

УДК 531.71(045)

В. П. Квасніков, д-р техн. наук

МОЖЛИВОСТІ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЕЛИЧИН КООРДИНАТНО ВИМІРЮВАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ

Інститут інформаційно-діагностичних систем НАУ, e-mail: nau@edu.ua

Показано, що, врахування негаусового характеру адитивної завади дозволяє значно підвищити точність вимірювального параметра. Показано, що на точність фільтрації випадкового процесу вимірювання механічних величин значною мірою впливає врахування збурювальних факторів з негаусовою щільністю розподілення ймовірностей.

Ключові слова: негаусова завада, координатно-вимірювальна машина, точність вимірювання.

Вступ. Точність вимірювання механічних величин координатною вимірювальною системою обмежена постійно діючими випадковими завадами, характер яких суттєво залежить від умов роботи системи та місця її розташування. Для адаптивних координатно вимірювальних систем випадковими збуреннями передусім є температура, вологість, вібрації, електромагнітні випромінювання, власні коливання системи та ін. Зовнішні випадкові впливи зумовлюють флуктуацію чутливого елемента вимірювальної системи, формують випадкові похибки, значення яких можна визначити шляхом статистичного опису засобу вимірювання як динамічної системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. За статистичного опису вимірювальної системи з лазерними вимірювальними підсистемами виходять з припущення, що зовнішні випадкові впливи можна подати у вигляді моделі δ -корельованого шуму. Експериментально встановлено, що, крім гаусового шуму, діють також негаусові завади, які необхідно враховувати для зменшення похибки вимірювання [1; 2]. Для розв'язання багатьох практичних завдань, що виникають в приладобудуванні, та проведення наукових досліджень недостатньо інформації, що зумовлено характером вимірювання функції стану та іншими факторами [3 – 5]. Цей дефіцит поповнюється шляхом розв'язанням завдань контролю розподілених систем, таких як математичне моделювання, оцінювання стану і параметрів стохастичних процесів, мінімізації кількості точок вимірювання та оптимізації їх розташування в просторовій області.

Постановка завдання. Розглянемо випадок вимірювання (оцінювання) векторного інформаційного параметра в разі впливу адитивної завади з негаусовою щільністю розподілення ймовірностей (ЩРІ).

Вибірка випадкового процесу $X_h = X(t_h)$, $h = 1, \dots, H$ є сумішшю корисного сигналу $S(\lambda, t_h)$, що містить інформацію про вимірювальні інформаційні параметри $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, і адитивної у загальному випадку негаусової завади n_h [3; 5; 6]

$$X(i_h) = S(\lambda, t_h) + n_h.$$

Вважаємо також, що результати вимірювання механічних величин являють собою функції достатніх статистик і мають асимптотичні властивості достатності, незсуненості і нормальності, а також виконані умови регулярності.

Вважаємо, що адитивна завада і вимірювальні параметри незалежні.

Розв'язання завдання. Щоб визначити оптимальну фільтрацію випадкового процесу вимірювання механічних величин, потрібно перетворити сигнал ξ з метою як найточнішого відтворення S . Щільність розподілення $p(x/\lambda)$ залежить від векторного параметра $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, $p \geq 2$. Для отримання розкладу в степеневий поліном відносно x

$$\ln p_s(x/\lambda) = \int_a^{\lambda} \sum_{i=1}^s k_i(t) [x^i - m_i(t)] dt + c_s(x), \quad (1)$$

де $c_s(x)$ – функція, яка не залежить від λ , і для збіжності за x послідовністю $\{\ln p_s(x/\lambda)\}$ до логарифма щільності розподілення $\ln p(x/\lambda)$ при $s \rightarrow \infty$ необхідно, щоб $k_i(\lambda)$ визначалися з розв’язання системи лінійних алгебричних рівнянь [3]

$$\sum_{j=1}^s k_j(\lambda) F_{ij}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} m_i(\lambda), \quad i = \overline{1, s},$$

