

УДК 519.233.2: 621.391.83 (045)

М. Ю. Заліський,
О. В. Соломенцев, д-р техн. наук

ПРО ОДИН МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Інститут електроніки та систем управління НАУ, e-mail: iesy@nau.edu.ua

Розглянуто один з алгоритмів послідовного оцінювання параметрів щільності розподілу ймовірностей, визначено основні характеристики розробленого алгоритму та отримано аналітичні співвідношення для їх розрахунку.

Вступ. Останнім часом значну увагу приділяють системам експлуатації технічного обладнання, які включають процеси обробки статистичної інформації про використання за призначенням, технічне обслуговування та ремонт.

Характеристики (середнє напруження на відмову, середній час відновлення, коефіцієнт готовності, коефіцієнт оперативної готовності тощо), отримані в процесі експлуатації технічних систем, мають випадковий характер. Тому для обробки отриманих даних широко використовують процедури, що ґрунтуються на методах теорії ймовірностей, математичної статистики, перевірки статистичних гіпотез тощо.

Умовно методи статистичної обробки інформації можна поділити на класичні та послідовні методи аналізування даних на основі підходу, розробленому А. Вальдом [1].

Для класичних методів характерне використання фіксованого обсягу вибірки. Кількість спостережень, необхідних для процесу перевірки статистичних гіпотез та оцінювання за допомогою послідовного аналізу, наперед невідома. Рішення про завершення експерименту залежить на кожній поточній стадії дослідження від результатів попередніх випробувань. Перевага процедур на основі послідовного аналізу полягає в тому, що вони мають у середньому менший обсяг спостережень, ніж еквівалентні їм процедури на основі класичних методів (за однакових рівнів показників якості оцінювання та перевірки гіпотез тощо).

Постановка завдання. Питанням послідовного аналізу присвячено цілий ряд літературних джерел [1 – 6].

У працях [1 – 3] розглянуто основні положення про синтез та аналіз послідовних процедур перевірки простих і складних гіпотез, обґрунтовано їх основні переваги. Завданням оцінювання приділено увагу в працях [5; 6], проте їх розглянуто дещо однобічно (з погляду класичного методу), послідовним процедурам присвячено лише певну теоретичну увагу за відсутності інженерних методів розрахунку.

У праці [6] розглянуто один з можливих варіантів оцінювання параметрів щільностей розподілу ймовірностей (на прикладі рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0; 1]$), отримано основні аналітичні співвідношення для невідомого значення оцінки та тривалості спостережень.

Доречним є розробленням альтернативних варіантів процедур послідовного аналізу завдань оцінювання параметрів з оцінкою їх результативності та ефективності для можливості використання найбільш оптимального з них в інженерній практиці під час експлуатації технічного обладнання, проектування, розроблення та модернізації систем менеджменту якості комплексів обслуговуючого типу та роботи з різними родами технологічних процесів. Тому у цій роботі буде розглянуто другий можливий варіант оцінювання параметрів рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0; 1]$.

Основна частина. Як відомо, статистичне оцінювання являє собою сукупність способів, що використовуються в математичній статистиці для наближеного визначення невідомих розподілів ймовірностей (або деяких їх характеристик) за результатами експерименту. У загальному випадку завдання оцінювання формулюється таким чином: на основі статистичної інформації, що міститься у вибірці, виробити статистичне рішення про справжнє значення невідомого параметра [7].

Під час оцінювання щільності розподілу ймовірностей (ЩРІ) випадкової величини X вважають, що існує вектор параметрів $\vec{A}$, за допомогою якого описується задана щільність. При цьому є певний алгоритм $\varphi_i(\vec{x}_i)$, який дозволяє отримати оцінки $\vec{A}^*$ ($\vec{x}_i$ – вибірка вихідних даних, отриманих внаслідок реалізації випадкової величини X).

