

УДК 681.5.013(045)

І. М. Ратніков, д-р техн. наук

МЕТОД ФОРМАЛІЗОВАНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО СИНТЕЗУ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Державний науково-дослідний інститут авіації НАУ

Запропоновано метод формалізованого розв'язання завдань багатокритеріального синтезу технічних систем, який засновано на використанні трьох схем компромісів.

Ключові слова: багатокритеріальний синтез, схеми компромісів, оптимізація, вектор.

Вступ. На сучасному етапі розвитку теорії багатокритеріального синтезу технічних систем визначення остаточного варіанта їх побудови здійснюється на основі залучення суб'єктивної інформації. Ця інформація принципово необхідна для обґрунтування переходу від векторного критерію якості системи до скалярної згортки критеріїв (схеми компромісів), яка дозволяє формалізовано визначити єдине розв'язання багатокритеріального завдання. Вибір схеми компромісів здійснюється дослідником (групою експертів) евристично, на підставі професійного досвіду та умов завдання, що розв'язується. Тому актуальною проблемою при побудові різноманітних технічних систем є розробка методів синтезу, де цілком виключається суб'єктивний фактор, як потенційна передумова високого ступеня техніко-економічного ризику.

Аналіз досліджень і публікацій. У науковій літературі [1 – 6] кожній схемі компромісів, яка відбиває суб'єктивну думку експерта, ставиться у відповідність певний принцип оптимальності. На теперішній час відома велика кількість принципів оптимальності. Полярними принципами, що відповідають межах індивідуальних пріоритетів експертів, є [1; 4]: принцип рівномірності, що реалізується мінімаксною схемою компромісів, і принцип економічності, що реалізується інтегральною схемою компромісів. Всі інші принципи оптимальності займають проміжне становище і характеризуються різним ступенем наближення до полярних принципів.

Відомо [1], що розв'язання завдання багатокритеріальної оптимізації, яке одночасно задовольняє усім принципам оптимальності, не існує. При використанні одного якогось принципу оптимальності (однієї схеми компромісів) не реалізуються вимоги до об'єкта оптимізації, що закладені в інших принципах. Тому у науковій літературі [2; 5] завдання багатокритеріального синтезу технічних систем пропонується розв'язувати багаторазово, щораз із залученням різних схем компромісів. При цьому розв'язання продовжується доти, поки результати, що отримані за різними схемами компромісів, не співпадуть (будуть розрізнятися несуттєво). Такий варіант технічної системи одночасно буде відповідати вимогам кількох принципів оптимальності, тобто буде побудований раціонально [1].

Таким чином, на сучасному етапі розвитку теорії синтезу технічних систем зниження ступеню техніко-економічного ризику при їхній побудові досягається за рахунок використання кількох різних схем компромісів. Однак, у відомих практичних додатках такого підходу [2; 3] процедура синтезу ґрунтується на послідовній пошуковій технології, що характеризується великими витратами конструкторських ресурсів, і традиційно містить небажані евристичні елементи.

Метою статті є розробка інтенсивного і цілком формалізованого методу розв'язання завдань багатокритеріального синтезу технічних систем.

Постановка завдання. Особливість завдання, яке розглядається, пов'язана з тим, що переважну більшість часу технічні системи функціонують в стаціонарних режимах, тому при їх побудові припустимо ставити питання щодо підбору фіксованих величин обмежень на критерії якості функціонування. У змістовному аспекті процедура підбора обмежень із деякого діапазону може трактуватися як визначення кількості ресурсів (запасів) системи, достатньої для забезпечення її функціонування [6]. З урахуванням цих обставин, під час

багатокритеріального синтезу технічних систем, поряд із традиційним завданням оптимізації значень вектору критеріїв якості системи, необхідно ставити завдання визначення таких значень обмежень на ці критерії, при яких з якістю, не гірше заданої, забезпечується функціонування синтезованої системи. У цьому розумінні критерії і обмеження відіграють однакову роль, є рівноправними і спільно складають сукупність показників, що підлягають оптимізації.

Припустимо, що завдання синтезу технічної системи має множину можливих розв'язань $X \in E^n$, на якій визначені її проектні змінні $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ в n -мірному евклідовому просторі. Якість розв'язання завдання оцінюється по сукупності часткових суперечливих критеріїв, які утворюють s -мірний вектор $y(x) = \{y_k(x)\}_{k=1}^s$, визначений на множині X . Вектор критеріїв обмежено областю M , що передбачає цілеспрямовану зміну. Ця область обумовлюється обмеженнями A_k , які утворюють вектор $A = \{A_k\}_{k=1}^s$, що повинен підбиратися із припустимої множини $A \in Y_A$.

Потрібно визначити розв'язання $x^* \in X$, яке доставляє екстремум (наприклад, мінімум) вектору критеріїв $y(x)$ і вектору обмежень A .

