УДК 621.396.962.3/045

[1]**І. Г. Прокопенко,** д-р техн. наук,
[2]**І. П. Омельчук,**
[3]**Г. Є. Соколов,** канд. фіз.-мат. наук

СТІЙКІСТЬ КВАЗІОПТИМАЛЬНОЇ ОЦІНКИ ЧАСТОТИ ГАРМОНІЧНОГО СИГНАЛУ ДО ІМПУЛЬСНИХ ЗАВАД

[1,3]Інститут електроніки та систем управління НАУ; e-mail: arec_nau @ukr.net
[2]Науково-дослідна частина НАУ; e-mail: elsi_td @ukr.net

Визначено умови стійкості квазіоптимальної оцінки частоти гармонічного сигналу до імпульсних завад. Методом статистичного моделювання виконано аналіз залежності визначальних показників точності оцінки від параметрів хаотичних імпульсних завад.

Ключові слова: гармонічний сигнал, оцінка частоти, стійкість, імпульсна завада.

Вступ. У реальних умовах експлуатації електронних систем управління однією з важливих проблем є забезпечення стійкості алгоритмів оцінювання інформаційних параметрів корисних сигналів до дії хаотичних імпульсних завад (ХІЗ) [1], оскільки їх поява може призвести до повного спотворення результатів розрахунків. Це зокрема стосується й алгоритму квазіоптимальної оцінки частоти (КОЧ) гармонічного сигналу (надалі “сигнал”), що пропонується у праці [2].

У цій праці використовується еквідистантна модель стану сигналу в рекурентній формі $s_i = \alpha s_{i-1} - s_{i-2}$, $i = \overline{2, N-1}$ (N – розмір вибірки), у якій параметр $\alpha = 2\cos(\gamma)$ пов’язаний із нормованою частотою сигналу γ, а модель спостереження з урахуванням адитивного гаусівського шуму (надалі “шум”) η_i подається як $y_i = s_i + \eta_i$. Синтезований за методом максимальної правдоподібності алгоритм КОЧ ґрунтується на розв’язанні квадратного рівняння $\alpha^2 - B\alpha - 2 = 0$, у якому від вхідних відліків залежить тільки коефіцієнт B. Цей коефіцієнт є статистикою вигляду

$$B\left(y_1, ..., y_N\right) = \sum_{i=3}^{N}\left[\left(y_i + y_{i-2}\right)^2 - 2y_{i-1}^2\right] / \sum_{i=3}^{N}\left(y_i y_{i-1} + y_{i-2} y_{i-1}\right). \quad (1)$$

Один із коренів квадратного рівняння відкидається як хибний, а за іншим коренем α^* визначається оцінка нормованої частоти сигналу: $\gamma^* = \arccos\left(\alpha^*/2\right)$.

Одразу зауважимо, що абсолютна частота сигналу ω однозначно пов’язана з його нормованим значенням $\omega = \gamma/\tau$ (τ – інтервал дискретизації), тому надалі розглядатимемо тільки нормовану частоту, для якої використаємо скорочений термін “частота”.

Постановка завдання. Предметом роботи є дослідження впливу імпульсних завад на ефективність КОЧ сигналу, параметри якого, як і в праці [2], вважаються невідомими за умов відсутності шуму або його невідомої потужності. За таких умов модель спостережень містить ХІЗ:

$$x_i = \rho\sin\left[\gamma(i-1) + \varphi_1\right] + u_i\upsilon_i + \eta_i = s_i + u\upsilon_i + \eta_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

де: ρ, γ, φ_1 – амплітуда, нормована частота та початкова фаза сигналу відповідно; u – амплітуда імпульсу завади (ІЗ); υ_i – величина, що набуває значення 0 або 1 з імовірністю $P_{\text{ХІЗ}}$ або $(1 - P_{\text{ХІЗ}})$ відповідно; $s_i = \rho\sin\left[\gamma(i-1) + \varphi_1\right]$ – сигнальна складова відліку. Одразу означимо “крайні зони” пачки такими, що об’єднують по два крайні її відліки: x_1, x_2 – ліва та x_{N-1}, x_N – права зони.

