

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

УДК 004.942:658.51(045)

¹**В. В. Васильєв**, д-р техн. наук,
²**О. Г. Додонов**, д-р техн. наук,
³**А. І. Кузьмичов**, канд. техн. наук

**ТАБЛИЧНИЙ АНАЛОГ ЕЛЕКТРОННИХ МОДЕЛЕЙ
ЗАВДАНЬ ПОТОКОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**¹Національний авіаційний університет, vsvv@visti.com²Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, dodonov@ipri.kiev.ua³Академія муніципального управління, akuzmychov@mail.ru

На прикладі розв'язання завдань пошуку екстремальних шляхів у мережі показано, що принципи і техніку електронного моделювання успішно можна застосовувати для моделювання завдань потокової оптимізації в середовищі сучасного табличного процесора MS Excel у формі відповідних електронно-табличних моделей.

Вступ. Науковою школою, очолюваною академіком НАН України Г. Є. Пуховим, у свій час [1] були визначені принципи і технічні рішення щодо побудови електричних та електронних моделей, зокрема, для типових задач потокової (мережевої) оптимізації, за якими пошук оптимуму досягається мережевою моделлю у вигляді орієнтованого графу, де вузли моделюються аналоговими [2; 3] чи гібридними (цифро-аналоговими) [4] уніфікованими пристроями (процесорами типу багатополюсника із гнучкою структурою) для автоматичного визначення екстремуму вхідних величин, а орієнтовані дуги визначають інформаційні зв'язки між вузлами. За такими принципами створення електронної моделі певного процесу зводиться до формування набору універсальних процесорів пошуку екстремуму вхідних величин, визначення характеристик і по'єднання їх між собою згідно з топологією мережі. Згодом й до сьогодні за таким принципом будують однорідні багатомашинні чи багатопроцесорні обчислювальні комплекси, які, правда, діють за певним іноді досить складним обчислювальним алгоритмом.

Завдяки природним властивостям процесу автоматичної мінімізації втрат енергії, покладених в основу електричних/електронних схем, модель такого типу за своєю суттю і формою є звичайним електричним колом, де потік електричного струму автоматично імітує потоки, характерні для відповідного модельованого об'єкта (продукти, фінансові кошти, ресурси, інформація, транспортні засоби, час), але, зрозуміло, за спеціальними ускладненими умовами. Так, Г. Є. Пухов та його колеги й учні сформували пріоритетний науковий напрям у галузі математичного та комп'ютерного моделювання, названий «електронним моделюванням». Із цієї проблематики з 1979 року й дотепер в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України проводять відповідні дослідження й видається міжнародний науково-теоретичний журнал «Электронное моделирование».

До появи у масовому користуванні універсальних цифрових ЕОМ достатньої потужності електронні моделі, будучи впровадженими в управлінську практику у вигляді спеціалізованих обчислювальних машин, визначили коло реальних наукових, практичних і технічних завдань з прийняття рішень і відповідних математичних моделей з мережевою організацією. Основна перевага таких моделей перед алгоритмічною реалізацією завдань математичного, зокрема, лінійного програмування (до яких зводяться класичні мережеві завдання) на ЕОМ, – можливість миттєвого отримання шуканого результату за будь-яких змін початкових даних, адже результатом розв'язку потокової задачі оптимізації є схема розподілу електричного струму по утвореній мережі за заданими початковими даними і автоматичне визначення значень напруги у відповідних точках схеми за принципом мінімізації витраченої енергії. І саме ця властивість, яка якнайкраще відповідає специфіці

діяльності особи, яка приймає відповідальні управлінські рішення (менеджера), стимулювала активний розвиток теорії і методів математичного моделювання математичних задач потокової оптимізації, до яких зводиться безліч практичних завдань оперативного оптимального планування та організаційного управління.

Сучасні комп'ютери мають надзвичайно високі експлуатаційні характеристики, що, імовірно, дозволяє досить швидко відшукувати оптимальне розв'язання мережових задач великого розміру за ефективними алгоритмами з використанням відповідних програм математичної оптимізації. Для цього, зокрема у складі табличного процесора MS Excel, з успіхом використовують спеціальні програми-оптимізатори типу стандартної версії Solver (пошук розв'язку) на 200 змінних чи версії промислового призначення типу PSP (Premium Solver Platform) на 8000 – 16000 невідомих змінних залежно від типу математичної моделі (вартість такого програмного продукту сягає \$1000). Але навіть у цих зручних умовах визначений принцип побудови мережової моделі у формі електронного аналога орієнтованого графу з уніфікованими вузлами-процесорами для пошуку екстремуму у вузлах не втратив своїх переваг. Навпаки, тепер такий вузол-оператор реалізується вже не у вигляді складного електронного пристрою, як раніше, що суттєво стримувало розроблення і впровадження електронних моделювальних засобів, а значно простіше – у вигляді макросу з аргументами у визначеному діапазоні клітинок звичайної електронної таблиці Excel, де пошук оптимуму реалізується майже миттєво за характерною для Excel технологією «що-якщо» і де одночасно діє вищезначений принцип (за усталеною традицією будемо цю модель теж називати «електронною»), висновок – немає потреби застосовувати потужні й дорогі версії оптимізатора, бо таблична модель самостійно знаходить оптимум для заданого набору даних. Зате комбінація електронної та табличної моделей забезпечує новий обчислювальний ефект, який дає змогу створювати наочні багаторівневі моделювальні структури.

