УДК 519.876.5(045)

О. А. Пастух, канд. техн. наук

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ МНОЖЕННЯ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ У КВАНТОВОМУ ПРОЦЕСОРІ

Європейський університет, Тернопільська філія, e-mail: zav_mdi@eu.edu.ua

Розглянуто числове моделювання обчислення множення нечітких чисел на основі використання квантового процесора. Процес числового моделювання ґрунтується на перетворенні нечітких числових даних у квантові нечіткі числові дані, які подаються, в квантовому процесорі, де на них діє ряд квантових унітарних перетворень, що складають квантову мікропрограму множення квантового процесора і графічно зображуються за допомогою квантової мережі. Пізніше відбувається зчитування вихідних квантових нечітких даних квантового процесора та обернене їх перетворення у нечіткі дані. Апробація результатів числового моделювання ґрунтується на числовому експерименті.

Ключові слова: математичний формалізм, нечіткі числа, модуль.

Вступ. Однією з основних операцій, яка виконується над нечіткими числовими даними у нечітких інформаційних системах, є операція множення. Виконання цієї операції процесором супроводжується великими витратами обчислювальних ресурсів нечітких інформаційних систем. Один із перспективних шляхів зменшення витрат обчислювальних ресурсів полягає у використанні квантового процесора як основного обчислювального елемента нечітких інформаційних систем, що володіє квантовими ефектами. Для успішного проведення експериментальних робіт у цьому напрямі необхідно заздалегідь знати результати числового моделювання.

Аналіз досліджень і публікацій. Математичний формалізм, покладений в основу числового моделювання множення нечітких чисел, подається у численних літературних джерелах, серед яких слушно виділити праці [1 – 3].

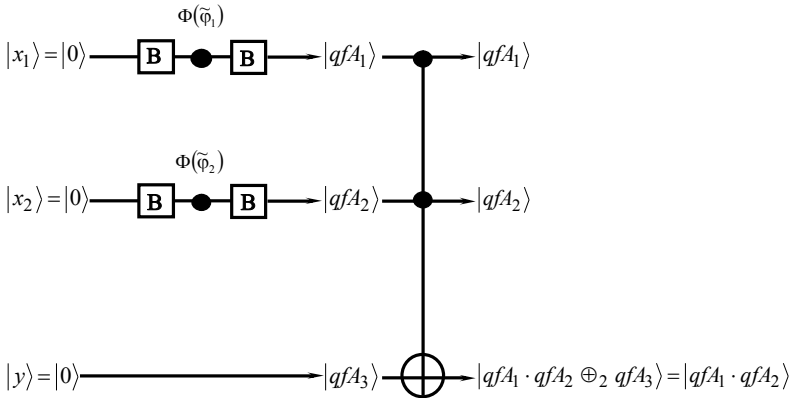
Останнім часом спостерігається значна кількість робіт, присвячених математичному забезпеченню, яке лежить в основі моделювання роботи квантового процесора. З такої великої кількості робіт варто відзначити [4 – 10].

Постановка завдання. З метою числового моделювання множення нечітких чисел у квантовому процесорі необхідно: 1) нечіткі числа подати квантовими нечіткими числами, 2) описати операторні перетворення, 3) результат операторних перетворень представити у нечіткому вигляді, 4) виконати числове експериментування.

Основна частина.

Подання нечітких чисел квантовими нечіткими числами. Мультиплікативну операцію над нечіткими числами fA_1, fA_2 з індикаторними функціями відповідно $I_{fA_1}(u_1)$ та $I_{fA_2}(u_2)$, де u_1, $u_2 \in \{0,1\}$ можна реалізувати за допомогою квантового процесора квантових інформаційних систем (q-систем), який виконує мультиплікативну операцію над квантовими нечіткими числами qfA_1, qfA_2 з індикаторними функціями відповідно $I_{qfA_1}(u_1)$ та $I_{qfA_2}(u_2)$, де елементи області визначення змінних u_1, u_2 – множини $\{0,1\}$ кодуються відповідно у елементи множини $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Для цього спочатку необхідно нормувати індикаторні функції $I_{fA_1}(u_1)$, $I_{fA_2}(u_2)$ нечітких чисел fA_1, fA_2 за нормою гільбертового простору. Пізніше за квантові нечіткі числа qfA_1, qfA_2 взяти відповідно нечіткі числа fA_1, fA_2, тобто $qfA_1 = fA_1$, $qfA_2 = fA_2$, і аналогічно за індикаторні функції $I_{qfA_1}(u_1)$, $I_{qfA_2}(u_2)$ взяти відповідно індикаторні функції $I_{fA_1}(u_1)$, $I_{fA_2}(u_2)$, тобто $I_{qfA_1}(u_1) = I_{fA_1}(u_1)$ та $I_{qfA_2}(u_2) = I_{fA_2}(u_2)$.