З опису алгоритму КОЧ видно, що суттєвим з погляду статистичної оцінки частоти є тільки розрахунок коефіцієнта *B*, оскільки подальша обробка детермінована. Саме у такому ракурсі й будуть виконуватися аналітичні дослідження. Для цього з використанням позначень моделі сигналу (2) перетворимо формулу (1), замінюючи межі сум, до еквівалентного вигляду

$$B\left(x_1, ..., x_N\right) = \left(x_N^2 - x_{N\text{-}1}^2 - x_2^2 + x_1^2 + 2\sum_{i=3}^{N} x_i x_{i-2}\right) \Big/ \left(x_2 x_1 - x_N x_{N\text{-}1} + 2\sum_{i=3}^{N} x_i x_{i\text{-}1}\right) = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(x_1, ..., x_N\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(x_1, ..., x_N\right)}, \quad (3)$$

де $\Sigma_{\text{ЧС}}$ та $\Sigma_{\text{ЗН}}$ – чисельник та знаменник дробу. Зазначимо, що за умов відсутності ІЗ та шуму коефіцієнт B залежить лише від частоти сигналу:

$$B\left(s_1, ..., s_N\right) = \Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right) / \Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right) = \cos 2\gamma / \cos\gamma\,. \quad (4)$$

Стійкість КОЧ будемо оцінювати як залежність показників її ефективності від параметрів сигналу, завади та шуму. Спочатку дослідимо поведінку коефіцієнта *B* для ідеалізованих ситуацій з використанням різного виду детермінованих імпульсних завад (ДІЗ), коли у пачці є один або два імпульси. Хоча на практиці положення та кількість ІЗ апріорно невідомі, але розуміння характеру стійкості КОЧ до моделей ДІЗ дозволяє надалі адекватно трактувати результати статистичного моделювання за умови дії ХІЗ, яке здійснюється потім.

Аналіз стійкості оцінки до одного імпульсу завади без шуму. У найпростішому варіанті моделі пачки (2) без шуму та з одним ІЗ, який розміщується у довільному відліку r, але поза крайніми зонами пачки, формулу (3) після тотожних перетворень можна подати в такій компактній формі:

$$B\left(s_1, ..., s_{r\text{-}1}, s_r + u_r, s_{r+1}, ..., s_N\right) = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right) + U_{r,2}\left(u_r, s_{r-2}, s_{r+2}\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right) + U_{r,1}\left(u_r, s_{r-1}, s_{r+1}\right)}. \quad (5)$$

Причому відношення додаткових доданків знаменника та чисельника дорівнює:

$$U_{r,2} / U_{r,1} = u_r\left(s_{r-2} + s_{r+2}\right) / u_r\left(s_{r-1} + s_{r+1}\right) = \cos 2\gamma / \cos\gamma\,. \quad (6)$$

Тоді на підставі виразів (4) та (6) маємо рівність

$$U_{r,2}\left(u_r, s_{r-2}, s_{r+2}\right) / U_{r,1}\left(u_r, s_{r-1}, s_{r+1}\right) = \Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right) / \Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right). \quad (7)$$

Суттєвим для подальшого аналізу є визначення достатніх умов інваріантності дробу загального вигляду $D = A / B$ до сум додаткових доданків (в однаковій кількості *K*) у його чисельнику та знаменнику: $\sum_{i=1}^{K} a_i$ та $\sum_{i=1}^{K} b_i$. Тобто потрібно виконати тотожність:

$$D = \frac{A}{B} \equiv \left(A + \sum_{i=1}^{K} a_{\mathrm{i}}\right) \Big/ \left(B + \sum_{i=1}^{K} b_{\mathrm{i}}\right). \quad (8)$$

Доведемо, що такими вимогами інваріантності є дотримання всіх рівностей:

$$a_1 / b_1 = a_2 / b_2 = ... = a_K / b_K = D\,. \quad (9)$$

Для цього запишемо з виразів (8) та (9) такі допоміжні рівності:

$$A / D = B \quad \text{та} \quad a_i = b_i D\,, \quad i = \overline{1, K}\,;$$

підставивши їх у формулу (8) та виконавши епементарні перетворення, отримаємо тотожність

$$\left(A+\sum_{i=1}^{K} b_i D\right) / \left(B+\sum_{i=1}^{K} b_i\right) = D\left(\frac{A}{D}+\sum_{i=1}^{K} b_i\right) / \left(B+\sum_{i=1}^{K} b_i\right) \equiv D,$$

що й треба було довести.

