УДК 629.735.051-52(045)

А. А. Зеленков, канд. техн. наук, проф.,
А. П. Голик, асп.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРОЦЕССОВ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОМ ПРОБЕГЕ И РАЗБЕГЕ

Институт электроники и систем управления НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua

Предложен параметрический алгоритм оценки вероятности нахождения процесса бокового отклонения самолета в допустимой области на заданном интервале времени в режимах автоматической посадки и автоматизированного взлета. Алгоритм основан на измерении экстремальных значений параметра.

Введение и постановка задачи Задача оценки точностных характеристик бокового движения самолета в процессе автоматизированного разбега и пробега состоит в оценке вероятностных характеристик распределения параметров бокового движения. Управление боковым движением при разбеге и пробеге осуществляется с целью удержания самолета на ВПП при всех допустимых воздействиях и начальных условиях. Определяющим параметром бокового движения самолета на ВПП является боковое отклонение от ВПП $z(t)$, $t \in T$, где T временной интервал длительности процесса разбега (пробега). В соответствиями с требованиями технические характеристики системы управления при разбеге должны быть такими, чтобы вероятность смещения осевой линии самолета в месте установки основного шасси более чем на 5 м от оси ВПП при любом взлете составляла меньше 0,05. Кроме того (при использовании работоспособной при одном отказе системы управления) вероятность отклонения одной стойки шасси от оси ВПП на величину более 21,3 м (при ширине полосы 45 м) не должна превышать 10^{-6}.

Автоматическое управление послепосадочным пробегом должно осуществляться таким образом, чтобы в процессе любой посадки боковое отклонение самолета от оси ВПП не превышало 8,2 м с вероятностью 0,95

Таким образом, требования к точности автоматического управления боковым движением самолета в процессе разбега и пробега задаются следующими условиями:

$$\Pr\{z(t) \in D_1 / t \in T\} \geq 0{,}95,$$

$$\Pr\{z(t) \in D_2 / t \in T\} \geq 1 - 10^{-6} = 0{,}9_6,$$

где $D_1 = [-5; 5]$ м для процесса разбега и $D_1 = [-8{,}2; 8{,}2]$ м для процесса пробега, а $D_2 = [-21{,}3; 21{,}3]$ м. Тогда задача оценки точностных характеристик бокового движения самолета в процессе пробега и разбега – это задача оценки вероятности нахождения случайного процесса в соответствующей допустимой области на ограниченном интервале *T*.

Решение задачи Очевидно, что если хотя бы одно значение процесса $z(t)$ вышло за допустимую область на интервале *T*, то $z(t) \notin D$. Если таких значений несколько, то среди них есть обязательно экстремальное, очевидно также, что экстремальные значения находятся и в реализациях , для которых $z(t) \in D$. Это позволяет перейти от задачи анализа процесса на интервале T к эквивалентной задаче анализа экстремальных значений процесса на этом же интервале. Одним из возможных подходов к ее решению является анализ распределения размаха экстремальных значений $W = z_{\max} - z_{\min}$.

Если предположить нормальность распределения исходной выборки, то закон распределения размаха выборки известен [1]. Тогда оценка неизвестного среднеквадратического отклонения σ случайного процесса $z(t)$ на интервале T может быть проведена с помощью размаха $W_n = z_{(n)} - z_{(1)}$ (максимальный и минимальный члены

вариационного ряда объемом n). Если $d_n = M\left\{W_n \middle/ \sigma\right\}$, то отношение $W_n \middle/ d_n$ представляет собой оценку для среднеквадратического отклонения

$$\sigma = M\left\{\frac{W_n}{d_n}\right\};$$

дисперсия которой равна

$$D\left\{\frac{W_n}{d_n}\right\} = \frac{D\{W_n\}}{d_n^{\,2}} = \sigma^2 \frac{D_n}{d_n^{\,2}}.$$

Значения D_n, d_n $D_n \middle/ d_n^{\,2}$ табулированы в работе [2].