Цей підхід розвиває теорію математичного моделювання задач потокової оптимізації, визначаючи нові можливості у процесі пошуку оптимуму у мережових задачах спеціального типу, реалізувати які за допомогою оптимізаційних програм буває непросто. Запропонована методологія побудови математичних моделей на прикладі задач потокової оптимізації є досить перспективною, бо не залежить від елементної бази, а базується на застосуванні табличних процесорів масового користування, що увійшли в світову практику «всерйоз і надовго».

1. Завдання пошуку найдовшого шляху у мережі. Класичну мережову електронну модель на різній елементній базі розробляли для розв'язання типової задачі організаційного управління під назвою «розрахунок мережового графіка», адже саме ця проблематика у свій час стимулювала розвиток технології електронного моделювання і методів оптимального планування і управління. З теорії і реальної практики мережового планування та управління відомо, що для досить складного реального проекту мережовий графік характеризується тисячами подій-вузлів і операцій-дуг, десятками різноманітних ресурсів, що використовуються для здійснення відповідних операцій.

Таку неосяжну для свідомого аналізу мережу зменшують за розміром, зводячи її до багаторівневої структури, де мережа нижнього рівня є деталізацією вузла чи дуги мережі вищого рівня (рис. 1). Тепер після розрізання (фрагментації) загальної мережі на систему узгоджених й інформаційно зв'язаних мереж меншого розміру в межах відповідальності відповідних менеджерів постає завдання організації інформаційного обміну між рівнями мережової моделі. Якщо користуватися стандартними програмами проектного менеджменту (типу досить досконалої програми MS Project), треба організувати колективну роботу кількох модулів-задач такої програми, що для багаторівневої структури зробити непросто, які будуть діяти паралельно, але не синхронно, оскільки обмін даними між задачами користувач здійснює послідовним копіюванням даних загального користування [5].

Запропонований нами підхід до застосування «електронної» мережевої моделі у такій ситуації унікальний, оскільки утворена комбінована («електронна» модель + табличний оптимізатор) електронно-таблична модель (spreadsheet model) діє синхронно – мережі нижніх рівнів поставляють на верхні рівні свої кінцеві результати (наприклад, мінімальну тривалість розширеної операції), що слугують початковими даними для моделі розширеної мережі, яку розв'язують за допомогою програми-оптимізатора Solver, отримуючи кількісні результати прямої та двоїстої задач для проведення якісного аналізу. Зрозуміло, що завдяки прямим інформаційним зв'язкам, утвореним операцією зв'язування клітинок табличної моделі, будь-які зміни даних будь-де автоматично приводять до нових результатів.

