ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

УДК 621.391:517.55(045)

И. Ф. Бойко д-р техн. наук, проф.,
В. В. Турчак канд. техн. наук

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ И ПРОБЛЕМА МНОГОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua

Рассмотрены задачи приближения функциональных зависимостей по значениям дискретных отсчетов, полученных в результате измерений. Особое внимание уделено аппроксимации с помощью сплайн-функций двух независимых переменных. Приведены алгоритм и пример такой аппроксимации.

Ключевые слова: функции многих переменных, сплайн функции, аппроксимация.

Введение и постановка задачи. Принцип приближенного представления функциональных зависимостей неизвестного или сложного вида иными, как правило, более простыми и удобными функциями с определенной точностью лежит в основе многих методов обработки данных. Классическим аппаратом решения таких задач является теория полиномиальных и дробно-рациональных приближений, развитая в работах К. Вейерштрасса, П. Л. Чебышева, С. Н. Бернштейна и др. В качестве приближающих функций при этом используют удобные в расчетах зависимости – степенные и гармонические полиномы, реже – экспоненциальные и логарифмические функции.

На практике приближаемая функция чаще всего представлена конечным числом отсчетов и вид ее неизвестен. Будем полагать, что отсчеты являются точными или содержат пренебрежимо малые погрешности.

Простейшим видом аппроксимации является интерполяция. В этом случае по дискретному набору значений $y_i = f(t_i)$, $i = \overline{1,n}$ ($f(t)\in C$) интерполируемой функции восстанавливается ее исходный вид с определенной точностью, причем в точках t_i, называемых узлами интерполяционной сетки, значения приближаемой и приближающей функций должны совпадать, т. е. должно выполняться условие: $y_i = f(t_i) = \varphi(t_i)$, где $\varphi(t)$ – аппроксимирующая зависимость.

Чаще всего при решении интерполяционных задач в качестве приближающей зависимости используют полином Лагранжа

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} P_{nj}(t) f_j,$$

где $P_{nj}(t) = \dfrac{(t-t_0)\ldots(t-t_{j-1})(t-t_{j+1})\ldots(t-t_n)}{(t_j-t_0)\ldots(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1})\ldots(t_j-t_n)}$, $j = \overline{0,n}$,

или другую его форму записи – полином Ньютона

$$H_n(t) = f(t_0) + (t-t_0)f(t_0; t_1) + (t-t_0)(t-t_1)f(t_0; t_1; t_2) + \ldots + (t-t_0)\times$$
$$\times(t-t_1)\ldots(t-t_{n-1})f(t_0; t_1; \ldots; t_n),$$

где $f(t_0; t_1; \ldots; t_n) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{f(t_i)}{(t_i-t_0)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)}$ – разделенная разность n-го порядка.

Часто используют многочлены Чебышева $T_n(t) = \cos(n\arccos t)$, $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, $T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)$, интерполяция которыми на интервале $[a, b]$ при определенном выборе узлов будет оптимальной в смысле

$$\min_{t\in[a,b]} \max |f(t) - \varphi(t)|,$$

где минимум ищется на множестве функций $\varphi(t)$.

В более общем случае для аппроксимации используют систему линейно независимых функций

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n} a_k \Phi_k(t) + e(t),$$

где a_k – некоторые параметры, подбираемые таким образом, чтобы получить качественное приближение; $\Phi_k(t)$ – линейно независимые базисные функции; $e(t)$ – погрешность приближения.

Важную роль при выборе приближающих функций играет условие полноты, заключающееся в том, что при стремлении r к бесконечности погрешность аппроксимации стремится к нулю, т. е. $y(t)$ приближается сколь угодно точно. Если это условие выполняется, то говорят, что аппроксимационный процесс сходится. Скорость сходимости этого процесса зависит как от вида аппроксимируемой функции, так и от вида аппроксимирующей зависимости. Погрешность аппроксимации при этом, в зависимости от выбранной в данном функциональном пространстве метрики, определяется как расстояние между приближающим многочленом и аппроксимируемой функцией.

Обычно в качестве нормы погрешности используют

$$\left\| y(t) - \varphi(t) \right\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} \left| y(t) - \varphi(t) \right|$$

и говорят о задачах равномерного (чебышевского) приближения или

$$\left\| y(t) - \varphi(t) \right\|_{L2} = \sqrt{\int_a^b \left(y(t) - \varphi(t) \right)^2 dt}$$

и о задачах среднеквадратического приближения.