Если $W_n^{(1)}, W_n^{(2)}, \ldots, W_n^{(k)}$ – выборочные размахи в каждой реализации $z_k(t)$, полученные по k подвыборкам одинакового объема n, тогда средний размах $\overline{W}_{n,k}$ определяется выражением

$$\overline{W}_{n,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} W_n^{(k)},$$

а арифметическое среднее

$$\frac{\overline{W}_{n,k}}{d_n} = \frac{1}{kd_n}\sum_{i=1}^{k} W_n^{(k)}$$

представляет собой несмещенную оценку для неизвестного параметра σ. Если n = const, а k достаточно велико ($k \to \infty$), то доверительный интервал для σ с коэффициентом доверия γ определяется неравенствами (погрешность $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$)

$$\frac{\overline{W}_{n,k}}{d_n + \Psi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\sqrt{\frac{D_n}{k}}} < \delta < \frac{\overline{W}_{n,k}}{d_n - \Psi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\sqrt{\frac{D_n}{k}}},$$

где $\Psi(\bullet)$ – функция, обратная функции нормального распределения.

Для уточнения приближенных доверительных границ можно использовать приближение Кокса к среднему размаху

$$\frac{\overline{W}}{\sigma} = \frac{c\chi_\gamma^2}{\nu},$$

где постоянные c и ν определяются из равенства первых двух моментов левой и правой частей d_n и D_n, значения которых в зависимости от объема измерений n приведены в таблицах [2].

Для определения коэффициентов c и ν предлагается следующая процедура вычисления:

– вспомогательной величины

$$A(n,k) = \frac{2D_n}{kd_n^{\,2}};$$

– значения коэффициента ν (число степеней свободы)

$$\nu = A^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16}A + \frac{3}{16}A^2;$$

– значения масштабного множителя *c*

$$c = d_n\left(1-\frac{1}{4\nu}+\frac{1}{32\nu^2}+\frac{5}{128\nu^3}\right)^{-1}.$$

Таким образом, при вычисленном значении числа степеней свободы ν и при заданном уровне доверия γ можно вычислить процентные точки χ^2-распределения и построить доверительный интервал на среднеквадратическое отклонение σ:

$$\chi_1^2 = \chi^2\left[\nu,\ \frac{1-\gamma'}{2}\right],\quad \chi_2^2 = \chi^2\left[\nu,\ \frac{1+\gamma'}{2}\right],\quad \gamma' = \sqrt{\gamma}\ .$$

Так как

$$\Pr\left\{\chi^2 \in [\chi_1^2,\ \chi_2^2]\right\} = \gamma',$$

то

$$\Pr\left\{\frac{c}{\gamma}\chi_1^2 \le \frac{\overline{W}_{n,k}}{\sigma} \le \frac{c}{\nu}\chi_2^2\right\} = \gamma',$$

откуда нижняя и верхняя границы доверительного интервала определяются из

$$\frac{c\chi_1^2}{\nu\overline{W}_{n,k}} \le \frac{1}{\sigma} \le \frac{c\chi_2^2}{\gamma\overline{W}_{n,k}},$$

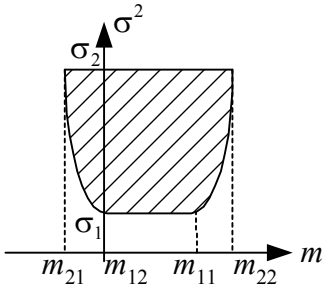
так что

$$\sigma_1 = \frac{\nu\overline{W}_{n,k}}{c\chi_2^2},\quad \sigma_2 = \frac{\nu\overline{W}_{n,k}}{c\chi_1^2},$$

а

$$\Pr\left\{\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2\right\} = \gamma'.$$

Вычисляя доверительный интервал на математическое ожидание *m*, можно построить доверительную область на параметр $\theta = \{m, \sigma\}$, рисунок.



