

УДК 519.233.2: 621.391.83 (045)

М. Ю. Заліський,
О. В. Соломенцев, д-р техн. наук

ПОСЛІДОВНИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРУ ЗСУВУ ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Розглянуто алгоритми послідовного оцінювання параметру зсуву щільності розподілу ймовірностей, визначено основні характеристики розроблених алгоритмів та отримані аналітичні співвідношення для їх розрахунку.

Ключові слова: щільність розподілу ймовірностей, послідовний алгоритм оцінювання, системи експлуатації, показники якості оцінок.

Вступ. Для забезпечення результативності та ефективності систем експлуатації технічних засобів та комплексів можливе застосування підсистем збору, оброблення, прийняття рішень, формування керувальних впливів та їх реалізацію на основі інформації про стан окремих елементів систем експлуатації.

Інформаційні сигнали стосуються поточних значень визначальних параметрів (середнє напруження на відмову, середній час відновлення, коефіцієнт готовності, коефіцієнт технічного використання, коефіцієнт оперативної готовності тощо), які в загальному випадку мають випадковий характер. Для оброблення інформаційних сигналів широко використовуються процедури (алгоритми), що ґрунтуються на методах теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, оцінювання та перевірки статистичних гіпотез. Більшість відомих результатів оброблення інформаційних сигналів отримано використанням класичного підходу, коли обсяг вибірки фіксований. Альтернативним варіантом є застосування послідовного підходу, розробленого А. Вальдом [1]. Послідовний підхід дозволяє розробити такі процедури, що характеризуються у середньому меншим обсягом спостережень, ніж еквівалентні їм процедури, що ґрунтуються на фіксованій вибірці за однакових рівнів показників якості оброблення інформаційних сигналів. Ці властивості обумовлюють актуальність застосування послідовних методів для оброблення статистичної інформації.

Постановка завдання. Аналіз літератури [1 – 4] показав, що існує певна теоретична база, присвячена питанням послідовного аналізу (синтезу та аналізу послідовних процедур перевірки простих і складних гіпотез тощо), проте недостатньо інженерних методів розрахунку ефективності послідовних процедур оцінювання.

У працях [5; 6] розглянуто декілька варіантів послідовного оцінювання параметрів щільностей розподілу ймовірностей (ЩПІ) на прикладі рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0;1]$, отримано основні аналітичні співвідношення для розрахунку основних характеристик оцінювання і тривалості спостережень, а також проведено порівняльний аналіз ефективності запропонованих та класичних процедур.

Доречно продовжувати розробляти альтернативні варіанти процедур послідовного аналізу для оцінювання параметрів та їх результативності й ефективності з метою можливого використання деяких з них в інженерній практиці під час розроблення і модернізації систем експлуатації технічних засобів, технологічних процесів та комплексів менеджменту якості систем обслуговуючого типу.

Тому у цій роботі розглянемо два можливі варіанти оцінювання параметра зсуву A рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[A; A + 1]$.

Основна частина. Як відомо, оцінювання – це статистична задача, в якій встановлюється оцінка значення параметра W , яке належить до тієї ж множини Ω , що й множина можливих рішень (тобто $W \subset \Omega$).

Розглянемо задачу послідовного оцінювання параметра зсуву ЦПІ випадкової величини, розподіленої рівномірно. При цьому модель досліджуваної вибірки Y має вигляд

$$Y = X + A,$$

де X – випадкова складова (рівномірно розподілена величина в інтервалі $[0;1]$); A – невідомий, але постійний на інтервалі спостереження параметр зсуву (тобто складова, що пов'язана з корисним сигналом).

Методикою досліджень у цьому випадку є порівняння послідовного алгоритму з класичним: визначення виграшу за тривалістю з однаковими рівнями дисперсій оцінки або виграшу за дисперсією з однаковими рівнями математичних сподівань оцінки.