Многомерная аппроксимация. Особое место в задачах приближения занимает проблема многомерной аппроксимации. По сравнению с одномерным случаем задача приближения функций двух и большего числа переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Во-первых, область, на которой осуществляется приближение, может иметь весьма сложную структуру. Во-вторых, трудности возникают при описании дифференциально-разностных свойств функций многих переменных, ибо эти свойства могут быть различными по разным координатам. И, наконец, значительно увеличивается объем вычислений. В случае приближения функции двух переменных (случай большего числа переменных ничем принципиально от него не отличается) в качестве аппроксимирующих зависимостей обычно используют многочлены вида [2]

$$P_n(t,s) = \sum_{k+1=0}^{n} c_{k1} t^k s^1 ,$$

где c_{k1} – коэффициенты, а t^k, s^1, $k+1 = \overline{0,n}$ – базисные функции.

Наряду с такими многочленами рассматриваются многочлены степени n по каждой из переменных. При этом можно использовать базисы как из функций $t^k s^1$, $k,1 = \overline{0,n}$

$$P_n(t,s) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_{k1} t^k s^1 ,$$

так и из функций $\Phi_k(t)\Phi_1(s)$, $k,1 = \overline{0,n}$

$$P_n(t,s) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_{k1} \Phi_k(t) \Phi_1(s),$$

где $\Phi_k(t) = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}$ и $\Phi_1(s) = \prod_{j=0,\, j\neq 1}^{n} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j}$,

причем так как

$$\Phi_k(t),\ \Phi_1(s) = \begin{cases} 1, & k,1 = j; \\ 0, & k,1 \neq j, \end{cases}$$

то $c_{k1} = P_n(t_k, s_1)$, $k,1 = \overline{0,n}$.

Аналогично одномерному случаю здесь также рассматриваются задачи равномерного

$$\left\| y(t,s) - \varphi(t,s) \right\| = \max_{(t,s)\in\Omega} \left| y(t,s) - \varphi(t,s) \right|$$

и среднеквадратического

$$\left\| y(t,s) - \varphi(t,s) \right\| = \sqrt{\iint_{\Omega} \left(y(t,s) - \varphi(t,s) \right)^2 dtds}$$

приближений, однако свойства решения одномерных задач сюда не переносятся. Так, например, решение задачи аппроксимации существует не при всяком расположении узлов [2].

Основной сложностью при решении задач приближения является подбор достаточно простых функций, хорошо приближающих искомую зависимость. Широко используемые на практике для этих целей степенные полиномы, наряду с несомненными достоинствами - простотой и хорошо развитой теорией приближения, имеют ряд существенных недостатков. Это, в частности, быстрый рост степени полинома (и соответственно увеличение вычислительных затрат) при описании зависимостей сложного вида, а также отсутствие в большинстве случаев какой-либо разумной физической интерпретации полученных приближений. Одним из самых серьезных недостатков полиномиальных приближений является тот факт, что последовательность интерполяционных полиномов не всегда сходится к интерполируемой функции. Известны достаточно простые функции, для которых условие сходимости не выполняется (в частности, пример Рунге) [1].

Аппроксимация сплайн-функциями. При переходе к задачам приближения функций двух и более переменных для многочленов возникает проблема существования и единственности решения [1] и, кроме того, аппроксимация становится настолько громоздкой, что практически используется лишь для многочленов невысоких степеней [2].

В связи с этим повышенный интерес вызывают другие классы аппроксимирующих зависимостей, в частности класс полиномиальных сплайн-функций [1 – 4]. В последние годы сплайны, благодаря их универсальности, находят все более широкое применение в различных областях науки и техники. Чаще всего они используются в задачах приближения – для описания зависимостей сложного вида. Теория приближения сплайнами в детерминированной постановке подробно рассмотрена в работах Алберга, Бора, Завьялова, Корнейчука и др. Однако подход, используемый в этих работах, правомерен, когда имеющиеся в нашем распоряжении значения исследуемой зависимости являются точными. На практике же приходится сталкиваться с реальными процессами, находящимися под воздействием различного рода мешающих факторов, имеющих вероятностную природу, вследствие чего значения результатов наблюдений уже не будут точными, а будут содержать некоторую случайную погрешность. Поэтому актуальной представляется проблема приближения функциональных зависимостей сплайнами в стохастической постановке. Для одномерного случая эта проблема решалась в работе [3].

