by using of which, the accuracy of estimation method was verified.