Для процедури послідовного оцінювання необхідно визначити: вихідну вибірку, правило формування оцінки та правило зупину [5; 6].

Невідомими характеристиками зсуву щільності розподілу (оцінки), значення яких установлюють, можуть бути: мінімальне вибіркове значення $y_{\min}$, зсунуте середнє вибіркове значення $y_{\text{зс}}$ (визначають як половину різниці суми мінімального та максимального значень зсунутої ЦПІ й середнього значення $y_{\text{сеп}}$ тієї ж ЦПІ без зсуву), зсунуте максимальне значення $y_{\max}$ тощо.

Аналітичні вирази визначення невідомого параметра зсуву A для різних варіантів оцінювання:

- 1) для мінімального вибіркового значення

$$A_1 = y_{\min};$$

- 2) для зсунутого середнього вибіркового значення

$$A_2 = y_{\text{зс}} = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2} - \frac{1}{2};$$

- 3) для зсунутого максимального вибіркового значення

$$A_3 = y_{\max} - 1;$$

- 4) для зсунутого середнього арифметичного значення мінімального, максимального та математичного сподівань

$$A_4 = \frac{y_{\min} + y_{\max} + y_{\text{сеп}}}{3} - \frac{1}{2};$$

- 5) для зсунутої медіани y_0 вибірки

$$A_5 = y_0 - \frac{1}{2}.$$

За правило зупину використовуємо правило типу «розмах», розглянуте у праці [5]. При цьому експеримент буде продовжуватися, якщо на i -му кроці значення розмаху d (яке визначають як різницю максимального та мінімального значень вибірки) не буде перевищувати наперед заданого граничного значення розмаху $d_{\text{гр}}$ (або $1 - \Delta$, де Δ – параметр зупину). Тобто при $d < d_{\text{гр}}$ процес буде перебувати в інтервалі продовження експерименту, а при $d \geq d_{\text{гр}}$ – в інтервалі зупину.

Розглянемо окремо дві процедури, коли оцінки формуються за правилами A_1 та A_2 .

У цьому випадку можна розрізнити дві групи параметрів:

- 1) параметри оцінки ($f(y_{\min})$ та $f(y_{\text{зс}})$ – щільність розподілу мінімального значення вибірки $y_{\min}$ та зсунутого середнього значення $y_{\text{зс}}$ відповідно; $m_1(y_{\min})$ та $m_1(y_{\text{зс}})$ – математичне сподівання мінімального та зсунутого середнього значень; $\mu_2(y_{\min})$ та $\mu_2(y_{\text{зс}})$ – дисперсія мінімального та зсунутого середнього значень);

2) параметри тривалості ($f(N)$ – щільність розподілу тривалості спостережень N ; $m_1(N)$ – математичне сподівання тривалості спостережень; $\mu_2(N)$ – дисперсія тривалості спостережень).

Розглянемо основні характеристики оцінок двох процедур.

Для оцінки щільності розподілу мінімального значення вибірки $y_{\min}$ та зсунутого середнього значення $y_{\text{зс}}$ у випадку моделювання за класичною схемою можна побудувати гістограму частот (рис. 1), яка є статистичним аналогом цієї щільності. Зазначимо, що дані гістограмми отримано за обсягу вибірки $N = 1000$.