Полиномиальные сплайны представляют собой кусочно-многочленные конструкции, использующие на отдельных участках многочлены невысоких степеней. Среди их достоинств – свойства сходимости и алгоритмичности, способность управления гладкостью приближения, небольшой объем требуемых вычислений [1]. В ряде случаев сплайны

обладают наилучшими аппроксимативными свойствами, обеспечивая минимально возможную при данной размерности погрешность.

Особо следует отметить тот факт, что сплайны в отличие от многочленов позволяют эффективно решать задачи многомерной аппроксимации, сохраняя при этом свойства сходимости и алгоритмичности, а в ряде случаев и экстремальные свойства [1].

В настоящей работе рассмотрен двумерный случай, т. е. случай приближения сплайнами функции двух переменных. Одной из сложностей, возникающей при этом, является проблема разбиения приближаемой области на элементарные участки. Здесь, в отличие от одномерного случая, возможен произвольный выбор не только размеров этих участков, но и их формы. Например, это могут быть треугольники, четырехугольники и т. п. От вида элементарных участков зависит качество приближения и вычислительные затраты. Будем использовать прямоугольную сетку разбиения, что даст возможность представлять двумерные сплайны через тензорное произведение одномерных, сохраняя при этом присущие последним свойства сходимости и алгоритмичности [4].

Пусть в результате измерений на участке наблюдения $\Omega = [a, b]\times[c, d]$ получено множество отсчетов $Z = \{z_i\}_{i=1}^{n}$ некоторой эмпирической зависимости $z(x, y) = f(x, y) + \xi(x, y)$, где $f(x, y)$ – истинная искомая функция, а $\xi(x, y)$ – нормально распределенная некоррелированная погрешность. Опишем $f(x, y)$ сплайном $S(\Phi(x, y), A)$, где $\Phi(x, y)$ – вектор с элементами, являющимися функциями независимых переменных $x\in[a, b]$ и $y\in[c, d]$; $A = \{a_k\}_{k=1}^{K}$ $(K = r \times m)$ – вектор неизвестных числовых параметров, входящих линейно в $F(\Phi(x, y), A)$ и являющихся значениями сплайна в узлах сетки $\Delta = \Delta_x\times\Delta_y$ ($\Delta_x = \{xu_{jx}\}_{jx=1}^{r}$, $\Delta_y = \{yu_{jy}\}_{jy=1}^{m}$), разбивающей область Ω на прямоугольные ячейки Ω_{ij}, ($i = \{1, 2,..., r\text{-}1\}$, $j = \{1, 2,..., m\text{-}1\}$), где r и m – количество узлов по осям OX и OY, соответственно.

Поскольку исходная зависимость искажена случайной помехой, для оценивания параметров сплайна будем использовать один из методов статистического оценивания – метод наименьших квадратов (МНК), который дает независимо от закона распределения несмещенные и эффективные (в классе линейных несмещенных) оценки. В случае аддитивной нормально распределенной некоррелированной погрешности этот метод совпадает с методом максимального правдоподобия.

Представим двумерный сплайн через тензорное произведение одномерных, тогда значение двумерного сплайна в произвольной точке (t, l) равно:

$$S(t, l) = S(t)\otimes S(l), \tag{1}$$

где $S(t)$ и $S(l)$ – одномерные эрмитовы сплайны.

Если представить $S(t)$ и $S(l)$ в лагранжевой форме записи [2] выражение (1) примет следующий вид:

$$S(t,l) = S(t)\otimes S(l) = \sum_{jx=1}^{r} A_{jx}L_{jx}(t)\otimes\sum_{jy=1}^{m} A_{jy}L_{jy}(l),$$

где $\{A_{jx}\}_{jx=1}^{r}$ и $\{A_{jy}\}_{jy=1}^{m}$ – вектора значений сплайна в узловых точках, соответственно по оси OX и OY, а $L_j(\cdot)$ – локальные функции формы [3].