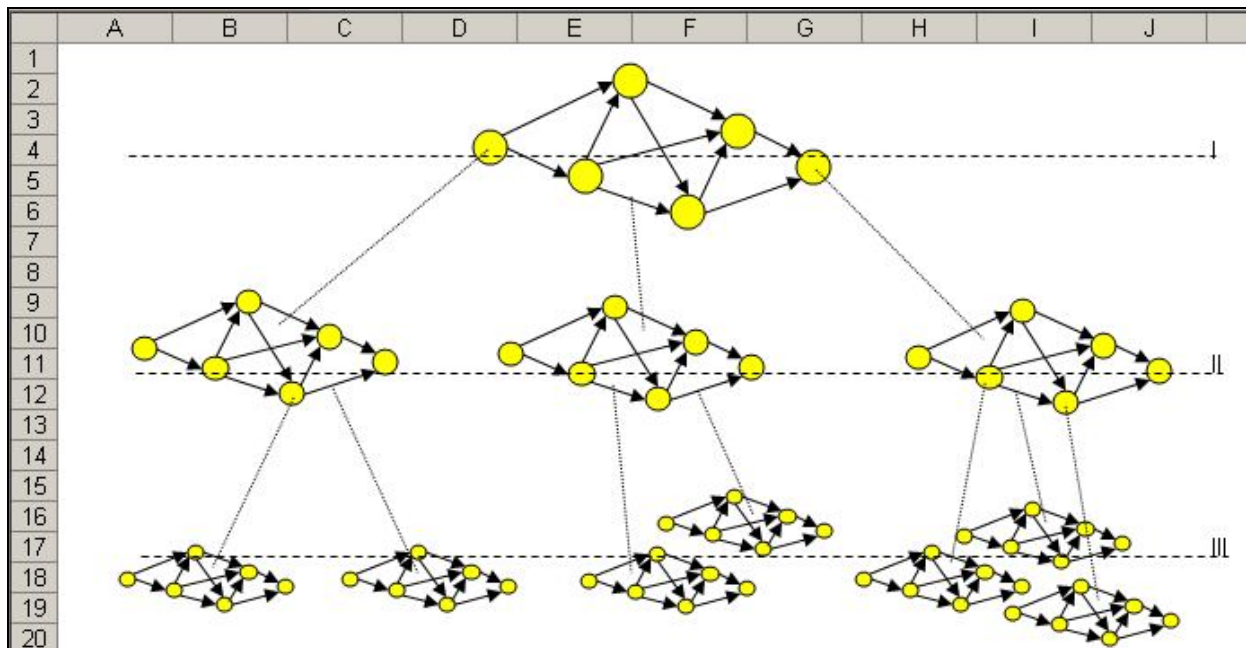


Рис. 1. Багаторівнева мережева структура

Модель такого типу надзвичайно ефективна й навіть ефектна саме на етапі дослідження та аналізу функціонування об'єкта для прийняття рішень в умовах визначеності (метод СРМ) чи невизначеності і ризику, зокрема, методами імітаційного моделювання (simulation), де початкові дані не є детермінованими, а задані випадковими числами із певним законом розподілу (метод PERT). Зрозуміло, що чим більше рівнів та інформаційних зв'язків має мережева модель, тим ціннішим буде отриманий кінцевий результат.

Покажемо на суттєво спрощеному прикладі утворення електронно-табличної комбінованої моделі задачі розрахунку мережевого графіка невеликого розміру з двох рівнів: нижній рівень утворюють деталізовані мережеві моделі певних дуг і вузлів зменшеної за розміром мережі верхнього рівня. Мережеві моделі нижнього рівня реалізуються «електронними» моделями, а мережева модель верхнього рівня – за допомогою табличної мережевої моделі і програми Solver (пошук розв'язку).

Зауваження: зменшений за розміром графік можна розрахувати майже миттєво (залежно від експлуатаційних характеристик ПК) за допомогою відповідної «електронної» моделі, зате оптимізатор Solver дозволить надати більш повні дані про задачу розрахунку мережевого графіка, зокрема, визначить конфігурацію критичного шляху, часткові критичні шляхи до кожного з вузлів та резерви часу некритичних операцій, а також дозволить розрахувати графіки потрібних ресурсів у постановці «час–ресурси» чи розрахувати задачу у постановці «час–вартість» [6].

Приклад. Проект задано мережевим зменшенням за розміром графіком, що складається з шести подій-вузлів (1, 2, ..., 6) та 10 операцій-дуг: (1-2), (1-3), (2-3), (2-4), (2-5), (3-4), (3-5), (4-5), (4-6) та (5-6). Деталізація: вузол 2, операція (4 – 6).

– Вузол 2: у процесі розроблення проекту з'ясувалося, що подія-вузол 2 визначає певну складену технологічну процедуру, яку варто зобразити деталізованим мережевим графіком. Для цього вузол 2 «розщеплюють» на два вузли: вхідний вузол 2а та вихідний вузол 2б, з'єднані дуговою операцією (2а-2б), тривалість якої визначає величина критичного шляху відповідного мережевого графіка із шести вузлів (а, б, в, г, д, е) та 9 дуг;

– Операція (4-6) виявилася досить складною і залежною від певних факторів, тому її деталізують мережевим графіком з п'яти вузлів (а, б, с, d, f) та семи дуг, величина критичного шляху якого визначає тривалість цієї операції.

Таким чином, маємо дворівневу мережеву модель проекту, де рівень I визначає зменшений за розміром мережевий графік А (вже з 11 операцій-дуг й семи подій-вузлів), а рівень II – це деталізовані мережеві графіки А1 та А2 для дуг (2а-2б) та (4-6) відповідно (рис. 2).

Зрозуміло, що кінцевий результат – мінімальна тривалість усього проекту (яка визначається довжиною максимального або критичного шляху від вузла 1 до вузла 6 зменшеного за розміром мережевого графіка А) – можна визначити лише після знаходження довжин критичних шляхів у деталізованих мережевих графіках А1 (від вузла а до вузла е) та А2 (від вузла а до вузла f). Це означає, що запускаючи програму-оптимізатор Solver для розрахунку графіка А, треба вже мати конкретні значення критичних шляхів графіків А1 та А2. А це автоматично виконують постачальники цих даних – «електронні» моделі графіків А1 та А2; на виході їх кінцевих вузлів будуть визначені ці значення, які зв'язуванням безпосередньо передаються у таблицю для дуг графіка А.