Для перевірки отриманих алгоритмів оцінювання використовують сукупність характеристик (зміщеність, достатність та ефективність), які характеризують якість (оптимальність) оцінювання. Дуже важливим питанням щодо визначення потенційних можливостей оцінювання параметра є найнижча межа дисперсії $\mu_2(A^*)$ незміщеної оцінки. Нижню межу для дисперсії незміщеної оцінки A^* параметра A за вибіркою з N незалежних спостережень випадкової величини зі ЩРІ $f(x/A^*)$ дає нерівність Фреше–Крамера–Рао (для випадку, коли вектор параметрів $\vec{A}$ містить лише один невідомий параметр A):

$$\mu_2(A^*) \geq \frac{1}{N \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \ln f(x/A^*)}{\partial A^*} \right|^2 f(x/A^*) dA^*}.$$

Доведено, що недефективні оцінки можна отримати за наявності розривів першого та другого роду. Для таких оцінок нижня межа для дисперсії прямує до нуля.

Як відомо, класичні алгоритми можуть бути параметричними та непараметричними, а також можуть бути синтезовані за методом найменших квадратів, максимуму функції правдоподібності, моментів, квантилів тощо. Для послідовних процедур оцінювання та перевірки гіпотез використовують такі варіанти алгоритмів: 1) алгоритми без навчальної вибірки та алгоритми з навчальною вибіркою; 2) алгоритми без зрізання та зі зрізанням.

В інженерній практиці показниками якості оцінювання для класичних методів є математичне сподівання та дисперсія оцінки, а для послідовних, крім вищезазначених, – математичне сподівання, дисперсія та в разі потреби щільність розподілу оцінки і тривалості.

Схему формування послідовних оцінок можна схематично зобразити за допомогою чотирьох блоків: блоку нагромадження даних експерименту, блоку формування оцінок ЩРІ, блоку перевірки параметрів зупину та ключа (рис. 1). Входом цієї схеми є датчик даних для обробки, а виходом – вектор оцінок параметрів ЩРІ.

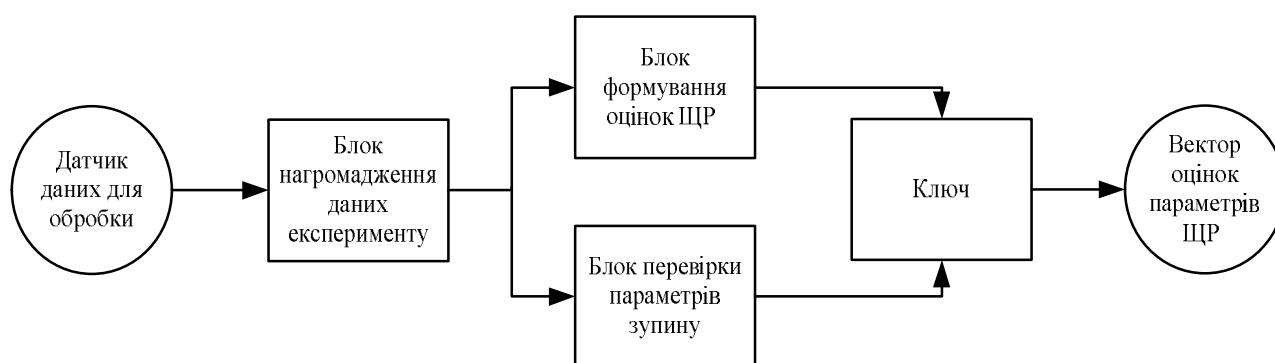


Рис. 1. Схема формування послідовних оцінок

У блоці нагромадження даних експерименту послідовно (по одному відліку) формується вибірка випадкової величини X (до складу блоку може входити початкова навчальна вибірка). У блоці перевірки параметрів зупину виконується розрахунок певних характеристик випадкової величини X і порівняння їх з наперед заданими граничними значеннями. У випадку виконання умов зупину на виході блоку отримуємо сигнал типу логічної одиниці; у протилежній ситуації – типу логічного нуля. Блок формування оцінок

виконує розрахунок невідомих параметрів розподілу ймовірностей, будує графіки щільностей розподілу оцінки та тривалості спостереження. Дані з блоку формування оцінок можуть надходити на вихід через ключ лише у випадку виконання умов зупину.