Множення на основі операторів $\mathbf{B}$, $\Phi(\varphi)$, Controlled-Controlled NOT (CCNOT). Мультиплікативну операцію над квантовими нечіткими числами qfA_1 та qfA_2 з індикаторними функціями відповідно $I_{qfA_1}(u_1)$ та $I_{qfA_2}(u_2)$ можна подати за допомогою квантової мережі, яку показано на рисунку, що містить однокубітні унітарні оператори.



Квантова мережа, що зображає дію множення квантових нечітких чисел qfA_1 та qfA_2

У перший кубіт $|x_1\rangle$ прописується квантове нечітке число qfA_1, тобто кубіт $|x_1\rangle$, який перебуває у стані $|x_1\rangle = |0\rangle$ після ініціалізації, набуває квантового стану

$$\left|\psi_{x_1}(u_1)\right\rangle = \left|I_{qfA_1}(u_1)\right\rangle, \text{ де } u_1 \in \{|0\rangle, |1\rangle\},$$

що досягається завдяки послідовній дії на нього однокубітних операторів Beam-splitter $\mathbf{B}$, зміни фази $\Phi(\varphi)$, Beam-splitter $\mathbf{B}$, тобто

$$\left|\psi_{x_1}(u_1)\right\rangle = \left|I_{qfA_1}(u_1)\right\rangle = \sin(\tilde{\varphi}_1/2)|0\rangle + \cos(\tilde{\varphi}_1/2)|1\rangle, \quad u_1 \in \{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

У другий кубіт $|x_2\rangle$ приписується квантове нечітке число qfA_2, тобто кубіт $|x_2\rangle$, який перебуває у стані $|x_2\rangle = |0\rangle$ після ініціалізації, набуває квантового стану

$$\left|\psi_{x_2}(u_2)\right\rangle = \left|I_{qfA_2}(u_2)\right\rangle, \text{ де } u_2 \in \{|0\rangle, |1\rangle\},$$

що досягається завдяки послідовній дії на нього однокубітних операторів Beam-splitter $\mathbf{B}$, зміни фази $\Phi(\varphi)$, Beam-splitter $\mathbf{B}$, тобто

$$\left|\psi_{x_2}(u_2)\right\rangle = \left|I_{qfA_2}(u_2)\right\rangle = \sin(\tilde{\varphi}_2/2)|0\rangle - \cos(\tilde{\varphi}_2/2)|1\rangle, \quad u_2 \in \{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

Третій кубіт $|y\rangle$ перебуває в ініціалізованому стані $|y\rangle = |0\rangle = |qfA_3\rangle$, тобто

$$\left|\psi_y(u_3)\right\rangle = \left|I_{qfA_3}(u_3)\right\rangle = |0\rangle, \text{ де } u_3 \in \{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

Таким чином, на вхід мережі (рисунок), що представляє дію оператора Тоффолі, потрапляє

$$\begin{gathered}
\mathrm{B}\Phi(\tilde{\varphi}_1)\mathrm{B}|0\rangle \otimes \mathrm{B}\Phi(\tilde{\varphi}_2)\mathrm{B}|0\rangle \otimes |0\rangle = \\
= \left(\sin(\tilde{\varphi}_1/2)|0\rangle + \cos(\tilde{\varphi}_1/2)|1\rangle\right) \otimes \left(\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|0\rangle + \cos(\tilde{\varphi}_2/2)|1\rangle\right) \otimes |0\rangle = \\
= \sin(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|000\rangle + \sin(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)|010\rangle + \\
+ \cos(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|100\rangle + \cos(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)|110\rangle.
\end{gathered}$$