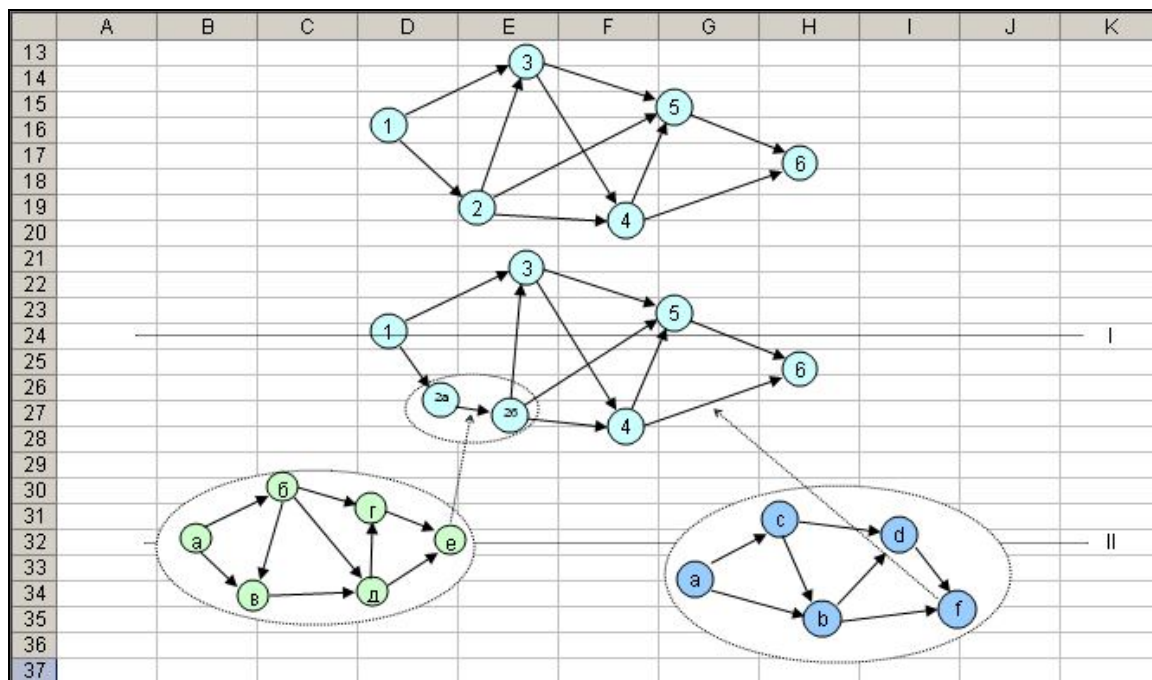


Рис. 2. Дворівнева мережева модель

Реалізація і результати Формат і зовнішній вигляд «електронної» моделі мережевої задачі досить довільний, бо містить у собі початкові дані (тривалості операцій), результати формульних обчислень (максимальні шляхи до кожного вузла), графічні елементи (стрілки операцій) та засоби загального й умовного форматування. Основний операційний елемент цієї моделі – модуль вузла, формат якого є стандартним для конкретної версії моделі. Для прискорення процесу утворення моделі й надання єдиної форми зручно розробити шаблон структури і вмісту вузла, який надалі використовується для формування усієї моделі. Маючи

сукупність уніфікованих моделей вузлів, їх надалі модифікують згідно з топологією мережі, заповнюють початковими даними і формулами і з'єднують стрілками-дугами відповідні пари вузлів.

Один з можливих варіантів шаблону j -го вузла з двома входами (i_1, i_2) і одним виходом (j) показано на рис. 3. Він містить: позначення входних дуг $\{(i_1-j), (i_2-j)\}$, їх тривалості (t_{i1} і t_{i2}) та довжини входних шляхів до j -го вузла $\{(t_{i1}+t(i_1-j)), (t_{i2}+t(i_2-j))\}$, за цими даними обчислюється довжина максимального шляху до j -го вузла (t_j), яка зв'язуванням (формулою) передається на вхід наступного вузла, з яким є зв'язок.

Тепер створена таким чином таблична модель «живе», автоматично реагуючи на зміни початкових даних (тривалості операцій). Їх можна задати конкретними числами чи за допомогою генератора випадкових чисел (ГВЧ), наприклад, на основі функції СЛЧИС, якщо збудована імітаційна модель мережевої задачі.

Після створення елементарних «електронних» моделей мережевих графіків нижнього рівня розробляється таблична модель зменшеного за розміром мережевого графіка, де тривалості операцій, що деталізуються, передаються в таблицю зв'язуванням (на рис. 4, а, б у клітинки I4 та I11) і використовуються в обчисленнях.