Рівність (7) саме й означає виконання вимог інваріантності (9) дробу (5) до додаткових доданків $U_{r,1}$, та $U_{r,2}$. А це означає, що B не залежить від амплітуди ІЗ:

$$B\left(s_1, .., s_{r-1}, s_r + u_r, s_{r+1}, .., s_N\right) = B\left(s_1, .., s_r, .., s_N\right),$$

тобто КОЧ є стійкою (інваріантною) до ІЗ, якщо він перебуває поза крайніми зонами.

Далі розглянемо вплив на КОЧ одного ІЗ, коли він перебуває в крайніх зонах пачки. Наприклад, якщо $r = 1$ (аналогічно для $r = N$), то з формули (3) маємо:

$$B\left(s_1 + u_1, s_2, ..., s_N\right) = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right) + u_1^2 + 2u_1\left(s_1 + s_3\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right) + u_1 s_2}.$$

Звідси виходить, що вимоги інваріантності (9) до додаткових доданків не виконуються. Подібним чином можна показати, що це стосується й варіантів, коли $r = 2$ або $r = N - 1$.

Таким чином, виникає "крайовий ефект", який виявляється у тому, що КОЧ стає чутливою до наявності хоча б одного ІЗ, якщо він пошкоджує один з відліків крайніх зон.

Аналіз стійкості оцінки до двох імпульсів завади без шуму. Для варіанта моделі пачки без шуму з двома ІЗ, які перебувають у довільних її відліках r та k, але поза крайніми зонами, а відстань між ними більша за критичну $|r-k| > 2$, формулу (3) після тотожних перетворень можна записати у компактній формі:

$$B\left(\overline{s_1, s_N}, u_r, u_k\right) = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right) + U_{r,2}\left(u_r, s_{r-2}, s_{r+2}\right) + U_{k,2}\left(u_k, s_{k-2}, s_{k+2}\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right) + U_{r,1}\left(u_r, s_{r-1}, s_{r+1}\right) + U_{k,1}\left(u_k, s_{k-1}, s_{k+1}\right)}, \tag{10}$$

де порівняно з формулою (5) з'явилася друга пара додаткових доданків. Аналогічно до виразу (6) можна довести, що і тут задовольняються вимоги інваріантності (9) дробу до цих пар додаткових доданків, а саме:

$$\frac{U_{r,2}}{U_{r,1}} = \frac{U_{k,2}}{U_{k,1}} = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right)} = \frac{\cos 2\gamma}{\cos\gamma}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнт B не залежить від амплітуди імпульсів u_{r} та u_{k}: $B\left(\overline{s_1, s_{\text{N}}}, u_{\text{r}}, u_{\text{k}}\right) = B\left(\overline{s_1, s_{\text{N}}}\right)$, тобто КОЧ є також стійкою до наявності двох ІЗ, якщо вони знаходяться поза крайніх зон, а відстань між ними більша за критичну.

Далі розглянемо варіант, коли обидва ІЗ знаходяться поза крайніми зонами пачки, але відстань між ними вже критична $|r-k| \le 2$. Наприклад, якщо $k = r + 1$, то формулу (3) можна перетворити до такого вигляду:

$$B\left(\overline{s_1, s_N}, u_r, u_k\right) = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(s_1, ..., s_N\right) + U_{r,2}\left(u_r, s_{r-2}, s_{r+2}\right) + U_{k,2}\left(u_k, s_{k-2}, s_{k+2}\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(s_1, ..., s_N\right) + U_{r,1}\left(u_r, s_{r-1}, s_{r+1}\right) + U_{k,1}\left(u_k, s_{k-1}, s_{k+1}\right) + 2u_r u_k}.$$

Порівняно з формулою (10) знаменник цього дробу має додатковий мультиплікативний член $u_{\text{r}}u_{\text{k}}$ з амплітуд імпульсів завади. Аналогічно можна показати, що для випадку $k = r + 2$ додатковий мультиплікативний член з'являється вже у чисельнику. Тобто в обох цих випадках порушуються вимоги інваріантності (9) до додаткових доданків, і КОЧ є чутливою до такої пари ІЗ. Це ж саме можна довести, якщо у пачці наявні три або більше ІЗ.