Доверительная область на параметр θ

Это, в свою очередь, позволяет определить верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала для вероятности *P* нахождения случайного процесса длительностью *T* в допустимой области (допусковой трубке) [3]. При известной оценке среднего

$$\bar{x} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} z_{ij}$$

строится доверительный интервал

$$u_1 \le \frac{m-\bar{x}}{\sigma}\sqrt{kn} \le u_2,$$

где

$$u_1 = u\left[\frac{1-\gamma'}{2}\right],\quad u_2 = u\left[\frac{1+\gamma'}{2}\right]$$

являются квантилями нормального распределения соответствующего уровня.

Координаты крайних точек доверительной области определяются из соотношений:

$$\{m_{11},\sigma_1\}=\left[\bar{x}+\frac{u_2\sigma_1}{\sqrt{kn}},\ \sigma_1\right],\quad \{m_{12},\sigma_1\}=\left[\bar{x}-\frac{u_2\sigma_1}{\sqrt{kn}},\ \sigma_1\right];$$

$$\{m_{22},\sigma_2\}=\left[\bar{x}+\frac{u_1\sigma_2}{\sqrt{kn}},\ \sigma_2\right],\quad \{m_{21},\sigma_2\}=\left[\bar{x}-\frac{u_1\sigma_2}{\sqrt{kn}},\ \sigma_2\right].$$

Определив максимальные и минимальные значения математического ожидания как

$$m_{\max}=\max\left\{\left|m_{ij}\right|\right\},\quad m_{\min}=\min\left\{\left|m_{ij}\right|\right\},$$

можно рассчитать верхнюю и нижнюю границы для вероятности P:

$$\underline{P}=\Phi\left(\frac{b-m_{\max}}{\sigma_2}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_{\max}}{\sigma_2}\right);$$

$$\overline{P}=\Phi\left(\frac{b-m_{\min}}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_{\min}}{\sigma_1}\right),$$

где a и b – границы допусковой трубки на процесс бокового отклонения самолета при разбеге (пробеге); $\Phi(\bullet)$ – функция нормального распределения.

Пример. После проведения $k=100$ автоматизированных разбегов в летных испытаниях была проведена обработка результатов бокового отклонения самолета от оси ВПП. Для определения размаха в каждой реализации шаг дискретизации был выбран 0,5 с.

Эффективный объем измерений в каждой реализации (с учетом корреляционной зависимости) $n=7$. Средний размах по всем выборкам $\overline{W}_{n,k}=4,275$ м, а среднее значение процесса бокового отклонения на интервале T $\overline{m}=1,45$ м. Определим с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ верхнюю и нижнюю границы вероятности нахождения реализаций бокового отклонения в допустимой «трубке» ± 5 м на интервале T.

Значения масштабного множителя c и числа степеней свободы ν определяются из приведенных выше соотношений (при $n=7$: $d_n=2,70436,\ D_n=0,69424$ [2]) соответственно равны: $c=2,7031, \nu=526,98$. Тогда процентные точки χ^2 - распределения равны $\chi_1^2=456,2$; $\chi_2^2=603,27$. Таким образом, нижняя граница доверительного интервала для σ равна

$$\sigma_1=\frac{\nu\overline{W}_{n,k}}{c\chi_2^2}=\frac{4,275\cdot 526,98}{2,7031\cdot 603,27}=1,3815\text{ м},$$