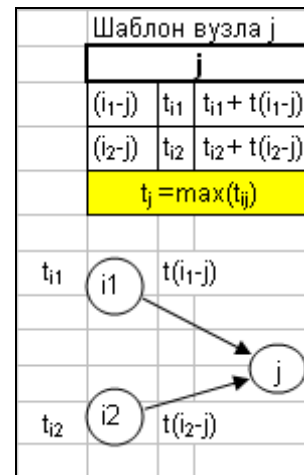
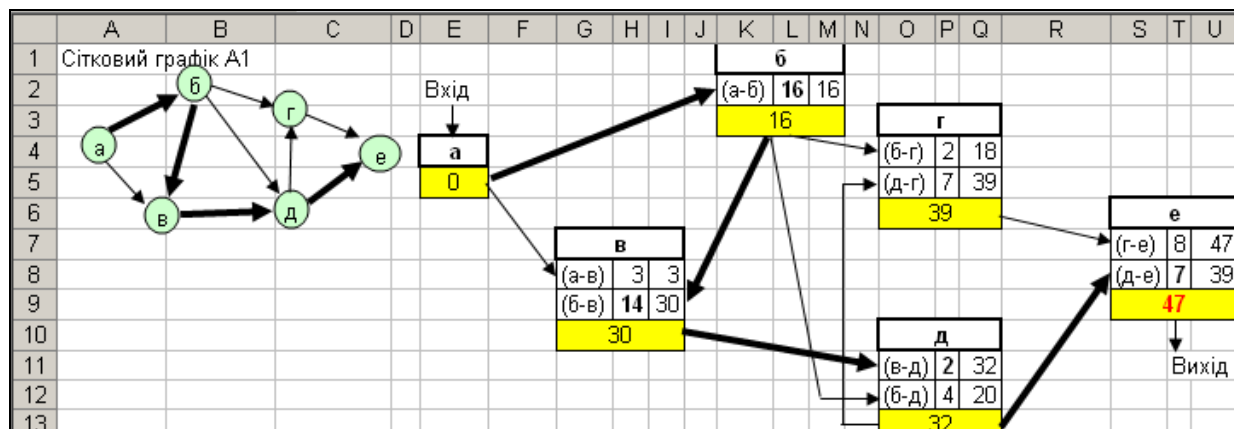
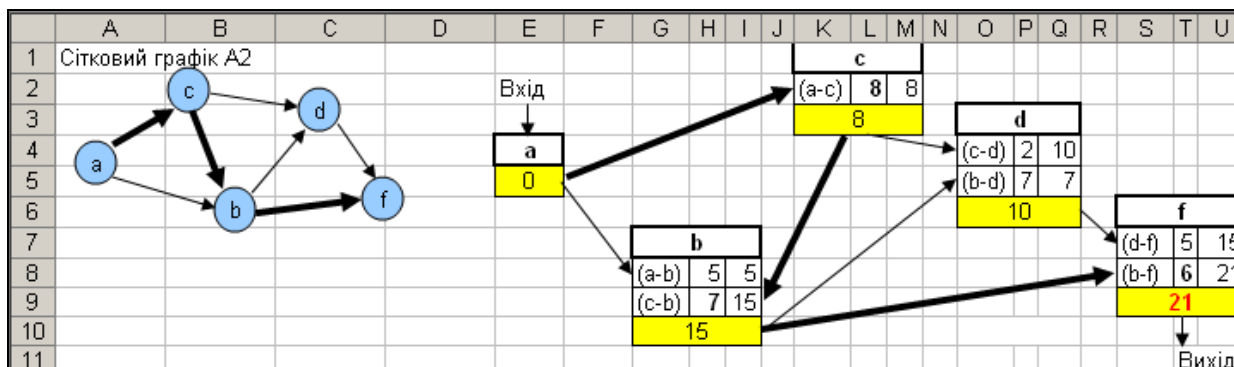


Рис. 3. Шаблон вузла



а



б

Рис. 4. «Електронна» модель мережевого графіка: а – А1; б – А2

Якщо в моделях нижнього рівня початкові дані формуються за допомогою ГВЧ, «верхня» мережева модель під час чергового запуску і функціонування оптимізатора Solver автоматично багаторазово оновлює значення випадкових чисел і Solver не може у таких

умовах знайти оптимум. Відповідно за таких умов треба заздалегідь зафіксувати набір останніх значень випадкових чисел (командою *Правка* → *Копировать* → *Правка* → *Специальная вставка* → *Вставить значения*) і лише після цього знайти кінцевий результат (рис. 5).

Аналіз результату Створена таблична модель формує розв'язок прямої та двоїстої задач лінійної оптимізації, адже ці результати завжди є основою для прийняття рішень щодо управління проектом.

Пряма задача: визначені критичні: (1-2а), (2а-2б), (2б-3), (3-4), (4-5), (5-6) та некритичні операції, мінімальна тривалість проекту (довжина критичного шляху) 294,3 час. од. Вузлова операція (2а-2б), у свою чергу, визначила критичні операції у мережі А1: (а-б), (б-в), (в-д), (д-е), які визначили мінімальну тривалість цієї операції 47 час. од. Саме критичним операціям має приділятися основна увага керівництва проектом.

Двоїста задача: у стовпці Резерв визначено резерви часу некритичних операцій; за рахунок зменшення цих резервів можна скоротити тривалість усього проекту.