Розглянемо задачу оцінювання максимального значення вибірки (розмаху) рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0; 1]$. При цьому будемо порівнювати основні параметри, отримані за допомогою класичної та послідовної схем оцінювання.

Як відомо, для побудови послідовного алгоритму оцінювання необхідно виробити певне правило зупину. Як одне з таких правил можна використати таке припущення: експеримент буде продовжуватися, якщо на i -му кроці максимальне значення вибірки $x_{\max}$ не буде перевищувати наперед заданого граничного значення $x_{\text{гр}}$ (або $1 - \frac{\Delta}{2}$, де Δ – параметр зупину або «вікно»), а мінімальне значення вибірки $x_{\min}$ буде перевищувати $1 - x_{\text{гр}}$ (або $\frac{\Delta}{2}$). Тобто під час виконання умови $x_{\max} < x_{\text{гр}} \cup x_{\min} > 1 - x_{\text{гр}}$ процес буде перебувати в області продовження експерименту, а якщо $x_{\max} \geq x_{\text{гр}} \cap x_{\min} \leq 1 - x_{\text{гр}}$ – в області зупину (рис. 2).

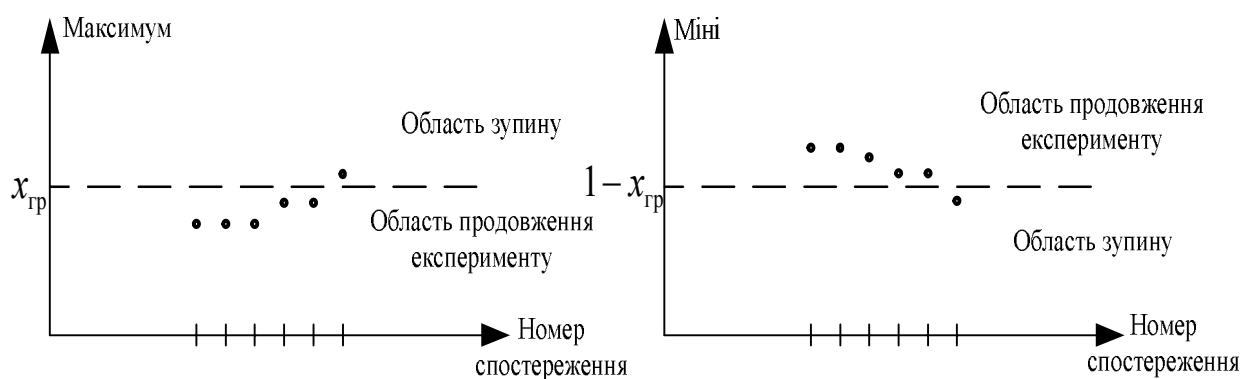


Рис. 2. Графічне пояснення запропонованого алгоритму

Як невідому характеристику щільності розподілу (оцінки), значення якої встановлюється і за допомогою якої можна найбільш повно описати задану щільність, можуть бути: максимальне вибіркове значення, розмах вибірки (різниця максимального та мінімального значень вибірки) тощо. Визначимо оцінку як максимальне значення вибірки.

У цьому випадку можна розрізнити дві групи параметрів: параметри оцінки ($f(x_{\max})$ – щільність розподілу максимального значення вибірки $x_{\max}$; $m_1(x_{\max})$ – математичне сподівання максимального значення; $\mu_2(x_{\max})$ – дисперсія максимального значення) та параметри тривалості ($f(N)$ – щільність розподілу тривалості спостережень N ; $m_1(N)$ – математичне сподівання тривалості спостережень; $\mu_2(N)$ – дисперсія тривалості спостережень).

Розглянемо основні характеристики оцінки. Для оцінки щільності розподілу максимального значення вибірки $x_{\max}$ у випадку моделювання за класичною схемою можна побудувати гістограму частот (рис. 3), яка є статистичним аналогом цієї щільності. Крім того, оскільки для формування правила зупину використовують мінімальне значення вибірки, то не менш важливо визначити щільність (гістограму) для $x_{\min}$. Зазначимо, що дані гістограми отримано за обсягу вибірки $N = 1000$.