Вплив шуму на стійкість оцінки частоти до детермінованих імпульсних завад. Спочатку детально розглянемо варіант, коли один ІЗ розміщується поза крайніми зонами. Уведемо множину нових змінних $\hat{x}_i = x_i - u_i$, $i = \overline{1, N}$ та запишемо формулу (2) у вигляді

$$B\left(s_1 + \eta_1, ..., s_{r\text{-}1} + \eta_{r\text{-}1}, s_r + u_r + \eta_r, s_{r+1} + \eta_{r+1}, ..., s_N + \eta_N\right) = \frac{\Sigma_{\text{ЧС}}\left(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_N\right) + 2u_r\left(\eta_{r\text{-}2} + \eta_{r+2}\right)}{\Sigma_{\text{ЗН}}\left(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_N\right) + 2u_r\left(\eta_{r\text{-}1} + \eta_{r+1}\right)}.$$

Чисельник та знаменних цього дробу містять додаткові доданки нового типу, які утворюються як мультиплікативні поміж амплітудою ІЗ та шумом. Вочевидь, відношення цих доданків має випадкове значення, тобто вимоги інваріантності (9) до додаткових доданків у цьому випадку також не виконуються.

Таким чином, вплив шуму на стійкість КОЧ полягає, окрім суто шумового фактора, ще й у тому, що він "виявляє" імпульсну заваду. Аналогічно можна показати, що мультиплікативні доданки утворюються для всіх моделей імпульсних завад. Це дає можливість зробити загальний висновок, що за наявності шуму КОЧ завжди є чутливою до дії імпульсних завад незалежно від місця їх розташування в пачці.

Статистичний аналіз показників ефективності КОЧ. Ефективність КОЧ за умов одночасної наявності ХІЗ та шуму аналізували шляхом статистичного моделювання. Заздалегідь було отримано за різних значень параметрів сигналу, імпульсної завади та шуму сім'ю гістограм розподілу ймовірностей статистичної оцінки частоти γ^*. Дві з них як приклад показано на рис. 1 та 2 для двох розмірів пачки N = 16 та 64 за таких параметрів моделювання: кількість реалізацій пачок – 10000; амплітуда та частота сигналу – 1 В та 0,5 рад/с; амплітуда та ймовірність ХІЗ – 10 В та 0,05; середньоквадратичне відхилення (СКВ) шуму – 0,1В.

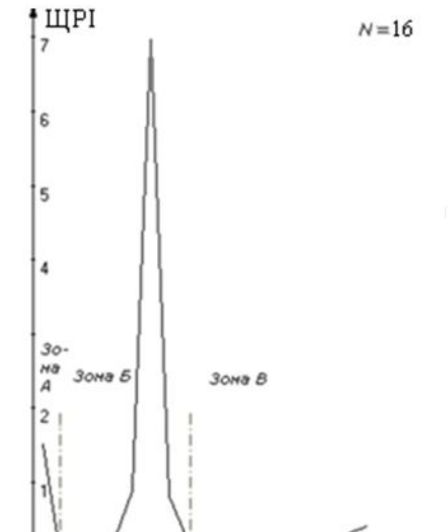

Рис. 1. Гістограма оцінки γ^*: N=16

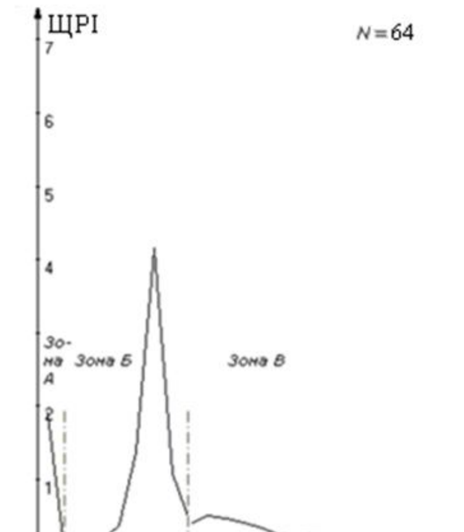

Рис. 2. Гістограма оцінки γ^*: N=64

Форми гістограм дають змогу оцінити вплив параметрів суміші пачки на похибку оцінки частоти. Насамперед привертає увагу незвичний характер залежності точності від розміру пачки: вона погіршується з його збільшенням. Це є проявом властивості, що КОЧ дуже чутлива до імпульсів завад, коли відстань між ними є критичною, а зі збільшенням розміру пачки ймовірність таких подій суттєво зростає. Проте, як показали інші дослідження, коли потужність шуму домінує над енергетикою ХІЗ, то збільшення розміру пачки вже сприяє зменшенню похибки.