Стовпець «Част. КШ» містить значення часткових критичних шляхів, тобто мінімальні часові періоди здійснення відповідних подій.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Сітковий графік А					Дуга	Початок	Кінець	Тривалість	Потік (X)	Резерв	
2						1-2а	В-1	В-2а	36,2	1	0	1
3						1-3	В-1	В-3	22,3	0	-107,0	2
4						2а-2б	В-2а	В-2б	47,0	1	0	3
5						2б-3	В-2б	В-3	46,1	1	0	4
6						2б-5	В-2б	В-5	28,7	0	-137,7	5
7						2б-4	В-2б	В-4	46,5	0	-63,7	6
8						3-5	В-3	В-5	29,4	0	-90,9	7
9						3-4	В-3	В-4	64,1	1	0	8
10						4-5	В-4	В-5	56,2	1	0	9
11						4-6	В-4	В-6	21,0	0	-79,9	10
12						5-6	В-5	В-6	44,7	1	0	11
13									КШ =	294,3		
15						Вузол	Вх. потік	Вих. потік	Баланс	Обмеж	Част. КШ	
16						В-1	0	1	-1	-1	0	1
17						В-2а	1	1	0	0	36,2	2
18						В-2б	1	1	0	0	83,2	3
19						В-3	1	1	0	0	129,3	4
20						В-4	1	1	0	0	193,4	5
21						В-5	1	1	0	0	249,6	6
22						В-6	1	0	1	1	294,3	7

Рис. 5. Таблична модель мережевого графіка А

2. Задача пошуку найкоротшого шляху у мережі. До класичних мережевих задач оптимізації належить також задач пошуку найкоротшого шляху, що з'єднує початковий і кінцевий вузли мережі, яка є різновидом мережевих транспортних завдань. Класична постановка задачі має такий вигляд: на вхід комунікаційної мережі входить неподільний (одиначний) потік, який, не розгалужуючись у вузлах, має прямувати у кінцевий вузол найкоротшим шляхом, тож треба визначити конфігурацію і довжину цього шляху. Якщо параметри дуг вважати вартостями пропуску через них одиничного потоку, то це задача про потік мінімальної вартості через мережу. Саме за такою постановкою стало можливим побудувати електронну модель, де у моделях вузлів, фактично у ключових схемах, досить просто знаходять мінімум вхідних потоків.

Запропонована дворівнева мережева модель може бути змінена для розв'язання такої задачі. Процедура розбиття великої за розміром мережі, скажімо, континентального чи державного масштабу, на одну зменшену за розміром і набір деталізованих мереж – досить зрозумілий і обґрунтований підхід з позиції надання зручних умов менеджерам краще оцінити ситуації для свідомого прийняття зважених рішень. Саме так діє управлінський персонал на виробництві, в армії, бізнесі тощо за класичним принципом «розділяй і володарюй».

Розроблену модель треба дещо модифікувати, щоб знайти найкоротші шляхи у мережах А, А1 та А2, а саме: у мережах нижнього рівня достатньо замінити у вузлах функцію МАКС на МИН, а у мережній моделі А замінити критерій «равной максимальному значенню» на «равной минимальному значенню», рис. 6 – 8.