а верхняя граница:

$$\sigma_2=\frac{\nu\overline{W}_{n,k}}{c\chi_1^2}=1,8269\text{ м}.$$

Определяем верхнюю и нижнюю границы для математического ожидания (для σ_1 и σ_2 соответственно):

$$m_{11}=\overline{m}+\frac{u_2\sigma_1}{\sqrt{kn}}=1,45+\frac{2,242\cdot 1,3815}{\sqrt{700}}=1,567\text{ м};$$

$$m_{12}==1,45-\frac{2,242\cdot 1,3815}{\sqrt{700}}=1,3329\text{ м};$$

$$m_{22}=1,6048\text{ м},\quad m_{21}=1,2952\text{ м}.$$

Максимальное и минимальное значения математического ожидания равны:

$$m_{\max}=\max\left\{\left|m_{ij}\right|\right\}=1,6048,\qquad m_{\min}=\min\left\{\left|m_{ij}\right|\right\}=1,2952.$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности P нахождения случайного процесса разбега $z(t)$ в допустимой «трубке» ± 5 м:

$$\underline{P} = \Phi\left(\frac{5-1,6048}{1,8269}\right) - \Phi\left(\frac{-5-1,6048}{1,8269}\right) = 0,9683;$$

$$\overline{P} = \Phi\left(\frac{5-1,2952}{1,3815}\right) - \Phi\left(\frac{-5-1,2952}{1,3815}\right) = 0,9963.$$

Другим подходом решения поставленной задачи является использование аналитических выражений для функции и плотности распределения максимальных значений в выборке размера n.

Известно [4], что распределение максимумов случайного стационарного процесса задаются выражениями:

$$F_{\max}(x) = F^n(x),$$

$$f_{\max}(x) = F'_{\max}(x) = n\, f(x) F^{n-1}(x).$$

Если n велико, то можно использовать некоторые общие асимптотические результаты, которые зависят от класса исходного распределения $F(x)$.

Например, представляя $F_{\max}(x)$ в виде

$$F_{\max}(x) = F^n(x) = \left\{1 - \frac{n[1-F(x)]}{n}\right\}^n \cong \exp\{-n[1-F(x)]\},$$

получаем асимптотическое выражение, позволяющие получить распределение максимальных значений параметра в зависимости от объёма выборки и статистических характеристик генеральной совокупности.

Аналогично можно получить

$$F_{\min}(x) \cong 1 - \exp\{-nF(x)\}.$$

Для описания распределения экстремальных значений параметров движения на интервале T может быть также использована статистическая модель вида

$$f_{\max}(x) = \frac{2x}{\theta^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{\theta^2}\right\},$$

принадлежащая семейству распределений Вейбулла $F(b,c)$ с параметрами θ и $c = 2$.

Известно, что для статического определения параметров θ и c используется метод максимального правдоподобия, который приводит к уравнениям:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{rC}{\theta} + \frac{c}{\theta^{c+1}}\left[\sum_{i=1}^{r} x_{(i),n}^c + (n-r)x_{(r),n}^c\right] = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = \frac{r}{c} - \sum_{i=1}^{r} \ln x_{(i),n} - \frac{1}{\theta^c}\left[\sum_{i=1}^{r} x_{(i),n}^c \ln\left(\frac{x_{(i),n}}{\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + (n-r)x_{(r),n}^c \ln\left(\frac{x_{(i),n}}{\theta}\right)\right] - \ln\theta = 0,$$

где r – параметр усечения выборки, откуда

$$\theta^* = \left[\frac{\sum_{i=1}^{r} x_{(i),n}^{c^*} + (n-r)x_{(i),n}^{c^*}}{r}\right]^{\frac{1}{c^*}}.$$

Для рассматриваемого случая $c = 2$ а $r = n$ (полная выборка). Тогда

$$\theta^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

В случае полной выборки при $n \to \infty$ (при $n > 20$) распределение нормированной переменной

$$u = \frac{(\theta^*)^2 - \theta^2}{\theta^2}\sqrt{n}$$

асимптотически следует нормальному распределению $N(0,1)$, так что

$$\Pr\left\{|u| \le u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u_{\frac{1+\gamma}{2}}}^{u_{\frac{1+\gamma}{2}}} e^{-y^2/2}\,dy = \gamma\,,$$

где γ – доверительная вероятность; $u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ нормального распределения $N(0,1)$.