Другою принциповою ознакою є те, що всі отримані щільності розподілу ймовірностей (ЩРІ) оцінок частоти мають суттєво негаусівський вигляд. У такому випадку стандартні статистичні показники – СКВ та зміщення оцінки – не можуть бути застосовані для визначення ефективності КОЧ, оскільки їх значення значною мірою залежать від аномальних оцінок. Виділимо три характерні зони ЩРІ, які назвемо зліва направо: “зона збоїв” (А), “достовірна зона” (Б) та “зона викидів” (В), та введемо на підставі цього ще два додаткові визначальні показники ефективності КОЧ: ймовірність збою та достовірність оцінки.

Події типу “збій” зумовлюються появою в розрахунках алгоритму КОЧ некоректної операції, коли абсолютне значення аргументу функції «арккосинус» стає більшим за одиницю. У процесі статистичного досліду таким оцінкам частоти умовно призначаються нульові значення, які й формують зону збою.

“Достовірність оцінки” означимо як імовірність попадання оцінки частоти у достовірну зону ЩРІ. Суттєвим у такій ситуації є те, що внаслідок невідомості істинного значення частоти неможливо апріорно встановлювати межу розподілу цієї зони та зони викидів, а вона повинна визначатися окремо для кожної емпіричної ЩРІ. Після того СКВ та зсув оцінки доцільно вже розраховувати як умовні за значеннями оцінок частоти, що розміщені суто у достовірній зоні.

Таким чином, після відкидання нульових оцінок виникає задача розшарування ЩРІ на дві підвибірки – достовірну та викидів. Евристичні методи розшарування докладно розглянуті у [1], де як найбільш ефективні зазначені алгоритми, що використовують порядкові статистики. У цій роботі запропонований та використовується модифікований алгоритм розшарування, який базується на обробці гістограми випадкової величини за таким правилом:

$$j = \arg\min\left\{k_S\left(\sigma_д^2+\sigma_в^2\right)\right\},$$

де: j – номер інтервалу гістограми, за яким здійснюється розшарування; $k_S = 1/\left|p_Д - p_В\right|^2$ – нормувальний коефіцієнт; $p_д, p_в, \sigma_д^2, \sigma_в^2$ – імовірності та дисперсії достовірної підвибірки та підвибірки викидів. Нормувальний коефіцієнт забезпечує в процесі ітераційного пошуку зміщення межі розшарування до правого краю ЩРІ, якщо ХІЗ має малу ймовірність або взагалі немає.

На рис. 3 – 4, як приклад, наведено сім’ї залежностей визначальних показників КОЧ від імовірності ХІЗ ($P_{ХІЗ}$) для різних її амплітуд (U); розмір пачки при моделюванні дорівнював 32 відліки, а СКВ шуму становило 0,3 В. Визначальними ознаками є суттєве зменшення