де $F_{ij}(\lambda) = m_{i+j}(\lambda) - m_i(\lambda)m_j(\lambda)$ $i, j = \overline{1, s}$, $m_i(\lambda)$, $m_j(\lambda)$ – моменти. Згідно з розкладом (1) для знаходження оцінки векторного параметра апроксимація сумісної щільності розподілення незалежних вибірових значень буде мати вигляд

$$p_{sn}(x/\lambda) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^s h_{mi}(\lambda) \cdot t_{in} + h_0(\lambda) + c_s(x, \lambda/\lambda_m) \right\}, \quad (2)$$

де введено позначення:

$$\begin{aligned} h_{mi}(\lambda) &= \int_a^{\lambda} k_{im} dt; \\ h_0(\lambda) &= n \int_a^{\lambda} \sum_{i=\lambda}^s k_i(t) b_i(t) dt; \\ t_{in} &= \sum_{r=1}^n c_s(x_r), \end{aligned}$$

та $c_s(x, \lambda/\lambda_m)$ – функція, незалежна від складового векторного параметра.

Відповідно до теореми Крамера–Рао дисперсію будь-якої незміщеної оцінки визначаємо нерівністю [3]

$$G_{\lambda}^2 \geq \left[-m \{ d^2 \ln W_n(\lambda) / d\lambda^2 \} \right]^{-1},$$

де $W_n(\lambda)$ – функція правдоподібності.

Вважаємо, що логарифм функції правдоподібності існує і має вигляд

$$B_n = \ln W_n \{ X_h - S(\lambda, t_h) \},$$

де $W_n \{ * \}$ – ЩРІ адитивної завади.

Оцінку точності вимірювання векторного інформаційного параметра розглянемо на прикладі випадкових вібраційних процесів, що відбуваються у разі коливання фундаменту в гнучких виробничих системах, і вимірювання частоти ω , похідної частоти ω' і фази φ корисного сигналу датчиків

$$S(\lambda, t_h) = U_{mh} \cos[(\omega + 0, 2\omega' t_h) t_h + \varphi].$$

Подамо корисний сигнал (2) $S(\lambda, t_h)$ у вигляді

$$S(\lambda, t_h) = U_{mh} \cos(\lambda_1 + \lambda_2 t_h + \lambda_3 t_h^2),$$

де $\lambda_1 = \varphi$; $\lambda_2 = \omega'$; $\lambda_3 = \omega$.

Для вимірювального сигналу визначимо похідні:

$$S'_{\lambda_i}(\lambda, t_h) = U_{mh} t_h^{i-1} \sin \left(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 t_h + \hat{\lambda}_3 t_h^2 \right); \quad i = 1, 2, 3.$$

Оцінюючи інформаційні параметри за максимумом апостеріорної ЩРІ, виконуємо три рівняння:

$$\left. \frac{d}{d\lambda_1} \ln W_y(\lambda) \right|_{\lambda_1 = \hat{\lambda}} = 0; \quad \left. \frac{d}{d\lambda_2} \ln W_y(\lambda) \right|_{\lambda_2 = \hat{\lambda}} = 0; \quad \left. \frac{d}{d\lambda_3} \ln W_y(\lambda) \right|_{\lambda_3 = \hat{\lambda}} = 0.$$

Нижню межу нерівності Крамера–Рао для дисперсії незміщених спільних параметрів корисного сигналу $\lambda = \{\varphi, \omega, \omega'\}$ запишемо як [4]

$$G_{\lambda ij}^2 \geq |I_{ij}|/|I|; \quad i, j=1, 2, 3, \quad (3)$$

де $|I_{ij}|$ – алгебричне доповнення елемента I_{ij} інформаційної матриці Фішера $\|I\|$; $|I|$ – визначник матриці.