Сплайны $S(t)$ и $S(l)$ могут быть линейными, кубическими, их комбинацией и другими. Способ построения их аналогичен, поэтому рассмотрим наиболее общий и наиболее сложный (из указанных выше) вариант – произведение кубических сплайнов. В этом случае

$$S_3(t, l) = S_3(t)\otimes S_3(l) = (a_{jx\text{-}2}{}^{1}L(t) + a_{jx\text{-}1}{}^{2}L(t) + a_{jx}{}^{3}L(t) + a_{jx+1}{}^{4}L(t))\otimes(a_{jy\text{-}2}{}^{1}L(l) + a_{jy\text{-}1}{}^{2}L(l) + a_{jy}{}^{3}L(l) +$$
$$+ a_{jy+1}{}^{4}L(l)) = a_{jx\text{-}2,\,jy\text{-}2}{}^{1}W(t, l) + a_{jx\text{-}2,\,jy\text{-}1}{}^{2}W(t, l) + a_{jx\text{-}2,\,jy}{}^{3}W(t, l) + a_{jx\text{-}2,\,jy+1}{}^{4}W(t, l) + a_{jx\text{-}1,\,jy\text{-}2}{}^{5}W(t, l) +$$
$$+ a_{jx\text{-}1,\,jy\text{-}1}{}^{6}W(t, l) + a_{jx\text{-}1,\,jy}{}^{7}W(t, l) + a_{jx\text{-}1,\,jy+1}{}^{8}W(t, l) + a_{jx,\,jy\text{-}2}{}^{9}W(t, l) + a_{jx,\,jy\text{-}1}{}^{10}W(t, l) + a_{jx,\,jy}{}^{11}W(t, l) +$$
$$+ a_{jx,\,jy+1}{}^{12}W(t, l) + a_{jx+1,\,jy\text{-}2}{}^{13}W(t, l) + a_{jx+1,\,jy\text{-}1}{}^{14}W(t, l) + a_{jx+1,\,jy}{}^{15}W(t, l) + a_{jx+1,\,jy+1}{}^{16}W(t, l),$$

где $a_{i,j} = a_i a_j$, $i = \{jx\text{-}2, ..., jx\text{+}1\}$, $j = \{jy\text{-}2, ..., jy\text{+}1\}$, $jx = \{3,..., r\text{-}1\}$, $jy = \{3,..., m\text{-}1\}$,

$$^1W(t, l) = {}^1L(t)^1L(l),\ ^2W(t, l) = {}^1L(t)^2L(l),\ ^3W(t,l) = {}^1L(t)^3L(l),\ ^4W(t, l) = {}^1L(t)^4L(l),$$
$$^5W(t, l) = {}^2L(t)^1L(l),\ ^6W(t, l) = {}^2L(t)^2L(l),\ ^7W(t, l) = {}^2L(t)^3L(l),\ ^8W(t, l) = {}^2L(t)^4L(l),$$
$$^9W(t, l) = {}^3L(t)^1L(l),\ ^{10}W(t, l) = {}^3L(t)^2L(l),\ ^{11}W(t, l) = {}^3L(t)^3L(l),\ ^{12}W(t, l) = {}^3L(t)^4L(l),$$
$$^{13}W(t, l) = {}^4L(t)^1L(l),\ ^{14}W(t, l) = {}^4L(t)^2L(l),\ ^{15}W(t, l) = {}^4L(t)^3L(l),\ ^{16}W(t, l) = {}^4L(t)^4L(l).$$

Таким образом, значение сплайна в произвольной точке (t, l) полностью определяется по шестнадцати узловым точкам (т. е. сплайн является локальным).

Запишем теперь выражение для рассмотренного двумерного сплайна в матричной форме

$$S = WA,$$

тогда минимизируемое по МНК выражение запишется в виде

$$(Z - WA)' (Z - WA),$$

а его решение относительно A

$$A = (W'W)^{-1} W'Z = C^{-1}B,$$

где $S = |s_1, s_2, ..., s_n|'$ – вектор значений сплайна в искомых точках; (' – знак транспонирования); $Z = |z_1, z_2, ..., z_n|'$– вектор исходных значений исследуемой зависимости; $A = |A_1, A_2, ..., A_r|'$– вектор неизвестных числовых параметров, являющихся значениями сплайна в узловых точках, причем $A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm}\}$; W – матрица планирования, имеющая размерность $(r - 1) \times r$. Матрица W – ленточная и состоит из блоков, вид ее приведен в работе [5].

