УДК 004.942 (045)

О. А. Попова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ СИЛЫ СВЕТА В СРЕДЕ СИСТЕМЫ MATHEMATICA®

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: svitlya4ok@ya.ru

Предложены варианты аналитической аппроксимации кривых силы света в среде системы MATHEMATICA®.

Ключевые слова: аппроксимация, кривые силы света, полярная система координат, обобщенный полином, радиус-вектор, декартовая система координат.

Вступление и постановка задачи. При проектировании светотехнических систем возникает необходимость аналитического представления световых характеристик приборов. Обычно одна из основных характеристик световых приборов – кривая силы света приводится в графическом виде.

В работе рассмотрен вопрос аппроксимации кривых силы света обобщенными полиномами в различных системах базисных функций и координат. Для кривых силы света, заданных графически или таблично, задача аппроксимации кривых силы света заключается в нахождении обобщенных полиномов вида

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i s_i(t).$$

При использовании декартовых систем координат предполагается параметрическое задание кривой силы света с помощью двух полиномов указанного вида в случае полярной системы координат аппроксимационный полином строится для радиус-вектора в зависимости от базисной функции аргумента, которыми являются углы полярной системы координат.

Исследовано влияние вида базисных функций и их порядка на точность апппроксимационной кривой силы света, рассмотрен ряд иллюстративных примеров.

Аппроксмация сигналов заданной системой отсчетов. Известны способы аппроксимации дискретизированных сигналов [1]. Сигналы задаются в виде таблицы.

Таблица дискретизированных сигналов

k	1	2	…	r
t_k	t_1	t_2	…	t_r
x_k	x_1	x_2	…	x_r

Поставим задачу аппроксимировать заданный сигнал обобщеным полиномом порядка m в системе базисных функций: $\{s_i(t)\}_{i=1}^{m}$:

$$x = \sum_{i=1}^{m} X_i s_i(t).$$

Подставим в выражение аппроксимирующего полинома значения из таблицы:

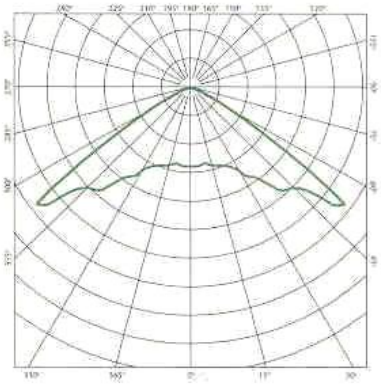
$$x_k = \sum_{i=1}^{m} X_i s_i(t_k), k := 1, ..., r.$$

Последнее выражение может рассматриваться как система линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов аппроксимирующего полинома. Матрица коэффициентов этой системы уравнений определяется выражением

$$w_{ki} = s_i(t_k).$$

Поскольку количество отсчетов сигнала и порядок обобщенного полинома в общем случае не равны, операционная матрица спектра будет прямоугольной, и решение этой системы уравнений должно находиться с помощью псевдообратной матрицы.

Рассмотрим аппроксимацию кривых силы света на примере светового прибора R-4000 из каталога Brilux (рис. 1).



R-4000

Рис. 1. Оригинал полученной кривой силы света осветительного прибора

1. Аппроксимация в декартовой системе координат. Данные заносятся в виде точек с двумя координатами *x* и *y*.

Используя систему базисных функций на основе степенного полинома вида:

$$S[t_,T_,i_] := \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1},$$

поставим задачу аппроксимировать заданный сигнал.

Сформируем систему базисных функций.

Задаем систему 39 равноотдаленных моментов времени на единичном интервале изменения аргумента (рис. 2):

```
h = 0.0263; r = 39; n = 10;
tt := Table[i * h, {i, 0, r - 1}]
tt
{0, 0.0263, 0.0526, 0.0789, 0.1052, 0.1315, 0.1578, 0.1841, 0.2104, 0.2367, 0.263, 0.2893, 0.3156,
 0.3419, 0.3682, 0.3945, 0.4208, 0.4471, 0.4734, 0.4997, 0.526, 0.5523, 0.5786, 0.6049, 0.6312, 0.6575,
 0.6838, 0.7101, 0.7364, 0.7627, 0.789, 0.8153, 0.8416, 0.8679, 0.8942, 0.9205, 0.9468, 0.9731, 0.9994}
```

Формируем систему базисных функций:

```
s[t_, T_, i_] := (t/T)^(i-1);
si = s[t, 1, i];
S := Table[si, {i, 1, n}]
S
```

Формирование операционной матрицы аппроксимирующего полиномального спектра:

```
w := Table[si /. t → tt[[j]], {j, 1, r}, {i, 1, n}];
w // MatrixForm
```

Формирование операционного вектора спектра параметрических составляющих сигнала:

```
Q = xt
{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 75, 70, 60, 55, 50, 45, 35, 25, 18, 10, 5, 0,
 -5, -10, -18, -25, -35, -45, -50, -55, -60, -70, -75, -70, -60, -50, -40, -30, -20, -10, 0}
Q1 = yt
{0, 5, 12, 18, 26, 33, 47, 52, 56, 56, 52, 49, 49, 51, 45, 42, 38,
 37, 36, 38, 36, 37, 38, 42, 45, 51, 49, 49, 52, 56, 56, 52, 47, 33, 26, 18, 12, 5, 0}
```