Елементи інформаційної матриці при $i \neq j$ враховують взаємну залежність оцінюваних параметрів. Якщо вимірювані параметри не залежать один від одного, інформаційна матриця спрощується, маємо

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Дисперсія параметрів при цьому буде становити

$$G_{ai}^2 = G_{aai}^2 = |I_{ii}|/|I|; \quad i=1, 2, 3.$$

Елементи матриці (4) можна виразити співвідношенням

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^H h'_{\lambda i}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, t_l, t_h) S'_{\lambda i}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, t_h) \Delta + I_{\lambda \Phi ij}, \quad (5)$$

де $H = T\Delta$ – ціла частина відношення; $\Delta = h - (h - 1)$ – інтервал тимчасових відліків; t_i – початок часу вимірювання; $S'_{\lambda j}$ – похідна від оброблюваного корисного сигналу за оцінним параметром λ_j ($j=1, 2, 3$), обумовлена при $\lambda = \hat{\lambda}$; $I_{\lambda \Phi ij}$ – складова інформаційної матриці Фішера; $h'_{\lambda i}$ – похідна за параметром λ_i ($i=1, 2, 3$), обумовлена при $\lambda = \hat{\lambda}$ від вагової функції $h(\lambda, t_l, t_h)$, що є розв'язком рівняння

$$\sum_{h=1}^H R_n(t_h - t_{h-1}) h(\lambda, t_l, t_h) \Delta = S(\lambda, t_h),$$

де $R_n(t_h - t_{h-1})$ – кореляційна функція завади, $h(\lambda, t_l, t_h) = \mu_n^2 N_n^{-2} S(\lambda, t_h)$, де $\mu_n^2 \geq 1$ – коефіцієнт, що враховує відмінність ЦПІ адитивної завади від гаусової [5]; N_n^2 – спектральна щільність завади.

Тоді співвідношення (5) набуде вигляду

$$J_{ij} = \mu_n^2 G_{n\Delta}^{-2} \sum_{h=1}^H S'_{\lambda i}(\hat{\lambda}, t_h) S'_{\lambda j}(\hat{\lambda}, t_h) + I_{\lambda \Phi ij}, \quad (6)$$

де $G_{n\Delta}^2 = N_n^2 / \Delta$ – дисперсія завади.

Підставимо у вираз (6) значення похідної $S_{\lambda i}(\hat{\lambda}, t_h)$, при $0 < t \leq T$ маємо

$$I_{ij} = 0,2 \mu_n^2 G_{n\Delta}^{-2} \sum_{h=1}^H U_{mh}^2 t_h^{i+j-2} \left[1 + \sin 2 \left(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 t_h + \hat{\lambda}_3 t_h^2 \right) \right] + I_{\lambda \Phi ij}.$$

За великої кількості вимірювань отримаємо

$$I_{ij} = \mu_n^2 \frac{U_{mh}^2}{2G_n^2} (-1)^{i+j-2} T^{i+j-2} (i+j-1)^{-1} + I_{\lambda \Phi ij}, \quad (7)$$

де $U_m = H^{-1} \sum_{h=1}^H U_{mh}$; $G_n^2 = N_n^2 (\Delta H)^{-1} = N_{nn}^2 / T$ – дисперсія адитивної завади.

Позначимо $A = U_m^2 / 2G_n^2$, що відіграє роль узагальненого відношення сигнал/завада, матрицю $[I]$ запишемо у вигляді

$$[I] = \mu_n^2 \rho \begin{bmatrix} 1 & -0,2T & 1/5T^2 \\ -0,2T & 1/3T^2 & -0,25T^3 \\ 1/5T^2 & -0,25T^3 & 0,5T^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\lambda\phi 11} & I_{\lambda\phi 12} & I_{\lambda\phi 13} \\ I_{\lambda\phi 21} & I_{\lambda\phi 22} & I_{\lambda\phi 23} \\ I_{\lambda\phi 31} & I_{\lambda\phi 32} & I_{\lambda\phi 33} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Якщо ЩРІ вимірювальних параметрів [6]

$$W_\lambda(\lambda) = (2\pi G^2)^{-1,5} D^{-0,5} \exp \left\{ -(2G^2 D)^{-0,5} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 D_{ik} (\lambda_{i-a}) (\lambda_{k-a}) \right\},$$

де G^2 і a – дисперсія і середнє значення; D – детермінант матриці R_λ , елементи якої являють собою значення нормованої кореляційної функції: D_{ik} – алгебричне доповнення елемента R_{ik} у матриці, тоді інформаційна матриця $[I_{\lambda\phi ij}]$ набуде вигляду

$$[I_{\lambda\phi ij}] = (2G^2 D)^{-1} \begin{bmatrix} 2D_{11} & D_{12} + D_{21} & D_{13} + D_{31} \\ D_{21} + D_{12} & D_{22} & D_{23} + D_{32} \\ D_{31} + D_{13} & D_{32} + D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