Процедуру построения сплайна по МНК кратко можно представить в виде следующего алгоритма:

Алгоритм 1:

1. Ввод массива значений x, y, z.
2. Выбор сетки узлов сплайна xu и yu.
3. Вычисление элементов матрицы планирования ${}^jW_i$, $i = \overline{1,n}$.
4. Формирование матрицы планирования W с учетом краевых условий.
5. Вычисление матрицы C: $C = W'*W$.
6. Вычисление вектора B: $B = W'*Z$.
7. Обращение матрицы C: $COB = C^{-1}$.
8. Вычисление вектора значений сплайна в узловых точках:
$$A = COB*B$$
9. Вычисление значений сплайна в искомых точках
$$S = W*A.$$
10. Построение доверительных интервалов I_a и I_s:

$I_a = A \pm g*\text{sqrt}(Da)$, где g – коэффициент Стьюдента; $Da = \text{diag}(COV(A)) = \text{Dz}*\text{diag}(\text{COB})$ – оценка дисперсии параметров сплайна ($Dz = \text{sum}(Z - S)^2/(n\text{-}rm\text{-}1)$);

$I_s = S \pm \text{g}*\text{sqrt}(Ds)$, где $Ds = \text{diag}(COV(S)) = \text{diag}(W*COV(A)*W')$ – оценка дисперсии значений сплайна в искомых точках, причем под diag(H) подразумевается главная диагональ матрицы H.

Данный алгоритм реализован в терминах среды MATLAB пакетом прикладных программ SPL2CUB.

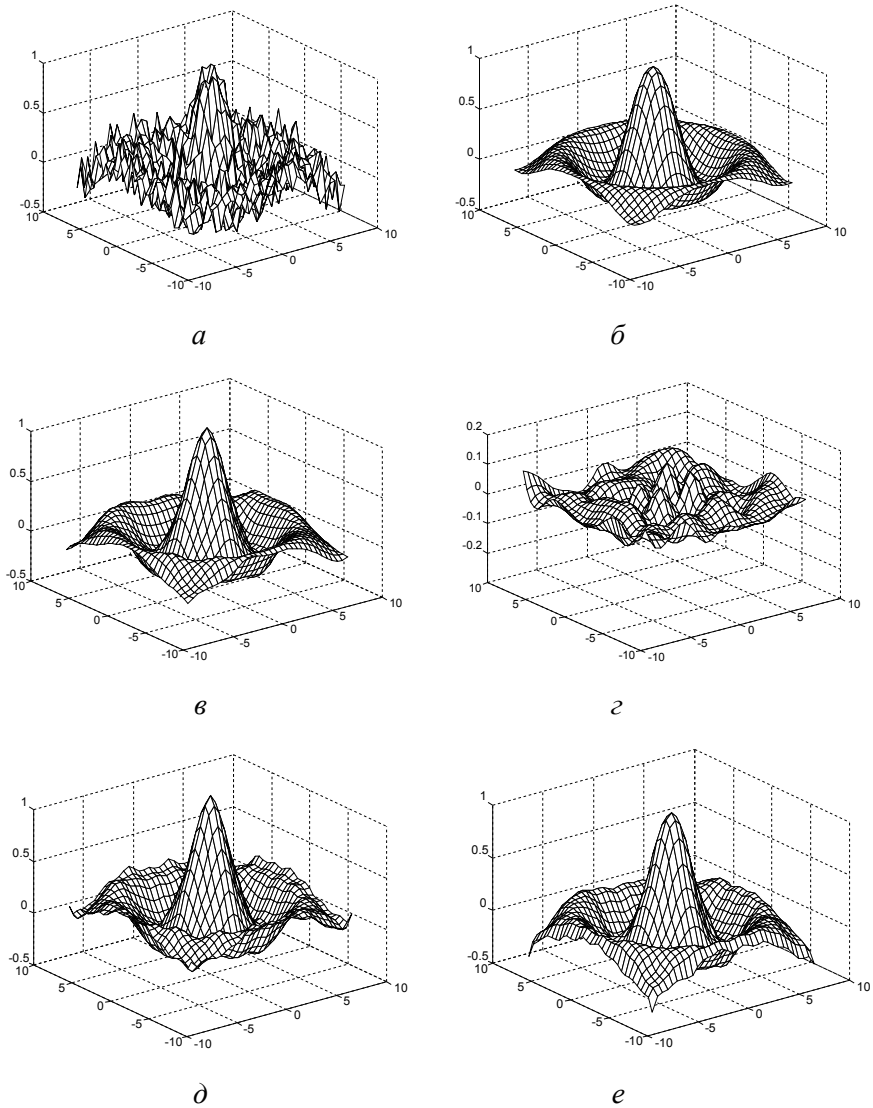
Следует отметить, что когда мы имеем дело со случайными процессами, сама по себе аппроксимация одной или нескольких реализаций малоинформативна, если отсутствует какая-либо вероятностная интерпретация полученных результатов с точки зрения их точности и достоверности. В данном случае под точностью оценки параметра будем понимать интервал со случайными концами, который с определенной вероятностью накрывает точное значение оцениваемого параметра. Такой интервал является доверительным, а соответствующая вероятность – доверительной. Определив доверительные интервалы I_s для значений сплайна на всей области приближения, можно ввести понятие доверительного пласта Π_β.