Определение векторов коэффициентов аппроксимирующих полиномов:

```
X = PseudoInverse[w].Q
```

$$\{0.330845,\ 396.685,\ -2840.87,\ 59345.4,\ -449723.,\ 1.56139\times10^{6},\ -2.90907\times10^{6},\ 3.01418\times10^{6},\ -1.63787\times10^{6},\ 364190.\}$$

```
Y = PseudoInverse[w].Q1
```

$$\{1.21742,\ -59.0577,\ 6029.53,\ -37992.6,\ 105349.,\ -163041.,\ 153389.,\ -84915.8,\ 21241.7,\ 2.19837\times10^{-6}\}$$

Формирование аппроксимирующих полиномов:

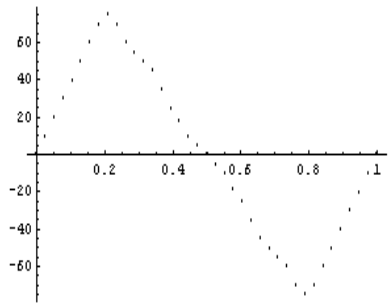
```
xa = X.S
```

$$0.330845+396.685\,t-2840.87\,t^{2}+59345.4\,t^{3}-449723.\,t^{4}+1.56139\times10^{6}\,t^{5}-2.90907\times10^{6}\,t^{6}+3.01418\times10^{6}\,t^{7}-1.63787\times10^{6}\,t^{8}+364190.\,t^{9}$$

```
ya = Y.S
```

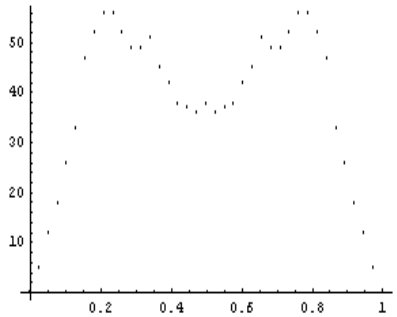
$$1.21742-59.0577\,t+6029.53\,t^{2}-37992.6\,t^{3}+105349.\,t^{4}-163041.\,t^{5}+153389.\,t^{6}-84915.8\,t^{7}+21241.7\,t^{8}+2.19837\times10^{-6}\,t^{9}$$

```
po = ListPlot[Table[{tt[[i]], xt[[i]]}, {i, r}]]
```



- Graphics -

```
pp = ListPlot[Table[{tt[[i]], yt[[i]]}, {i, r}]]
```

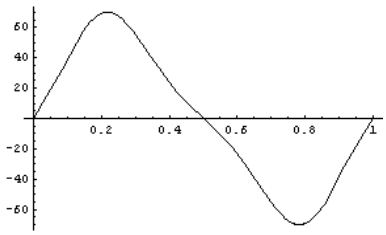


- Graphics -

Рис. 2. Отображение на графике начальных данных

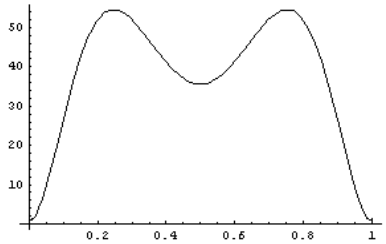
Построение параметрического графика аппроксимированного сигнала и параметрического графика функции ошибки аппроксимации показано на рис. 3.

```
p1 = Plot[xa, {t, 0, 1}]
```



- Graphics -

```
py = Plot[ya, {t, 0, 1}]
```

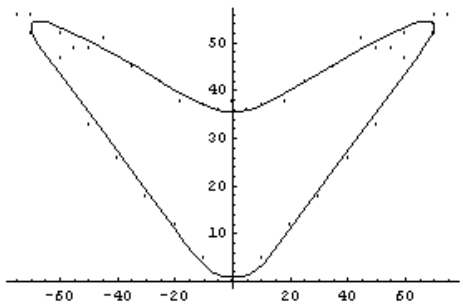


- Graphics -

Рис. 3. Параметрический график аппроксимированного сигнала и параметрический график функции ошибки аппроксимации

В итоге получаем результат аппроксимации (рис. 4).

```
Show[p2, Out[28]]
```



- Graphics -

Рис. 4. Результирующий график совмещения аппроксимации и исходных данных

Произведем вычисления системе базисных функций на основе полиномов Лежандра (рис. 5):

```
SL[x_] := Evaluate[Table[LegendreP[n, x], {n, 0, 9}]];
si = Simplify[SL[t]];
Plot[Evaluate[si], {t, -1, 1}]
```