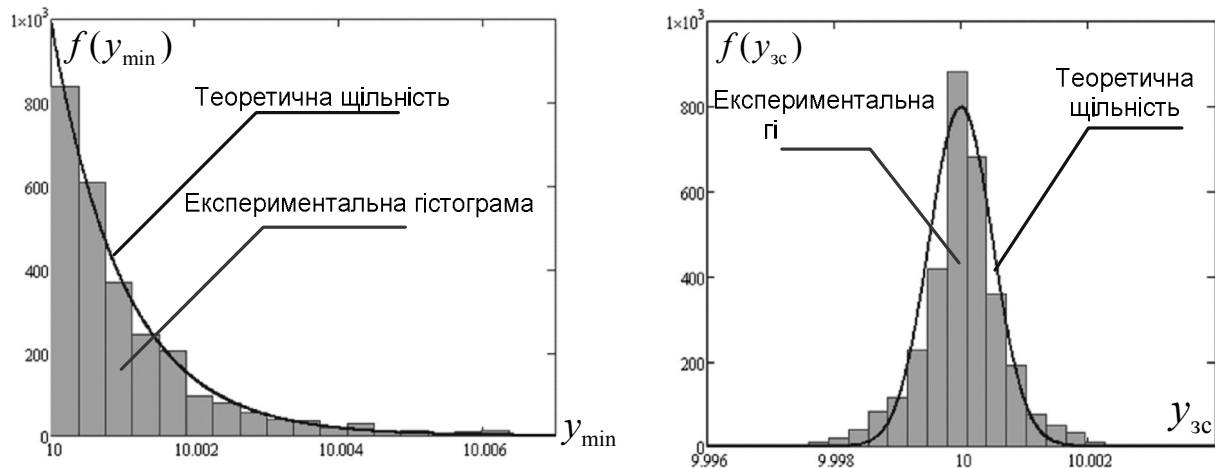


Рис. 1. Гістограми (експериментальні) та щільності розподілу (аналітичні) мінімального $f(y_{\min})$ та зсунутого середнього $f(y_{\text{зс}})$ значень вибірки (класична процедура)

Використовуючи методи теорії ймовірностей і теорії випадкових сигналів, можна показати, що аналітичні співвідношення для щільностей розподілу мінімального значення рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[a; b]$ за заданого обсягу N з високою точністю апроксимуються експоненціальним розподілом:

$$f(y_{\min}) = \frac{N}{b-a} e^{-\frac{N}{b-a}(y_{\min}-a)}, \quad y_{\min} > a.$$

У випадку, коли нижня межа розподілу випадкової величини дорівнює невідомому параметру зсуву ($a = A$), розмах дорівнює одиниці (тобто $b = A + 1$), вираз для щільності розподілу мінімального значення

$$f(y_{\min}) = N e^{-N(y_{\min}-A)}, \quad y_{\min} > A.$$

Для визначення щільності розподілу зсунутого середнього значення $y_{\text{зс}}$ необхідно знати розподіл максимального значення вибірки $y_{\max}$:

$$f(x_{\max}) = \frac{N}{b-a} e^{\frac{N}{b-a}(x_{\max}-b)}, \quad x_{\max} < b.$$

Для визначення розподілу оцінки $y_{\text{зс}}$ необхідно шляхом оберненого перетворення Фур'є знайти характеристичні функції випадкових величин $y_{\min}$ та $y_{\max}$, перемножити ці характеристичні функції і через пряме перетворення Фур'є знайти щільність півсуми цих випадкових величин з урахуванням зсуву шуканої ЩРІ на 0,5 вліво. Можна довести, що $y_{\text{зс}}$ нормально розподілена випадкова величина:

$$f(y_{\text{зс}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_{\text{зс}}-A)^2}{2\sigma^2}},$$

де $\sigma = \sigma(N, A)$ – середньоквадратичне відхилення ЦПІ, яка в цьому випадку є функцією параметра зсуву A та обсягу вибірки N .

Для процедури A_1 аналітичні співвідношення для математичного сподівання та дисперсії оцінки:

$$m_1(y_{\min}) = A + \frac{1}{N};$$

$$\mu_2(y_{\min}) = \frac{1}{N^2}.$$

Результати статистичного моделювання процедури оцінювання A_1 для класичного варіанта, якщо $A = 10$, подано на рис. 2.