За допомогою певних математичних викладок можна отримати аналітичні співвідношення для щільностей розподілу мінімального та максимального значень вибірки рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[a; b]$ за її заданого обсягу N :

$$f(x_{\min}) = \frac{N}{b-a} e^{-\frac{N}{b-a}(x_{\min}-a)}, \quad x_{\min} > a;$$

$$f(x_{\max}) = \frac{N}{b-a} e^{\frac{N}{b-a}(x_{\max}-b)}, \quad x_{\max} < b.$$

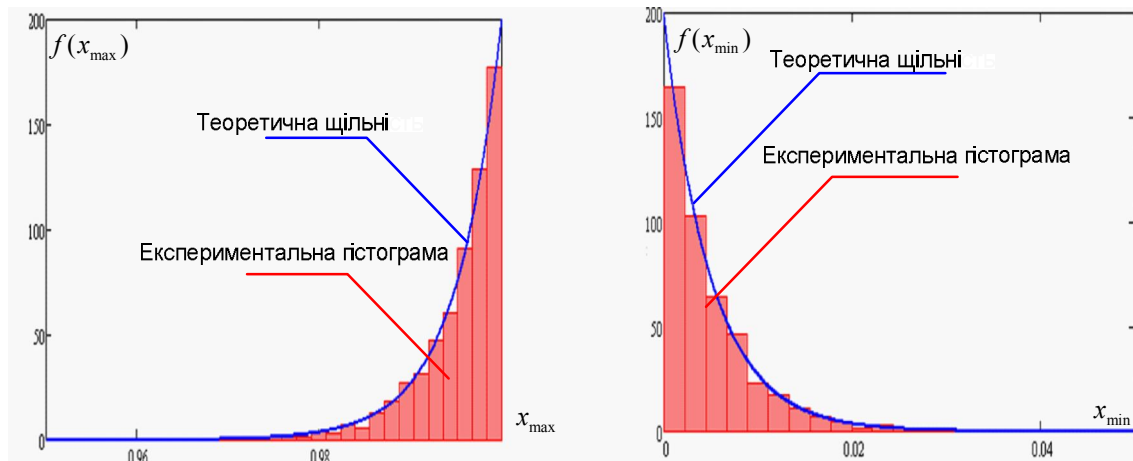


Рис. 3. Гістограми (експериментальні) та щільності розподілу (аналітичні) мінімального $f(x_{\min})$ та максимального $f(x_{\max})$ значень вибірки

Крім того, можна простежити, як при цьому змінюються характеристики щільності розподілу на прикладі її моментів (рис. 4).