Очевидно, что γ – доверительный интервал для параметра θ имеет вид

$$\underline{\theta}^2 = \frac{(\theta^*)^2}{1+\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}} < \theta^2 < \frac{(\theta^*)^2}{1-\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}} = \overline{\theta}^2.$$

Вероятность невыхода максимального значения на интервале T за верхнюю границу допустимой области D определяется выражением

$$P = \Pr\{x_{\max} \le u\} = 1 - \exp\left\{-\frac{u^2}{\theta^2}\right\},$$

а γ – доверительный интервал для истинного значения P при фиксированном уровне u задается выражением

$$\underline{P} = 1 - \exp\left\{-\frac{u^2}{\overline{\theta}^2}\right\} < P < 1 - \exp\left\{-\frac{u^2}{\underline{\theta}^2}\right\} = \overline{P}\,.$$

В случае отклонения распределения от нормального традиционные параметры m, σ как характеристики положения и масштаба теряют свою эффективность. Согласно теореме Чебышева не менее $\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\cdot 100$ распределения случайной величины сосредоточено в интервале $m \pm c\sigma$. Так, для большинства распределений вероятностные меры интервалов $m \pm 2\sigma$ и $m \pm 3\sigma$ составляют соответственно на менее 0,75 и 0,889. Очевидно, что выводы, основанные на использовании характеристик m и σ при отсутствии информации о виде распределения, оказываются весьма неэффективными.

Иногда нарушения, кажущееся незначительными, могут существенно исказить конечные результаты. У любого инженера-исследователя всегда остается «неприятный осадок» в случае предположения о справедливости гипотезы нормальности.

Поэтому необходимо проводить обработку полученных экспериментальных данных еще и непараметрическими критериями с целью достижения более глубокой убежденности в правильности полученных результатов.

Если выборочные изменения определяющего параметра построить в вариационный ряд, то порядковые статистики $x_{(r)}$ и $x_{(s)}$ образуют свободный от распределения толерантный интервал [5]:

$$\Pr\left\{\int_{x_{(r)}}^{x_{(s)}} dF(x) \geq P\right\} = \Pr\left\{\left[F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})\right] \geq P\right\} = \gamma, \quad r < s,$$

где $F(x)$ – неизвестная непрерывная функция распределения. Это выражение говорит о том, что доля распределения $F(x)$, сосредоточенная в интервале, образованном порядковыми статистиками $x_{(r)}$ и $x_{(s)}$, будет не менее P с доверительной вероятностью γ.

Запишем соотношение для непараметрического толерантного интервала в виде

$$\Pr\left\{Y_{\mu} \geq P\right\} = 1 - I_{\mathrm{P}}(\mu, \nu) = \gamma,$$

где $Y_{\mu} = F(x_{(s)}) - F(x_{(r)})$; μ – число выборочных блоков вариационного ряда, лежащих между порядковыми статистиками $x_{(r)}$ и $x_{(s)}$; ν – число исключенных выборочных блоков, лежащих вне толерантного интервала $[x_{(r)}, x_{(s)}]$[6; 7].

Если оценка точности проводится совместно по $q \leq m$ координатам случайного вектора $\bar{z}$, то на основании выборочных экспериментальных даннях, можно построить q-мерную независимую от распределения толерантную область. С доверительной вероятностью γ вероятностная мера такой области, отвечающая многомерной функции распределения $F(z_1,...,z_m)$, не менее P. В общем случае q-мерная выборка объема $k > q$ может быть упорядочена в виде пространственного вариационного ряда, а выборочное пространство розбито на $(k+1)$ непересекающихся и заполняющих все пространство q-мерных выборочных блоков. Тогда при любом правиле выбора μ таких блоков образуется многомерная толерантная область. Область допустимых значений D^m задается в виде m-мерного параллелепипеда. Если толерантная область строится по размаху выборочных данных, то отбрасывается $\nu = 2q$ первых q-мерных выборочных блоков. Соотношение для вероятностей P и γ в этом случае имеет вид:

$$\Pr\left\{Y_{\mu} \geq P\right\} = 1 - I_{\mathrm{P}}(k+1-2q,\ 2q) = \gamma,$$

где $I_{\mathrm{P}}(a,b)$ – функция B-распределения, определенная на отрезке $0 \leq P \leq 1$ и зависящая от двух положительных аргументов $a = k+1-2q$, $b = 2q$.