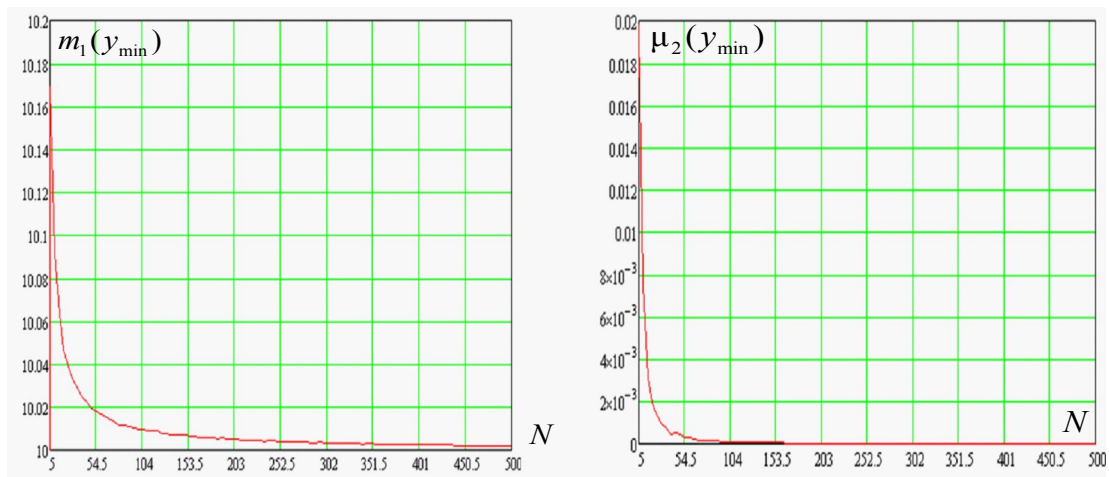


Рис. 2. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії оцінки мінімального значення вибірки від тривалості спостережень N (класична процедура)

Із графіків (рис. 2) видно, що зі збільшенням обсягу вибірки математичне сподівання оцінки $m_1(y_{\min})$ прямує до реального значення оцінки, а дисперсія $\mu_2(y_{\min})$ – до нуля. Тобто така оцінка є обґрунтованою.

Аналогічну ситуацію можна спостерігати, досліджуючи моменти для зсунутого середнього вибіркового значення (рис. 3), коли оцінки формуються за правилом A_2 , однак при цьому наявні флуктуації математичного сподівання $m_1(y_{\text{zc}})$ як згори, так і знизу від реального значення.

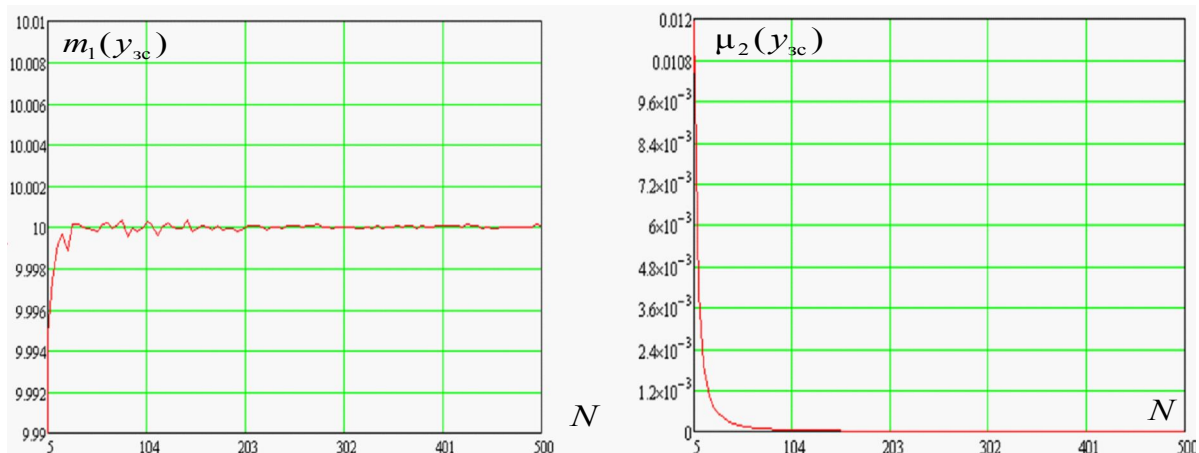


Рис. 3. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії оцінки зсунутого середнього значення вибірки від тривалості спостережень N (класичний алгоритм)