Після дії оператора Тоффолі маємо стан (на виході квантової мережі, рисунок)

$$\begin{gathered}
\mathbf{CCNOT}\left(\mathrm{B}\Phi(\tilde{\varphi}_1)\mathrm{B}|0\rangle \otimes \mathrm{B}\Phi(\tilde{\varphi}_2)\mathrm{B}|0\rangle \otimes |0\rangle\right) = \mathbf{CCNOT}\ \left(\sin(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|000\rangle + \right. \\
\left. + \sin(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)|010\rangle + \cos(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|100\rangle + \cos(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)|110\rangle\right) = \\
= \sin(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|000\rangle + \sin(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)|010\rangle +
\end{gathered}$$

$$+\cos(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)|100\rangle+\cos(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)|111\rangle.$$

За результат $I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0}$ вибирається максимальне значення модуля з амплітуд, тобто

$$\max\left\{\left|\sin(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)\right|,\ \left|\sin(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)\right|,\ \left|\cos(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)\right|\right\},$$

за нульових значень кубіта $|y\rangle$, тобто максимум серед тих значень, що є амплітудами базисних станів $|000\rangle$, $|010\rangle$, $|100\rangle$. За результат $I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1}$ вибирається відповідно модуль амплітуди $\cos(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)$ при базисному стані $|111\rangle$, коли кубіт $|y\rangle$ дорівнює одиниці.

Отримання результату в нечіткому вигляді Таким чином, можна виконати зворотний перехід для отримання результату у вигляді нечіткого числа, враховуючи декодування елементів множини $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ у відповідні елементи множини $\{0,1\}$, а саме $f\tilde{A}_3 = qf\tilde{A}_3$, тобто

$$I_{f\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0} = I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0} = \max\left\{\left|\sin(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)\right|,\ \left|\sin(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)\right|,\ \left|\cos(\tilde{\varphi}_1/2)\sin(\tilde{\varphi}_2/2)\right|\right\},$$

$$I_{f\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1} = I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1} = \left|\cos(\tilde{\varphi}_1/2)\cos(\tilde{\varphi}_2/2)\right|.$$

Числове експериментування. Очевидність та правильність наведеного вище матеріалу перевіряється числовим експериментуванням. Нехай подано два нечіткі числа fA_1 та fA_2 зі своїми індикаторними функціями відповідно табл. 1 та 2.

Таблиця 1

Значення індикаторної функції $I_{fA_1}(u_1)$

u_1	0	1
$I_{fA_1}(u_1)$	$1/\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$

Необхідно за допомогою квантових нечітких чисел та квантового процесора q-систем їх перемножити, тобто обчислити число $fA_3 = fA_1 fA_2$, а саме: індикаторну функцію $I_{fA_3}(u_3)$.

Таблиця 2

Значення індикаторної функції $I_{fA_2}(u_2)$

u_2	0	1
$I_{fA_2}(u_2)$	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$

Для множення використовують квантову мережу, яку показано на рисунку. Значення ''0'', ''1'' областей визначення індикаторних функцій $I_{fA_1}(u_1)$, $I_{fA_2}(u_2)$ нечітких чисел fA_1 та fA_2 кодуються у базисні стани відповідно ''$|0\rangle$'', ''$|1\rangle$'', що є значеннями областей визначення індикаторних функцій $I_{qfA_1}(u_1)$, $I_{qfA_2}(u_2)$ квантових нечітких чисел qfA_1 та qfA_2.

Для того щоб $I_{qfA_1}(|0\rangle)=I_{fA_1}(0)$, $I_{qfA_1}(|1\rangle)=I_{fA_1}(1)$, необхідно аби кут $\tilde{\varphi}_1$ в операторі зміни фази $\Phi(\tilde{\varphi}_1)$, який діє на кубіт $|x_1\rangle$, визначався як

$$\tilde{\varphi}_1 = 2\arcsin\left(I_{fA_1}(0)\right) = 2\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right),\quad \text{або}\quad \tilde{\varphi}_1 = 2\arccos\left(I_{fA_1}(1)\right) = 2\arccos\left(\sqrt{2/5}\right).$$