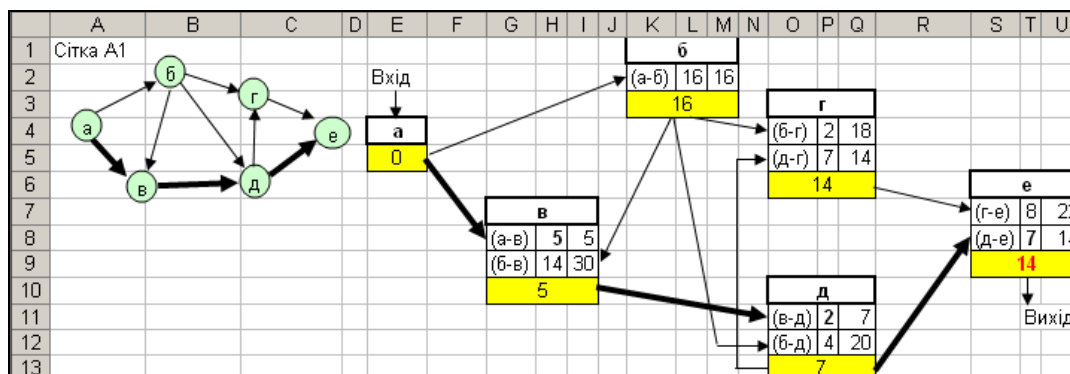


Рис. 6. Найкоротший шлях у мережі А1

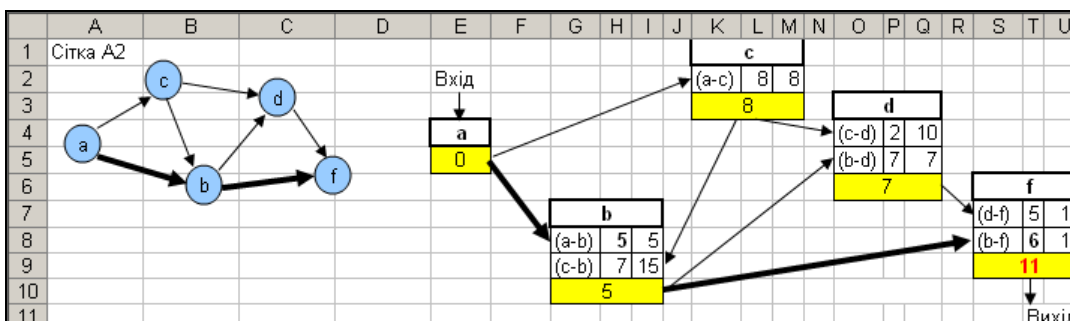


Рис. 7. Найкоротший шлях у мережі А2

А	В	С	Д	Е	Г	Н	І	К	Л
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410
411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430
431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530
531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550
551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580
581	582	583	584	585	586	587	588	589	590
591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610
611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	700
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730
731	732	733	734	735	736	737	738	739	740
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
751	752	753	754	755	756	757	758	759	760
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770
771	772	773	774	775	776	777	778	779	780
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790
791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810
811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
821	822	823	824	825	826	827	828	829	830
831	832	833	834	835	836	837	838	839	840
841	842	843	844	845	846	847	848	849	850
851	852	853	854	855	856	857	858	859	860
861	862	863	864	865	866	867	868	869	870
871	872	873	874	875	876	877	878	879	880
881	882	883	884	885	886	887	888	889	890
891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910
911	912	913	914	915	916	917	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	929	930
931	932	933	934	935	936	937	938	939	940
941	942	943	944	945	946	947	948	949	950
951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970
971	972	973	974	975	976	977	978	979	980
981	982	983	984	985	986	987	988	989	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

Рис. 8. Найкоротший шлях у мережі А

Результат та його аналіз

Пряма задача: визначено найкоротший маршрут: 1-3-5-6 довжиною 96,4 од., аналогічну процедуру автоматично здійснено у мережах нижнього рівня.

Двоїста задача: у стовпці «Втрати» додатні числа вказують на можливі додаткові втрати у разі вимушеного включення відповідних «невигідних» дуг у маршрут.

Стовпець «Част. НКШ» містить значення часткових найкоротших шляхів до відповідних вузлів.

3. Задача про потік мінімальної вартості з розгалуженням потоку у вузлах. На вхід мережі, де дуги оцінюються вартістю протікання ними потоку, надходить потік, для якого треба визначити мінімальну вартість перетікання через проміжні вузли, де потік може розгалужуватися, у кінцевий вузол. Ця задача є модифікацією класичної задачі про найкоротший шлях з неподільним потоком. Розв'яжемо цю задачу, комбінуючи класичну постановку у мережах нижнього рівня, з розширеною постановкою для зменшеної за розміром мережі. Для цього в неї треба внести додаткові дані про пропускні здатності дуг і, можливо, вузлів (у такому разі такий вузол розщеплюють, замінюючи його парою «простих» вузлів і дугою між ними, як це було зроблено вище з вузлом 2).

Ідея: якщо потік по дузі обмежується її пропускною здатністю, програма оптимізації розподіляє потік на виході з попереднього вузла. Цю модель широко застосовують у мережах, якими передаються потоки води, електроенергії, пасажирів, транспортних засобів тощо. Ще однією перевагою такої моделі є реалізація потокової задачі у змішаних мережах, у складі яких є й неорієнтовані дуги, які надалі замінюють парою зустрічно напрямлених дуг можливо з неоднаковими параметрами. Тут буде цікавий не лише план розподілу потоків, а й визначення напрямку руху по неорієнтованих дугах (прикладі: керування потоками пасажирів чи транспортних засобів, прямий чи реверсний напрямки перекачування нафтопродуктів, електроенергії тощо). Саме з цією метою дещо змінимо зменшену за розміром модель через заміну певних неорієнтованих дуг орієнтованими (рис. 9).

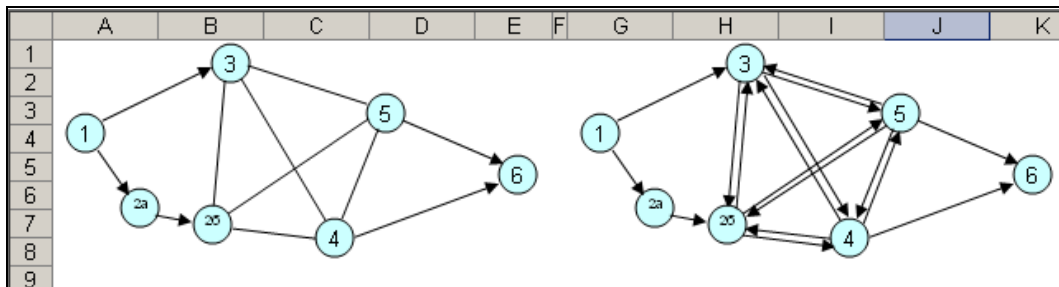


Рис. 9. Перехід від змішаної мережі до орієнтованої

Аналіз результату.