Для послідовної процедури, коли оцінки формуються за правилом A_1 , можна побудувати щільність розподілу $f_{\Pi}(y_{\min})$ мінімального вибіркового значення (рис. 4).

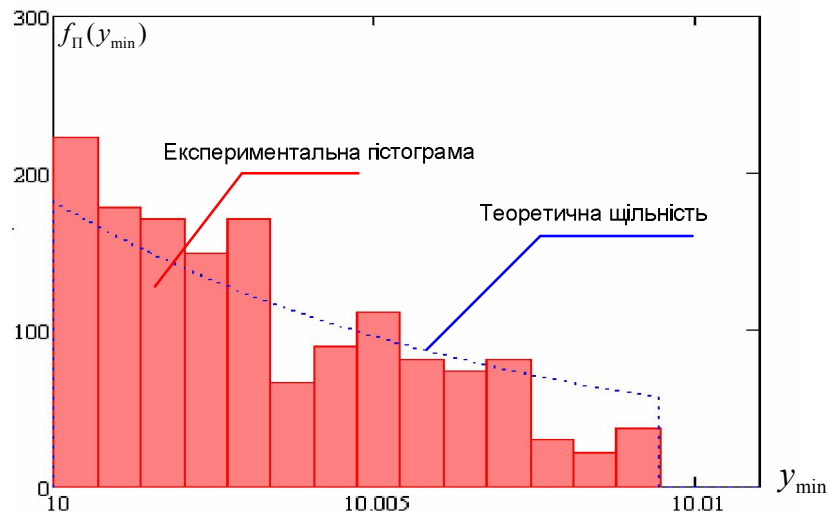


Рис. 4. Гістограма (експериментальна) та щільність розподілу (аналітична) оцінки

Аналітичний вираз для щільності розподілу оцінки:

$$f_{\Pi}(y_{\min}) = \frac{\sum_N N(N-1)(1-\Delta)^{N-2} e^{-N(y_{\min}-A)}}{\int_A^{A+1-\Delta} \left[\sum_N N(N-1)(1-\Delta)^{N-2} e^{-N(y_{\min}-A)} \right] dy_{\min}}.$$

Для перевірки ефективності запропонованого послідовного алгоритму оцінювання (у випадку, коли оцінкою є $y_{\min}$) порівняємо отримані значення дисперсій оцінки за їх однакових математичних сподівань оцінки (рис. 5). Як видно з графіка послідовна процедура дає вигравш за дисперсією (приблизно у два рази) порівняно з відповідною їй класичною процедурою.

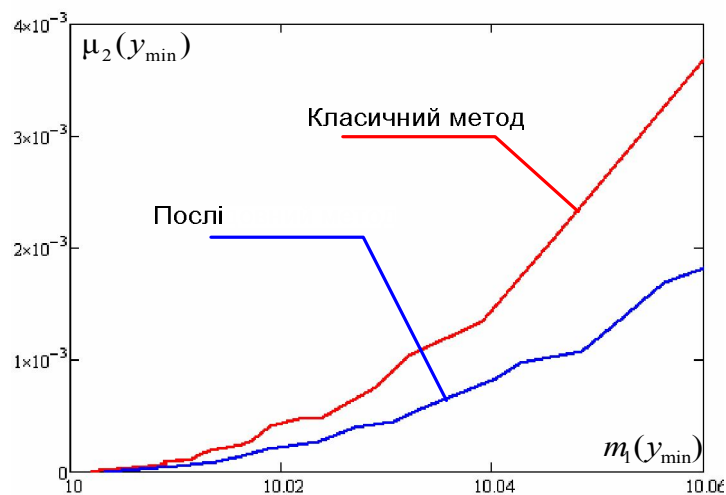


Рис. 5. Порівняння дисперсій оцінки $y_{\min}$ (класичного та послідовного методів) за однакових середніх значень оцінки