Визначимо кореляційну матрицю похибок (10) методом максимальної правдоподібності [3], маємо

$$[I] = \mu_n^2 \rho \begin{bmatrix} 1 & -0,2T & 1/5T^2 \\ -0,2T & 1/3T^2 & -0,25T^3 \\ 1/5T^2 & -0,25T^3 & 0,5T^4 \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці буде

$$[I] = (\mu_n^2 \rho)^3 T^\sigma / 720 \quad (9)$$

Підставимо у (3) значення (7), (9); у разі впливу негаусових адитивних завад маємо для частоти, похідної частоти, фази відповідно:

$$\begin{aligned} G_\omega^2 &\geq \{\mu_n^2 \rho T^2 / 61\}^{-1}; \\ G_{\omega'}^2 &\geq \{\mu_n^2 \rho T^4 / 240\}^{-1}; \\ G_\phi^2 &\geq \{\mu_n^2 \rho / 3\}^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Якщо об'єкт вимірювання, встановлений на поворотному столі, рухається з постійною швидкістю, тобто $\omega' = 0$, то

$$G_\omega^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^2 / 12\}^{-1}; \quad G_\phi^2 \geq \{\mu_n^2 \rho / 3\}^{-1}.$$

Нерівність (10) показує, що нижні межі дисперсії оцінок ω і ϕ значно менші, якщо їх вимірюють у середині інтервалу спостереження. Підвищення точності таких вимірювань зумовлено тим, що недиагональні елементи I_{12} , I_{21} , I_{23} , I_{32} дорівнюють нулю і лише елементи I_{13} , I_{31} відмінні від нуля. У випадку відмінності від нуля недиагональних елементів у матриці $[I]$ (8) варто враховувати наявність кореляційних зв'язків між похибками оцінок окремих вимірювальних параметрів.

Таким чином, із збільшенням ρ , T , і μ_n^2 наведена похибка вимірювання зменшується, а точність вимірювання зростає.

Висновок. Як видно з формули (10), врахування негаусового характеру адитивної завади дозволяє значно підвищити точність вимірювального параметра. Причому, чим більша ЦПІ адитивної завади відрізняється від гаусової, тим точніший отримуємо результат вимірювання.

Список літератури

1. *Координатные измерительные машины и их применение* / А. А. Гапшис, А. Ю. Каспарайтис, М. Б. Модестов и др. – М.: Машиностроение, 1988. – 328 с.
2. *Белов Ю. А.* Математическое обеспечение сложного эксперимента. – К.: Наук. думка, Т.1, 1982. – 300 с.; Т.4, 1986. – 260 с.
3. *Кунченко Ю. П.* Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. – Черкассы: ЧИТИ. – 2002. – 240 с.
4. *Сейдж Э. П., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
5. *Штейнвольф А. Л.* Расчеты и имитация негауссовых случайных вибраций. – К.: Наук. думка. – 1993. – 250 с.
6. *Артюшенко В. М., Соленов В. И.* Оценка точности измерения информационного параметра сигнала на фоне аддитивной негауссовой помехи // Вестник МГТУ. Серия Приборостроение. – 1997. – №4. – С. 9 – 14.

В. П. Квасников

Возможности повышения точности измерения механических величин координатно измерительной системой

Показано, что учет негауссового характера аддитивной помехи позволяет значительно повысить точность измеряемого параметра. Показано, что на точность фильтрации случайного процесса измерения механических величин значительно влияет учет возмущающих факторов с негауссовой плотностью распределения вероятностей.

V. P.Kvasnikov

Possibilities of exactness increase of mechanical sizes measuring of co-ordinate by the measuring system

It is shown, that the account of non-Gaussian character of additive hindrance allows considerably to promote exactness of the measured parameter. It is shown, that on exactness of casual process filtration of mechanical sizes measuring of the account of revolting factors with the non-Gaussian closeness of probability distribution influences considerably.