Пряма задача: визначено оптимальні маршрути проходження мережею загального потоку в 100 од. загальної мінімальної вартості (рис. 10).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Сітка А					Дуга	Початок	Кінець	Довжина	Пр. здатн.	Потік (X)	Запас	Оцінки	
2						1-2a	B-1	B-2a	36,2	75	40	35	0	1
3						1-3	B-1	B-3	22,3	60	60	0	-10,3	2
4						2a-2b	B-2a	B-2b	14,0	50	40	10	0	3
5						2b-3	B-2b	B-3	46,1	45	0	45	63,7	4
6						3-2b	B-3	B-2b	40,0	45	0	45	22,4	5
7						2b-5	B-2b	B-5	28,7	45	0	45	16,9	6
8						5-2b	B-5	B-2b	30,0	45	0	45	41,8	7
9						2b-4	B-2b	B-4	46,5	45	40	5	0	8
10						4-2b	B-4	B-2b	50,0	45	0	45	96,5	9
11						3-5	B-3	B-5	29,4	45	40	5	0	10
12						5-3	B-5	B-3	25,0	45	0	45	54,4	11
13						3-4	B-3	B-4	64,1	45	20	25	0	12
14						4-3	B-4	B-3	34,0	45	0	45	98,1	13
15						4-5	B-4	B-5	56,2	45	0	45	90,9	14
16						5-4	B-5	B-4	45,0	45	0	45	10,3	15
17						4-6	B-4	B-6	11,0	100	60	40	0	16
18						5-6	B-5	B-6	44,7	40	40	0	-1,0	17
20										нкш =	10112,0			
21						Вузол	Вх. потік	Вих. потік	Баланс	Обмеж	Част. НКШ			
22						B-1	0	100	-100	-100	-107,7			
23						B-2a	40	40	0	0	-71,5			
24						B-2b	40	40	0	0	-57,5			
25						B-3	60	60	0	0	-75,1			
26						B-4	60	60	0	0	-11,0			
27						B-5	40	40	0	0	-45,7			
28						B-6	100	0	100	100	0,0			

Рис. 10. Потоки мінімальної вартості у дворівневій мережі

Двоїста задача: у стовпці Оцінки додатні числа вказують на можливі додаткові втрати у разі вимушеного включення відповідних дуг у маршрут, а від'ємні числа визначають способи зменшення витрат на передачу потоку через розширення «вузького місця», утвореного двома дугами: (1-3) з оцінкою мінус 10,3 та (5-6) з оцінкою мінус 1,0 відповідно.

Стовпець «Част. НКШ» містить оцінки втрат, спричинених збільшенням потоків через відповідні насичені вузли. Так, при пропусканні збільшеного на одиницю потоку значенням 101 через вузол 1 загальні витрати зростуть на 107,7 од. і складуть значення $10112,0 + 107,7 = 10219,7$.

Висновки. Розроблена методика електронно-табличного моделювання задач потокової оптимізації, де у середовищі табличного процесора будуються і діють математичні моделі, які за своїми властивостями і принципами реалізації повторюють суто електронні моделі, що були реалізовані апаратними засобами. Тож ця методика найкращим чином поєднала позитивні властивості табличних та електронних засобів математичного моделювання і може бути використаною для поточкових задач, вузли яких здійснюють пошук екстремальних значень над початковими даними.

Список літератури

1. Васильев В. В., Пухов Г. Е., Клепикова А. Н., Кузьмичев А. И. Развитие теории математического моделирования задач оперативного оптимального планирования на базе создания квазианалоговых математических моделей. – М.: ГКНТ СССР, 1965. – 8 с.
2. Пухов Г. Е., Васильев В. В. Электрическая модель МЗКП задачи о кратчайшем пути. – К.: Вычислит. центр АН УССР, 1961. – 6 с.
3. А. с. 194432 СССР. Электронная модель сетевого графика для определения критического пути / В. В. Васильев, А. И. Кузьмичев, А. Г. Тимошенко (СССР) – №1055721/26-24; заявл. 07.02.66; опубл. Б.И., 1967, Бюл. № 8; МКИ G06f.
4. А. с. № 217742 СССР. Цифровая модель сетевого графика / В. В. Васильев., А. Г. Додонов (СССР) – №1113615/26-24; заявл. 19.11.66; опубл. Б.И., 1968, Бюл. № 16; МКИ G06g.
5. Смирнов Д. Разработка и сопровождение проектов. Microsoft Project 2003: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Триумф. Сер. Знания и опыт экспертов, 2004. – 347 с.
6. Кузьмичов А. И. Лінійні задачі математичного програмування в MS Excel: Навч. посіб. – К.: Вид-во АМУ, 2006. – 189 с.

В. В. Васильев, А. Г. Додонов, А. И. Кузьмичев

Табличный аналог электронных моделей задач потоковой оптимизации

На примере решения задач поиска экстремальных путей в сети показано, что принципы и техника электронного моделирования успешно можно использовать для моделирования задач потоковой оптимизации в среде современного табличного процессора MS Excel в форме соответствующих электронно-табличных моделей.

V. V. Vasylyev, A. G. Dodonov, A. I. Kuzmychov

Spreadsheet analogue of flow optimization problems electronic models

On the examples of search extreme paths in a network is shown that principles and technique of electronic modeling can be used for successful modeling of flow optimization problems in the environment of the modern spreadsheet processor MS Excel in the form of the proper spreadsheet models.