У випадку, коли оцінкою є y_{3c} , порівняємо значення дисперсій за однакових тривалостей спостережень (рис. 6). При цьому задане значення дисперсії оцінки послідовного методу можна отримати за тривалості експерименту, яка приблизно вдвічі менша, ніж у випадку аналогічної класичної схеми.

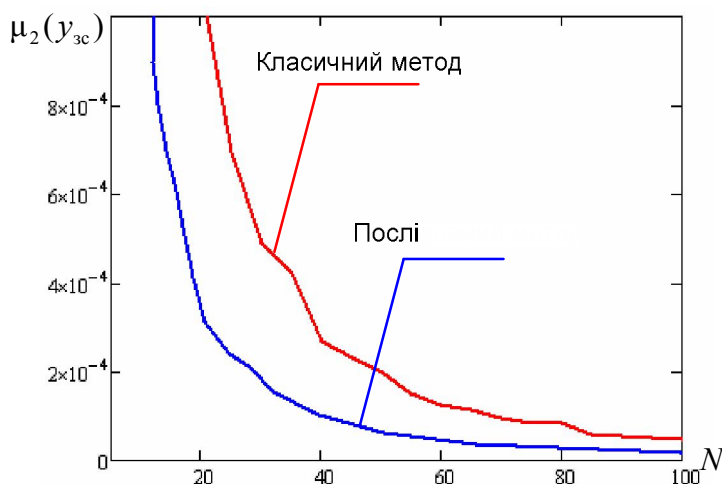


Рис. 6. Порівняння дисперсій оцінки y_{zc} за однакових тривалостей спостережень

Аналітичні співвідношення для параметрів розробленої послідовної процедури за тривалістю (ЩРІ, математичне сподівання та дисперсія тривалості спостережень) повністю збігаються з аналогічними параметрами процедури, розглянутої у праці [5].

Висновки. Отримані результати показують, що послідовний алгоритм оцінювання параметра зсуву щільності розподілу ймовірностей за однакових обсягів тривалостей спостережень відносно класичної процедури оцінювання має менші числові значення дисперсій оцінок, або менші тривалості спостережень за однакових рівнів дисперсій оцінок. Результати досліджень можуть бути використані в системах експлуатації технічних засобів та комплексів, системах менеджменту якості виробництва продукції та надання послуг тощо.

Список літератури

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Физматгиздат, 1960. – 328 с.
2. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
3. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: Наука, 1974. – 496 с.
4. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Мир, 1964. – 454 с.
5. Залиський М. Ю., Соломенцев О. В. Метод послідовного оцінювання параметрів статистичних розподілів // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2008. – Вип. 2 (24). – С. 80 – 85.
6. Залиський М. Ю., Соломенцев О. В. Про один метод послідовного оцінювання // Електроніка та системи управління: зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2009. – № 1. – С. 26 – 32.

М. Ю. Залиський, А. В. Соломенцев

Метод последовательного оценивания параметра сдвига плотности распределения вероятностей

Рассмотрены алгоритмы последовательного оценивания параметра сдвига плотности распределения вероятностей, определены основные характеристики разработанных алгоритмов и получены аналитические соотношения для их расчета

M. J. Zalisky, O. V. Solomentsev

Method of sequential evaluation of shiftstate closeness of probability distribution

One of algorithms of sequential evaluation of shiftstate parameters of closeness of probability distribution is considered, basic descriptions of the developed algorithm are certain and analytical formulas are got for their calculation