Тоді послідовна дія операторів $\mathbf{B}$, $\Phi\left(\tilde{\varphi}_1 = 2\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)\right)$, $\mathbf{B}$ на ініціалізований стан кубіта $|x_1\rangle = |0\rangle$ прописує у нього квантове нечітке число qfA_1, тобто

$$\left|\psi_{x_1}(u_1)\right\rangle = \left|I_{qfA_1}(u_1)\right\rangle, \text{ де } u_1 \in \{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

Аналогічним чином, щоб $I_{qfA_2}(|0\rangle) = I_{fA_2}(0)$, $I_{qfA_2}(|1\rangle) = I_{fA_2}(1)$, необхідно аби кут $\tilde{\varphi}_2$ в операторі зміни фази $\Phi(\tilde{\varphi}_2)$, який діє на кубіт $|x_2\rangle$ визначався так:

$$\tilde{\varphi}_2 = 2\arcsin\left(I_{fA_2}(0)\right) = 2\arcsin\left(\sqrt{3/5}\right), \quad \text{або} \quad \tilde{\varphi}_2 = 2\arccos\left(I_{fA_2}(1)\right) = 2\arccos\left(\sqrt{2/5}\right).$$

Тоді послідовна дія операторів $\mathbf{B}$, $\Phi\left(\tilde{\varphi}_2 = 2\arcsin\left(\sqrt{3/5}\right)\right)$, $\mathbf{B}$ на ініціалізований стан кубіта $|x_2\rangle = |0\rangle$ прописує у нього квантове нечітке число qfA_2, тобто

$$\left|\psi_{x_2}(u_2)\right\rangle = \left|I_{qfA_2}(u_2)\right\rangle, \text{ де } u_2 \in \{|0\rangle, |1\rangle\}.$$

Кубіт $|y\rangle$ перебуває в ініціалізованому стані, тобто

$$\left|\psi_y(u_3)\right\rangle = \left|I_{qfA_3}(u_3)\right\rangle = |0\rangle.$$

Отже, на вхід квантової мережі (рисунок) потрапляє стан

$$\mathrm{B}\Phi\left(\tilde{\varphi}_1 = 2\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)\right)\mathrm{B}|0\rangle \otimes \mathrm{B}\Phi\left(\tilde{\varphi}_2 = 2\arcsin\left(\sqrt{3/5}\right)\right)\mathrm{B}|0\rangle \otimes |0\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{3}{5}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{5}|000\rangle + \frac{\sqrt{2}}{5}|010\rangle + \frac{2\sqrt{3}}{5}|100\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{5}|110\rangle.$$

Після дії оператора Тоффолі, що відповідає стану на виході квантової мережі (рисунок)

$$\mathbf{CCNOT}\left(\mathrm{B}\Phi\left(\tilde{\varphi}_1 = 2\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)\right)\mathrm{B}|0\rangle \otimes \mathrm{B}\Phi\left(\tilde{\varphi}_2 = 2\arcsin\left(\sqrt{3/5}\right)\right)\mathrm{B}|0\rangle \otimes |0\rangle\right) =$$

$$= \mathbf{CCNOT}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}|000\rangle + \frac{\sqrt{2}}{5}|010\rangle + \frac{2\sqrt{3}}{5}|100\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{5}|110\rangle\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{5}|000\rangle + \frac{\sqrt{2}}{5}|010\rangle + \frac{2\sqrt{3}}{5}|100\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{5}|111\rangle.$$

За результат $I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0}$ вибирається максимальне значення модуля з амплітуд

$$\max\left\{\left|\sqrt{3}/5\right|, \left|\sqrt{2}/5\right|, \left|2\sqrt{3}/5\right|\right\}$$

за нульових значеннь кубіта $|y\rangle$, тобто максимум серед тих значень, що є амплітудами базисних станів $|000\rangle$, $|010\rangle$, $|100\rangle$. Отже $I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0} = 2\sqrt{3}/5$.

За результат $I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1}$ вибирається відповідно модульне значення амплітуди $\left|2\sqrt{2}/5\right| = 2\sqrt{2}/5$ при базисному стані $|111\rangle$, що відповідає значенню одиниці кубіта $|y\rangle$. Отже, $I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1} = 2\sqrt{2}/5$.