Розв'язання завдання. Як логічну основу для розробки методу розв'язання поставленого завдання використаємо принцип раціональної організації систем [6]. У рамках цього принципу будемо шукати розв'язання x^* , при якому одночасно задовольняються полярні принципи оптимальності, тобто принципи економічності і рівномірності, а також принцип мінімального видалення від ідеальної (утопічної) точки [7]. Застосування останнього принципу забезпечує мінімізацію видалення значення кожного із часткових критеріїв від свого ідеального (мінімального в даному випадку) значення. Схема компромісів, що випливає із принципу мінімального видалення від ідеальної точки, може бути представлена у вигляді [7]

$$Y_L(y) = \left(\sum_{k=1}^s \left[1 - \frac{y_k(x)}{y_k''} \right]^L \right)^{\frac{1}{L}}, \quad L \geq 1, \quad (1)$$

де y_k'' – значення k -го часткового критерію в ідеальній точці.

Запропонований підхід до визначення x^* дозволяє виключити із процедури багатокритеріального синтезу два із трьох традиційних евристичних елементів. По-перше, використання одночасно трьох принципів оптимальності вибавляє від необхідності суб'єктивного вибору схеми компромісів. По-друге, доповнення відомої [6] реалізації принципу раціональної організації систем схемою компромісів (1) – від необхідності обґрунтування значущості (значень вагових коефіцієнтів) окремих часткових критеріїв.

Зажадаємо, щоб шукане розв'язання x^* задовольнялося при забезпеченні в (1) глобального мінімуму $Y_L(y)$, для чого покладемо

$$\frac{y_k(x)}{y_k''} = 1, \quad \forall k \in [1, s]. \quad (2)$$

Мінімум $Y_L(y)$ при дотриманні вимоги (2) не залежить від міри наближення окремих часткових критеріїв до своїх ідеальних значень (від норми L). Ця обставина дозволяє виключити із процедури розв'язання завдання синтезу останній евристичний елемент, що пов'язаний із суб'єктивним вибором значення L .

Проведемо нормування часткових критеріїв до їхніх значень y_k'' в ідеальній точці. У цій точці досягаються мінімальні значення критеріальних функцій, тому $y'' = \left\{ \inf_{x \in X} y_k(x) \right\}_{k=1}^s$. Вираз для області M строго припустимих рішень у загальному випадку буде мати вигляд: $M = \{y(x) | A_k \leq y_k(x) < \infty, k \in [1, s]\}$, де $A_k = y_k''$, $y_k'' > 0$. Причому значення A_k є невідомими, їх оптимальні (мінімальні) значення повинні бути визначені в результаті вирішення завдання синтезу.

При прийнятому способі нормування вектор відносних часткових критеріїв приймає вигляд

$$y_o(x) = \{y_{ok}(x)\}_{k=1}^s = \left\{ \frac{y_k(x)}{A_k} \right\}_{k=1}^s = \left\{ \frac{y_k(x)}{y_k''} \right\}_{k=1}^s. \quad (3)$$

Для визначення значення x^* , при якому одночасно задовольняються полярні принципи оптимальності і принцип мінімального видалення від ідеальної точки, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y_{oj}(x) - y_{oj+1}(x) = 0, & j \in [1, s-1], \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^s y_{ok}(x) = 0, & i \in [1, n], \\ y_o(x) - I = 0, \end{cases}, \quad (4)$$

де I – одиничний вектор-стовпець розмірності k .

Справедливо наступне ствердження: якщо строго монотонні та диференціюємі функції $y_o(x) = \{y_{ok}(x)\}_{k=1}^s$ дійсного аргументу $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, $x \in X$, утворюють систему рівнянь вигляду (4) і система має розв'язання, тоді це розв'язання є єдиним і досягається в точці $x = x^*$ евклідова n -мірного простору, де

$$\{y_k(x^*)\}_{k=1}^s = \{A_k\}_{k=1}^s, \quad \{A_k\}_{k=1}^s \in \emptyset.$$

Доказ.

Припустимо, що система (4), крім розв'язання $x_1 = x^*$ має розв'язання $x_2 = x^o$, причому $x^o \neq x^*$. Тоді, у силу строгої монотонності функцій $y_k(x)$, маємо

$$y_k(x^o) \neq y_k(x^*), \quad \forall k \in [1, s],$$

звідки слідує $\frac{y_k(x_2)}{A_k} \neq 1, \forall k \in [1, s]$, що суперечить системі рівнянь (4). Отже, розв'язання

$x = x^*$ є єдиним.