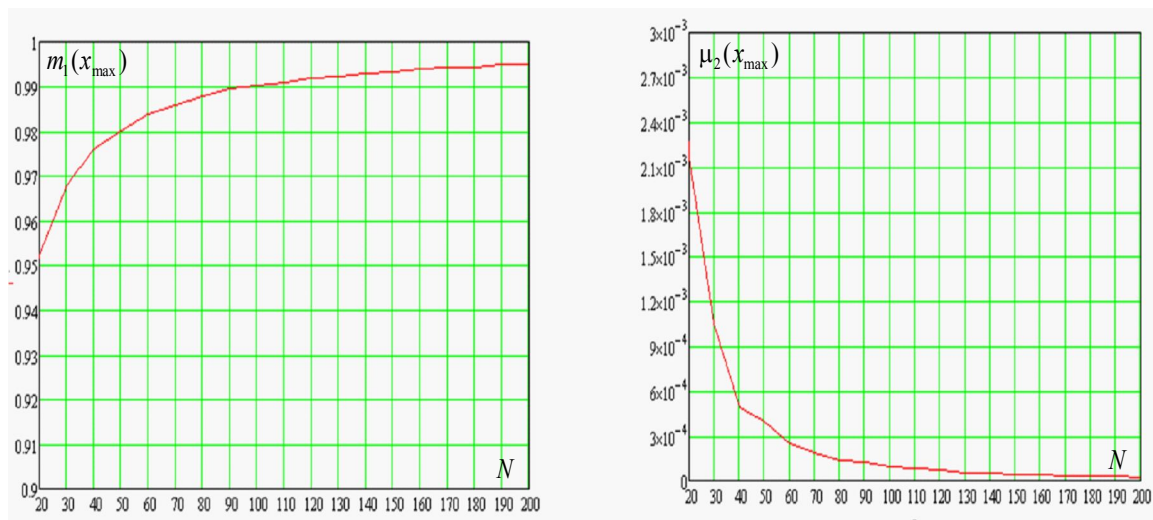


Рис. 4. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії максимального значення вибірки від тривалості спостережень N (класичний алгоритм)

З графіків (рис. 4) видно, що зі збільшенням обсягу вибірки математичне сподівання оцінки $m_1(x_{\max})$ прямує до одиниці (реальне значення оцінки), а дисперсія $\mu_2(x_{\max})$ – до нуля. Тобто така оцінка обґрунтована.

Математичне сподівання та дисперсії оцінки визначають за формулами для випадку рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервалі $[0; 1]$:

$$m_1(x_{\max}) = 1 - \frac{1}{N};$$

$$\mu_2(x_{\max}) = \frac{1}{N^2}.$$

У випадку моделювання послідовного алгоритму можна простежити, як змінюються математичне сподівання та дисперсія оцінки при прямуванні граничного значення зупину $x_{\text{гр}}$ до одиниці в разі використання алгоритмів без зрізання та зі зрізанням на рівні $k=15$ (рис. 5). При цьому зі збільшенням параметра $x_{\text{гр}}$ ступінь розбіжності між ним і математичним сподіванням оцінки та дисперсія оцінки прямують до нуля у випадку послідовної процедури без зрізання. У випадку процедури зі зрізанням математичне сподівання (дисперсія) оцінки буде меншим (більшим) від певного граничного значення.

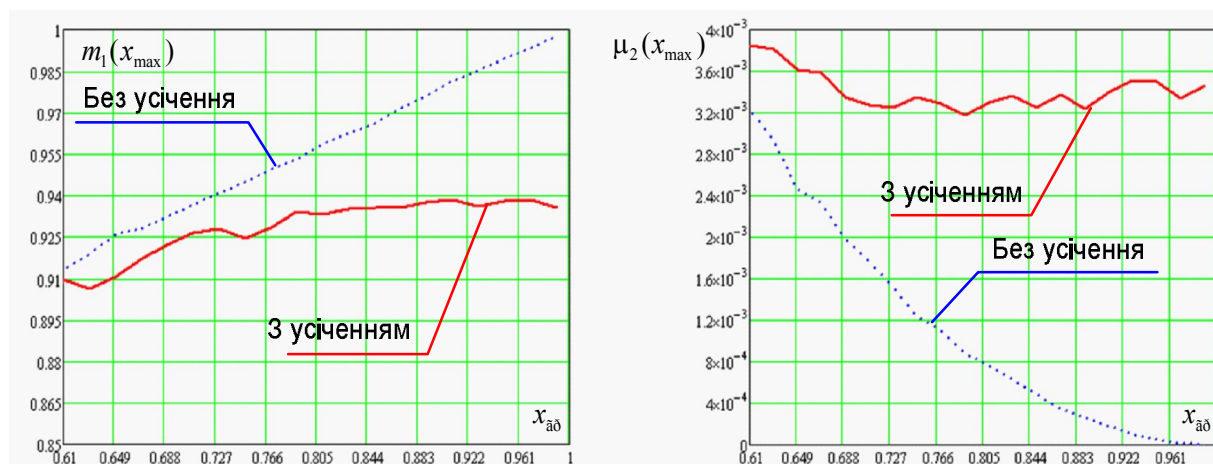


Рис. 5. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії максимального вибіркового значення від заданого граничного значення $x_{\text{гр}}$

Для перевірки ефективності запропонованого послідовного алгоритму оцінювання порівнюємо отримані значення дисперсій оцінки в разі їх однакових математичних сподівань (рис. 6). Як видно з графіка, послідовний алгоритм дає вигравш за дисперсією (приблизно у два рази) порівняно з відповідним йому класичним алгоритмом.