Отримання результату у вигляді нечіткого числа $f\tilde{A}_3$ здійснюється таким чином. Декодуються значення $|0\rangle$, $|1\rangle$, яких набуває кубіт $|y\rangle$, у значення відповідно ''0'' та ''1''. Індикаторна функція $I_{f\tilde{A}_3}(u_3)$ набуває значень

$$I_{f\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0} = I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0} = 2\sqrt{3}/5, \qquad I_{f\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1} = I_{qf\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1} = 2\sqrt{2}/5.$$

Звернімо увагу, що виконується перевірка. А саме:

$$I_{f\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=0} = \max_{\{(u_1,u_2)\in fR=fA_1\times fA_2:\ u_1\cdot u_2=u_3=0\}}\left\{I_{fA_1}(u_1=0)\,I_{fA_2}(u_2=0)\right\} = 2\sqrt{3}/5;$$

$$I_{f\tilde{A}_3}\Big|_{u_3=1} = \max_{\{(u_1,u_2)\in fR=fA_1\times fA_2:\ u_1\cdot u_2=u_3=1\}} \left\{ I_{fA_1}\left(u_1=1\right) I_{fA_2}\left(u_2=1\right) \right\} = 2\sqrt{2}/5,$$

яка підтверджує правильність отриманих результатів.

Висновки. Отримано результати числового моделювання множення нечітких чисел у квантовому процесорі, які формують теоретичний базис для експериментальних робіт щодо розв'язання даного завдання.

Список літератури

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – Vol.8. – P. 338 – 353.
2. *Мациевский С. В.* Нечеткие множества: учеб. пособие. – Калининград: Изд-во КГУ, 2004. – 176 с.
3. *Рыжов А. П.* Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 81 с.
4. *Сергієнко І. В., Гупал А. М.* Сучасна математика – поєднання дедуктивного та індуктивного підходів // Вісн. НАН України. – 2003. – №1. – С. 18 – 23.
5. *Войтович І. Д., Корсунський В. М.* Перспективи квантових обчислень з використанням надпровідності // Математичні машини і системи. – 2008. – №4. – С. 23 – 56.
6. *Крохмальський Т.* Квантові комп'ютери: основи й алгоритми (короткий огляд) // Журнал фізичних досліджень. Ін-т фізики конденсованих систем НАНУ. – 2004. – Т.8. – №1. – С. 1 – 15.
7. *Китаев А., Шень А., Вялый М.* Классические и квантовые вычисления. – М.: МПНМО, ЧеРо, 1999. – 192 с.
8. *Ожигов Ю. И.* Квантовые вычисления: учеб.-метод. пособие. – М.: МГУ, 2003. – 104 с.
9. *Нейман И.* Математические основы квантовой механики // Квантовые компьютеры и квантовые вычисления. – 2001.– Т.2. – №1. – С. 38 – 42.
10. *Фейнман Р.* Квантово механические компьютеры // Квантовые компьютеры и квантовые вычисления. – 1999. – №2. – С. 125 – 156.

О. А. Пастух

Численное моделирование умножения нечетких чисел в квантовом процессоре

Рассмотрено численное моделирование умножения нечетких чисел на основании использования квантового процессора. Процесс численного моделирования базируется на преобразовании нечетких числовых данных в квантовые нечеткие числовые данные, которые представляются, в квантовом процессоре, где на них действует ряд квантовых унитарных преобразований, которые составляют квантовою микропрограмму умножения квантового процессора и графически подаются с помощью квантовой сети. Потом осуществляется чтение выходных квантовых нечетких данных квантового процессора и обратное их преобразование в нечеткие данные. Апробирование результатов численного моделирования базируется на численном эксперименте.

O. A. Pastukh

Numerical modeling of multiply fuzzy numbers on the base of quantum processor

Numerical modeling of multiply fuzzy numbers on the base of quantum processor has been analyzed. The mentioned above process of numerical modeling is based upon transforming fuzzy numerical figures into quantum fuzzy numerical data which are presented in the quantum process. A number of quantum unitary transformations which constitute quantum micro program of multiply quantum processor influence them. Those transformations are graphically depicted with the help of quantum network. Later on, the reading of outgoing quantum fuzzy data of quantum processor and their reverse transformation into fuzzy data take place. The approbation of the results of numerical modeling is based on the numerical experiment.