Для поставленной задачи $q = 1$. После определения по экспериментальным данным размаха бокового отклонения самолета от оси ВПП может быть построен толерантный интервал, вероятностная мера которого определяется из решения уравнения относительно P.

$$1 - I_{\mathrm{P}}(k-1, 2) = \gamma.$$

В таблице приведены результаты расчета вероятностной меры P в зависимости от объема выборочных данных для различных коэффициентов доверия γ.

Таблица результатов расчета *P*

N	P		
	$\gamma = 0{,}9$	$\gamma = 0{,}95$	$\gamma = 0{,}99$
10	0,663	0,606	0,497
20	0,819	0,7848	0,712
50	0,9245	0,9085	0,875
100	0,9616	0,9535	0,9356
200	0,9807	0,9765	0,9675
500	0,99224	0,99056	0,9868
1000	0,99611	0,99526	0,99343
10000	0,99961	0,999526	0,999341

Пример. По ста реализациям автоматизированного разбега получено значение размаха $W = 4,4 - (-3,2) = 7,6$ м бокового отклонения самолета от оси ВПП. Эффективный объем измерений $n_{эф} = 700$. Определить вероятностную меру распределения, сосредоточенную в интервале [4,4;–3,2] м с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$.

Решение уравнения

$$1 - I_P(699,2) = 0,95$$

относительно *P* дает её величину $p = 0,993$.

Заключение. Предложенные параметрические и непараметрические алгоритмы позволяют достаточно эффективно оценивать точность процесса стабилизации бокового отклонения самолета в режимах автоматической посадки и автоматизированного взлета как в процессе летных испытаний, так и при проведении статистического моделирования бортовых систем управления.

Список литературы

1. *Дейвид Г.* Порядковые статистики / Г. Дейвид – М.: Гл. редакция физико-мат. лит., 1979. – 356 с.
2. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Большев Л. Н., Смирнов Н. В. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
3. *Синицын Б. С.* Применение методов математической статистики для анализа точности бортовых систем автоматизированного управления / Б. С. Синицын, С. Л. Белогородский, А. А. Зеленков, О. Г. Мирошниченко // Измерения, контроль и автоматизация – 1981. – №3(37). – С. 43 – 53.
4. *Фомин Я. А.* Теория выбросов случайных процессов / Я. А. Фомин – М.: Связь, 1980. – 212 с.
5. *Закс Ш.* Теория статистических выводов / Ш. Закс: пер. с англ. Е. В. Чепура. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
6. *Уилкс С.* Математическая статистика / С. Уилкс – М.: Наука, 1967. – 632 с.
7. *Зеленков А. А.* Непараметрическая оценка точностных характеристик систем управления автоматической посадкой самолета в процессе моделирования и летных испытаний / А. А. Зеленков // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. пр. – Дніпропетровськ, 2000. – Т. 2. – С. 66 – 72.

О. А. Зеленков, А. П. Голик

Оцінка точності процесів стабілізації під час автоматичного пробігу й розгону

Запропоновано параметричний алгоритм оцінювання імовірності знаходження процесу бічного відхилення літака в допустимій ділянці на заданому інтервалі часу в режимах автоматичної посадки і автоматизованого зльоту. Алгоритм ґрунтується на вимірюванні екстремальних значень параметра.

A. A. Zelenkov, A. P. Golik

Accuracy estimate of stabilization process in the automatic landing and the running take-off modes

The paper deals with the parametric algorithm of hitting probability estimate of side deviation in the accessible region on the given time interval in the automatic landing and the automated running take – off modes. The algorithm is based on measurements of parameter extreme values.