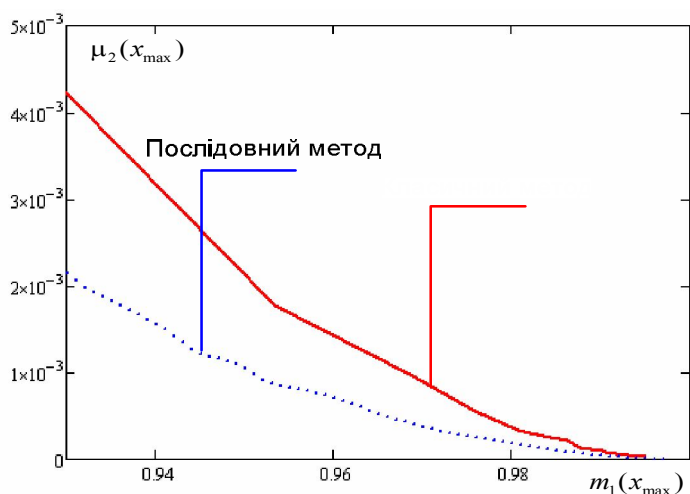


Рис. 6. Порівняння дисперсій оцінки (класичного та послідовного методів) за однакових середніх значень оцінки

Крім того, можна побудувати щільність розподілу максимального вибіркового значення для послідовного алгоритму (рис. 7).

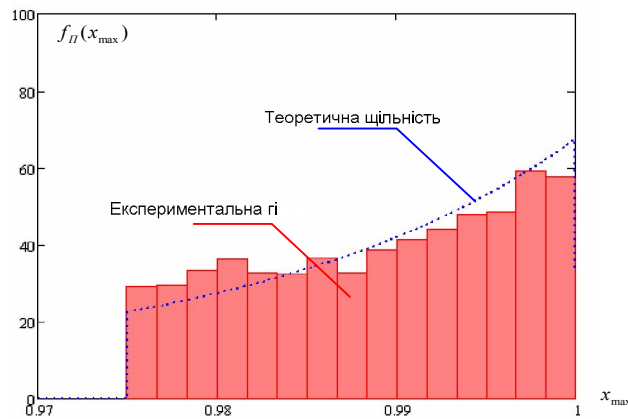


Рис. 7. Гістограма (експериментальна) та щільність розподілу (аналітична) оцінки
Аналітичний вираз для щільності розподілу оцінки:

$$f_{II}(x_{\max}) = \frac{\sum_N N(N-1)(1-\Delta)^{N-2} e^{N(x_{\max}-1)}}{\int_{x_{\text{тр}}}^1 \left[\sum_N N(N-1)(1-\Delta)^{N-2} e^{N(x_{\max}-1)} \right] dx_{\max}}.$$

Розглянемо параметри розробленого послідовного алгоритму за тривалістю.

Шляхом нескладних математичних викладок можна отримати вираз для щільності розподілу ймовірностей тривалості спостережень:

$$f(N) = (N-1)\Delta^2(1-\Delta)^{N-2}, \quad N \geq 1.$$

Цей вираз цілком збігається з результатами, отриманими під час математичного моделювання процесу в середовищі *MathCad*. Так, якщо $\Delta = 0,01$, маємо такі щільності розподілу, як показано на рис. 8.

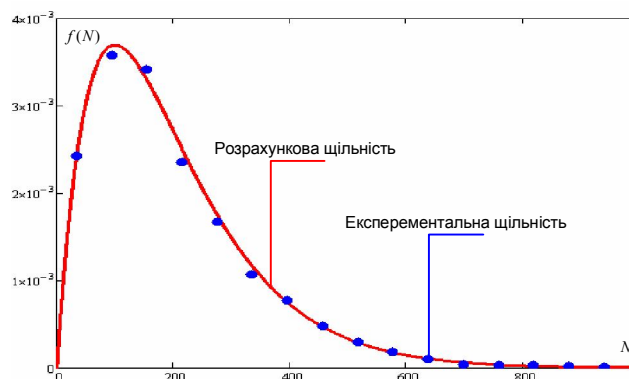


Рис. 8. Щільності розподілу ймовірностей тривалості спостережень
(розрахункова та експериментальна)