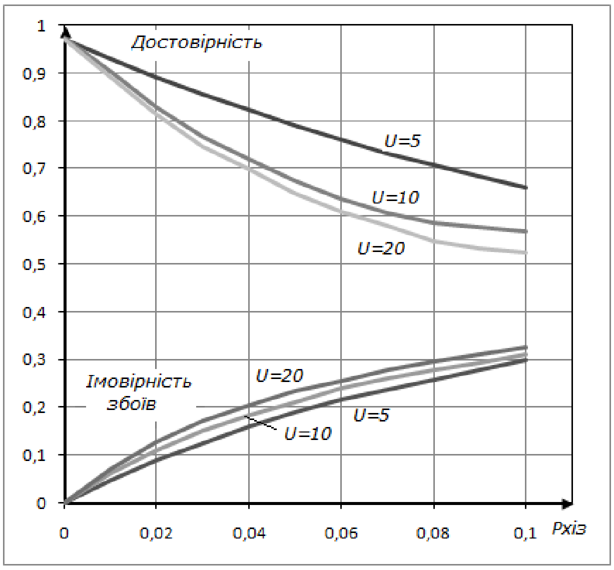

Рис. 3. Імовірнісні показники

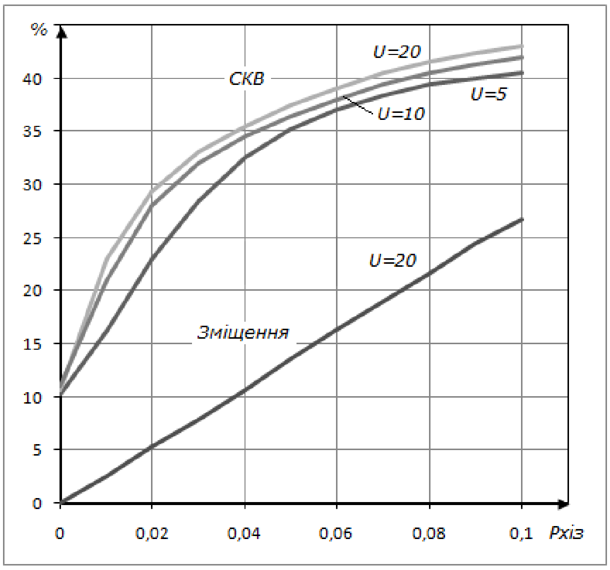

Рис.4. Показники точності

чутливості КОЧ до амплітуди ХІЗ, якщо вона перевищує 10 В, та мала залежність від неї зміщення оцінки; тому на рисунках показано ці криві лише для випадку $U = 10$ В.

За результатами комплексу статистичних досліджень, що у цій роботі не наводяться, встановлені також інші основні властивості КОЧ гармонічного сигналу:

– усі визначальні показники погіршуються із зменшенням частоти сигналу, але майже не залежать від початкової його фази;

– збільшення потужності шуму, поряд з погіршенням точності оцінки у достовірній зоні ЩРІ, призводить також до суттєвого збільшення імовірності збоїв; але вплив значення потужності на ймовірність викидів незначний.

– імовірність викидів приблизно пропорційна ймовірності ХІЗ.

Висновки.

1. Казіоптимальна оцінка частоти гармонічного сигналу без шуму зберігає абсолютну стійкість до групи ІЗ, якщо всі вони розміщені поза крайніми зонами пачки, та відстань між всіма суміжними імпульсами більша за два інтервали дискретизації.

2. Наявність шуму, навіть з додержанням умов п. 1, сприяє появі значної чутливості казіоптимальної оцінки частоти до імпульсних завад.

3. Щільність розподілу імовірності оцінки частоти за умов дії ХІЗ та шуму має тримодову форму, згідно чому ефективність казіоптимальної оцінки частоти необхідно оцінювати за чотирма визначальними показниками: ймовірність збою, достовірність оцінки та умовні СКВ і зміщення оцінки, що розраховуються лише за значеннями, які належать достовірній зоні.

Список літератури

1. *Э. А. Корнильев* Устойчивые алгоритмы в автоматизированных системах обработки информации. / Э. А. Корнильев, И. Г. Прокопенко, В. М. Чуприн – К.: Техніка, 1989. – 224 с.
2. *І. Г. Прокопенко* Квазіоптимальна оцінка частоти гармонічного сигналу на обмеженому інтервалі спостереження / І. Г. Прокопенко, І. П. Омельчук // Електроніка та системи управління. – 2009. – № 1 (19). – С. 39 – 45.
3. *Е. И. Куликов* Оценка параметров сигналов на фоне помех. / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов – М.: Сов. радио, 1978. – 296 с.

И. Г. Прокопенко, И. П. Омельчук, Г. Е. Соколов

Устойчивость квазиоптимальной оценки частоти гармонического сигнала к импульсным помехам

Определены условия устойчивости квазиоптимальной оценки частоти гармонического сигнала к различного рода импульсным помехам. Методом статистического моделирования выполнен анализ зависимостей определяющих параметров точности оценки от параметров хаотических импульсных помех.

I. G. Prokopenko, I. P. Omelchuk, G. E. Sokolov

Suboptimal frequency estimations of a harmonious signal stability to a pulse interference

Stability conditions of suboptimal frequency estimations of a harmonious signal to a pulse interference are defined. The analysis of an estimation accuracy indicators dependence on parameters of chaotic pulse interference is carried out.