Припустимо, що розв'язання системи рівнянь (4) досягається в деякій точці $x = x'$, $x' \neq x^*$, у якій

$$\{y_k(x')\}_{k=1}^s \neq \{A_k\}_{k=1}^s.$$

Тоді хоча б для одної j -й компоненти вектора $\{y_k(x)\}_{k=1}^s$ повинне виконуватися

$$\frac{y_j(x')}{A_j} \neq 1, \quad j \in [1, s-1],$$

що суперечить системі рівнянь (4). Отже, розв'язання системи рівнянь (4) досягається в єдиній точці $x = x^*$ евклідова n -мірного простору, де забезпечується рівність векторів

$$\{y_k(x^*)\}_{k=1}^s = \{A_k\}_{k=1}^s, \quad \{A_k\}_{k=1}^s \in \emptyset.$$

Доведений результат у конструктивному аспекті означає наступне.

1. Якщо розв'язання системи рівнянь (4) існує, то при $x = x^*$ множина розв'язань, оптимальних за Парето, стягується в єдину ідеальну точку в n -мірному просторі, у якій всі часткові критерії вектора якості досягають своїх екстремальних (мінімальних у розглянутій постановці) значень. У цьому випадку зникають протиріччя (досягається консенсус [6]) між частковими критеріями і векторне завдання синтезу об'єктивно (без залучення яких-небудь евристичних елементів) зводиться до скалярного.

2. У розв'язанні багатокритеріального завдання синтезу технічної системи критерії і обмеження на ці критерії грають однакову роль, є рівноправними і спільно складають сукупність показників, що оптимізуються. Остаточне розв'язання представляється продуктом злиття критеріальних функцій і обмежень.

3. У точці, що обумовлена значеннями проектних змінних $x = x^*$, вектор обмежень $\{A_k\}_{k=1}^s$ приймає оптимальне (мінімальне) значення A^* . Збільшення значень обмежень відносно оптимального значення A^* призводить до виділення «зайвої» кількості ресурсів і запасів, зменшення – до одержання значень показників якості системи вище ідеального (мінімального) рівня та, як наслідок, до погіршення показників функціонування системи.

Висновки. Таким чином, розроблений метод, який засновано на використанні трьох схем компромісів, дозволяє цілком формалізовано (без залучення суб'єктивної компоненти) виділяти єдине розв'язання завдання багатокритеріального синтезу технічних систем. Це розв'язання забезпечує одночасне досягнення оптимальних (за трьома принципами оптимальності) значень сукупністю критеріїв якості синтезованої системи і обмежень на ці критерії.

Процедура застосування методу не містить трудомістких пошукових технологій, остаточний варіант побудови технічної системи визначається за результатом розв'язання однієї системи рівнянь. Так, наприклад, при синтезі технічної системи за двома критеріями

якості, один із яких описується квадратичною залежністю вигляду $y_O^1(x) = \frac{(ax+b)^2+c}{A_1}$, а

другий – лінійною залежністю вигляду $y_O^2(x) = \frac{kx}{A_2}$, де x – значення скалярної проектної

змінної; a, b, c, k – задані постійні величини, а $A_k, k = 1, 2$, – невідомі значення обмежень на критерії, завдання має просте аналітичне розв'язання

$$y_O^1(x = x^*) = A_1^* = 0,67(b^2 - k^{-1}abA_2^* + c),$$

$$y_O^2(x = x^*) = A_2^* = k(3a)^{-1} \left[2b + (b^2 - 3c)^{\frac{1}{2}} \right], \quad b^2 \geq 3c.$$

Під час розробки методу не вводилися будь-які обмеження, що пов'язані з особливостями його застосування. Тому метод, який засновано на використанні трьох схем компромісів, може бути застосовано як ефективний інструмент для формалізованого визначення оптимальних значень показників якості технічних систем різноманітного призначення, а також для виділення кількості ресурсів і запасів, що забезпечують досягнення цих значень.

Список літератури

1. *Сложные технические и эргатические системы: методы исследования* / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиятдинов, А. В. Харченко, В. В. Осташевский – Х.: Факт, 1997. – 240 с.
2. *Гуткин Л. С. Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества* / Л. С. Гуткин – М.: Сов. радио, 1975. – 368 с.
3. *Глушков В. М. О системной оптимизации* // Кибернетика. – 1980. – №5. – С.89 – 90.
4. *Ириков В. А., Ларин В. Я., Самуценко Л. М. Алгоритмы и программы решения прикладных многокритериальных задач* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1968. – №1. – С. 5 – 16.
5. *Сиразетдинов Т. К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем.* – М.: Машиностроение, 1988. – 160 с.
6. *Воронин А. Н. Компромисс и консенсус в теории векторной оптимизации* // Проблемы управления и автоматизации. – 2001. – №5. – С. 14 – 26.
7. *Салуквадзе М. Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления.* – Тбилиси: «Мецниереба», 1975. – 201 с.

И. Н. Ратников

Метод формализованного решения задач многокритериального синтеза технических систем

Предложен метод формализованного решения задач многокритериального синтеза технических систем, основанный на использовании трех схем компромиссов.

I. M. Ratnikov

Formalized method of the multiobjective syntheses of the technical systems

Offered formalized method of the multiobjective syntheses of the technical systems which founded on use three compromise schemes.