и получим результат, показанный на рис. 6

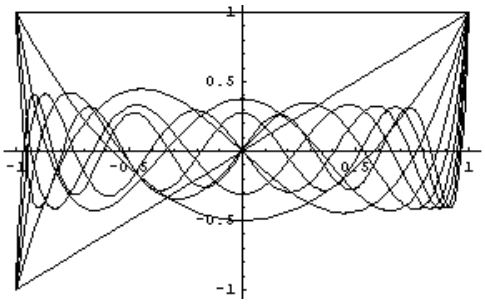


Рис. 5. График полиномов Лежандра 10-го порядка

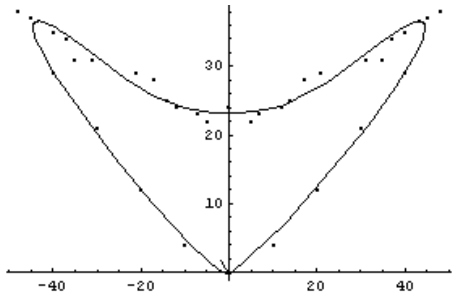


Рис. 6. Результирующий график, совмещение аппроксимации и заданных исходных данных

2. Аппроксимация в полярной системе координат. Исходные данные задаются в виде таблицы отсчетов радиуса-вектора КСС для системы углов в градусах или радианах:

```
θ:=Table[N[2 π/15]+N[π/60]*i,{i,0,45}];
r:={0,11,23,33,52,106,129,103,95,86,75,70,64,61,58,56,55,54,53,
53,54,54,54,54,54,54,53,55,55,56,58,59,62,73,76,85,92,97,104,129,1
06,59,32,26,12,0};
```

Дальше аппроксимация выполняется аналогично п. 1 с учетом особенностей данных. В итоге получаем результат аппроксимации (рис. 7):

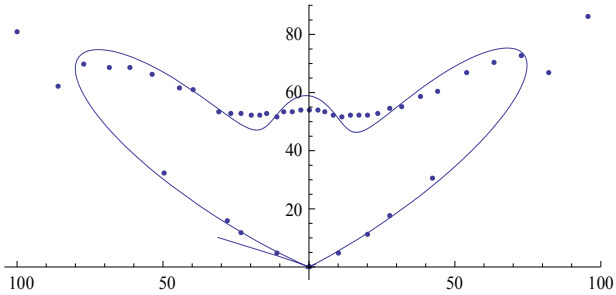


Рис. 7. Результирующий график, совмещение аппроксимации и заданных исходных данных

При задании системы базисных функций с помощью тригонометрической синусной функции:

```
s[t_,T_,i_]:=Sin[i*(π*t/T)];
si=s[t,1,i];
```

```
S:=Table[si,{i,1,n}]
```

получим следующий результат, который показан на рис. 8

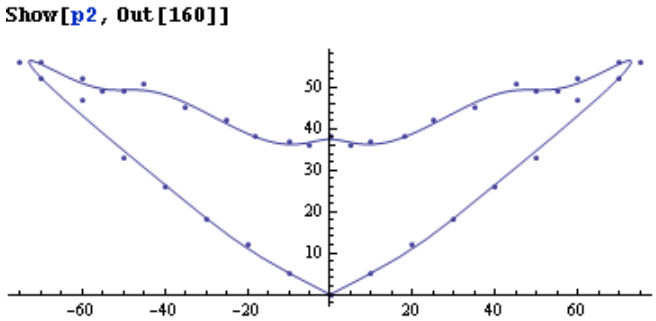


Рис. 8. Результирующий график, совмещение аппроксимации и заданных исходных данных

Выводы. Проведенные вычислительные эксперименты по аппроксимации различных кривых сил света в различных степенных функциях позволили сделать следующие выводы.

– при аппроксимации с применением степенных функций трудность состоит в том, что для каждой функции индивидуально нужно подобрать такую степень полинома, при которой промежуточные значения аппроксимации будут не слишком большими и в то же время степень должна быть достаточной для наиболее точного отображения функции;

– при аппроксимации с помощью библиотечной системы Mathematica функции полиномов Лежандра – разброс коэффициентов меньше, и 10 порядков полинома достаточно для отображения большинства функций.

– наиболее точные результаты для функций заданного типа получаются при аппроксимации в полярной системе координат с помощью тригонометрической синусной функции.

Рассмотренные примеры могут быть полезны при автоматизированном проектировании световых систем; совокупность коэффициентов аппроксимации полиномов может рассматриваться как альтернативный графическому способ задания параметров кривой силы света.

Список литературы

1. *Васильев В. В.* Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем: Аппроксимация сигналов с использованием системы Mathematica®: учеб. пособие – К.: НАН Украины, 2007. – 127 с.
2. *Шмидский Я. К.* Mathematica 5. Самоучитель.: – М.: Издат. дом «Вильямс», 2004. – 592 с.
3. *Айзенберг Ю. Б.* Справочная книга по светотехнике – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 528 с.
4. *Каталог* продукции фирмы Brilux, 2006. – 488 с.

О. О. Попова

Аналітична апроксимація кривих сили світла в програмному середовищі Mathematica®

Запропоновано варіанти аналітичної апроксимації кривих сили світла в програмному середовищі Mathematica®.

O. A. Popova

Analytical approximation of the light's force sily curves in environment of system Mathematica®

The variants of analytical approximation of the light's force sily curves in environment of system Mathematica® are offered.