Середню тривалість та дисперсію спостережень за заданого рівня Δ можна визначити таким чином:

$$m_1(N) = \sum_N [N(N-1)\Delta^2(1-\Delta)^{N-2}];$$

$$\mu_2(N) = \sum_N [N^2(N-1)\Delta^2(1-\Delta)^{N-2}] - m_1^2(N).$$

При цьому експериментально були отримані такі залежності, як показано на рис. 9.

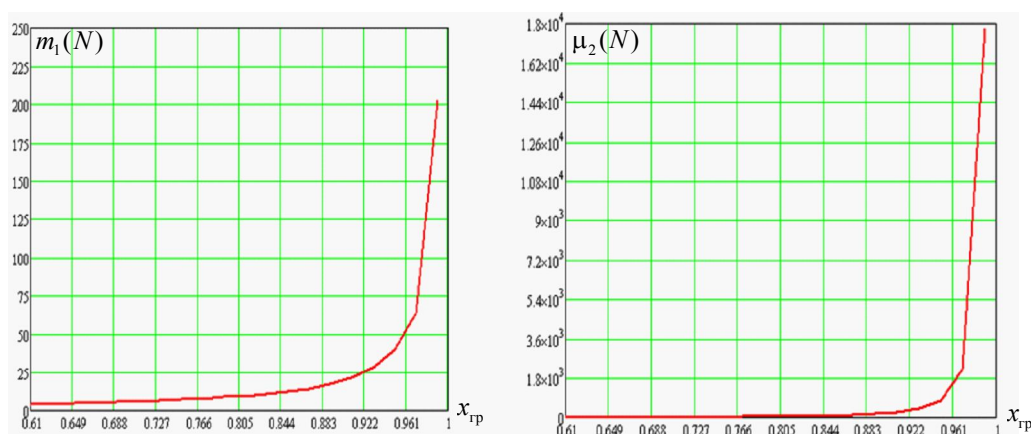


Рис. 9. Експериментальні графіки залежності математичного сподівання та дисперсії середньої тривалості від граничного значення $x_{\text{тр}}$

Висновки. Отримані результати показують, що послідовний алгоритм оцінювання для розглянутого прикладу щільності розподілу ймовірностей за однакових обсягів тривалості спостережень відносно класичного алгоритму оцінювання має менші числові значення дисперсій оцінок максимального значення вибірки x_{max} або меншу середню тривалість спостережень за однакового рівня дисперсій. Отримані аналітичні співвідношення для теоретичного розрахунку щільності розподілу, математичного сподівання і дисперсії тривалості спостережень та оцінки цілком збігаються з результатами статистичного моделювання, що підтверджує їх достовірність. Результати можуть бути використані під час розроблення алгоритмів обробки інформації в системах експлуатації технічного обладнання, системах менеджменту якості виробництва продукції та надання послуг тощо.

Список літератури

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Физматиздат, 1960. – 328 с.
2. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Фу К. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. – М.: Наука, 1971. – 256 с.
4. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
5. Дэйвид Г. Порядковые статистики. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
6. Залиський М. Ю., Соломенцев О. В. Метод послідовного оцінювання параметрів статистичних розподілів // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2008. – Вип. 2(24). – С. 80 – 85.
7. Прокопенко І. Г. Методи і засоби обробки сигналів. – К.: КМУЦА, 1997. – 92 с.

М. Ю. Залиський, А. В. Соломенцев

Про один метод послідовного оцінювання

Рассмотрен один из алгоритмов последовательного оценивания параметров плотности распределения вероятностей, определены основные характеристики разработанного алгоритма и получены аналитические соотношения для их расчета.

M. J. Zalisky, O. V. Solomentsev

About one method of sequential evaluation

One of algorithms of sequential evaluation of parameters of closeness of probability distribution is considered, basic descriptions of the developed algorithm are certain and analytical formulas are got for their calculation.