Под доверительным пластом Π_β будем понимать пространство, которое с доверительной вероятностью β содержит в себе истинные значения исследуемой функциональной зависимости на всем участке наблюдения.

Построение доверительных интервалов и доверительного пласта является эффективным, в рамках предложенной методики, средством оценки точности полученного приближения, позволяя наглядно анализировать степень надежности разработанной математической сплайн-модели. При этом достоверность данного приближения определяется выбранным уровнем доверительной вероятности.

На рисунке приведен пример аппроксимации двумерным кубическим сплайном функции вида $f(r) = \sin(r)/r$, где $r = \mathrm{sqrt}(x^2 + y^2)$ (x = -8:.5:8, y = -8:.5:8);

xu, *yu* = -[8 – 7,5 -4 - 2 0 2 4 7,5 8], 2 randn(33)/10.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Пример аппроксимации двумерным кубическим сплайном функции вида $f(r) = \sin(r)/r$:
а – исходный вид исследуемой зависимости $z(x, y) = f(x, y)+\xi(x, y)$; *б* – истинный вид функции $f(x, y)$;
в – аппроксимация кубическим сплайном; *г* – невязка аппроксимации;
д – сечение по $x = 0$; *е* – сечение по $x = 4,5$

Выводы. Рассмотренный в работе алгоритм аппроксимации функциональных зависимостей двух независимых переменных на основе двумерных сплайн-функциий может использоваться при обработке результатов наблюдений при наличии ошибок измерения. Такой стохастический подход к аппроксимации функциональных зависимостей позволяет

оценивать точность приближения путем построения соответствующего доверительного пласта с заданной доверительной вероятностью. Также приведенный алгоритм можно использовать при решении задач фильтрации полезных сигналов на фоне аддитивных помех.

Список литературы

1. *Завьялов Ю. С.* Сплайны в инженерной геометрии / Ю. С. Завьялов, В. А. Леус – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
2. *Шелевицкий И. В.* Разработка и исследование методов и алгоритмов обработки измерительной информации в радиоэлектронных системах управления воздушным движением: дис. канд. техн. наук: 05.13.01. – К.: КИИГА, 1993. – 142 с.
3. *Шутко Н. А.* Методы и средства повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем управления воздушным движением: дис. д-ра техн. наук: 05.22.14. – К.: КИИГА, 1991. – 276 с.
4. *Завьялов Ю. С.* Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, В. И. Квасов, В. П. Мирошниченко – М.: Наука, 1980. – 352 с.
5. *Турчак В. В.* Приближение функции двух переменных с помощью двумерных кубических сплайнов / В. В. Турчак, И. В. Шелевицкий, Н. А. Шутко // Проблемы авионики. – К.: КМУГА, 1997.

І. Ф. Бойко, В. В. Турчак

Наближення функціональних залежностей та проблема багатовимірної апроксимації

Розглянуто завдання наближення функціональних залежностей за значеннями дискретних відліків, отриманих у результаті вимірювань. Особливу увагу приділено апроксимації за допомогою сплайн-функцій двох незалежних змінних. Наведено алгоритм та приклад такої апроксимації.

I. F. Boiko, V. V. Turchak

Approximation of functional relations and problem of multivariate approximation

Problems of approximation of functional relations by values of the discrete samples which are received as a result of measurements are considered. The special attention is given to approximation by means of spline-functions of two independent variables. The algorithm and an example of such approximation is considered.