

УДК 621.396.96(045)

Ю. Г. Лега, проф., д-р техн. наук,
В. В. Палагин, доц., канд. техн. наук,
С. А. Лелеко, асп.

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ ПО МОМЕНТНОМУ КРИТЕРИЮ ТИПА НЕЙМАНА–ПИРСОНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Черкасский государственный технологический университет,
e-mail: Leleko@i.ua, palahin@yahoo.com

На основании адаптированного моментного критерия проверки статистических гипотез типа Неймана–Пирсона, моментно-кумулянтного описания случайных величин и стохастических полиномов высших порядков разработано алгоритм обнаружения постоянного сигнала на фоне эксцессных негауссовских помех. Построены структурные схемы полиномиальных алгоритмов обнаружения постоянных сигналов на фоне помех и исследована их эффективность.

Введение и постановка задачи. Обнаружение сигналов на фоне помех является одной из важных задач, которая решается в радиолокации, радионавигации и относительно телекоммуникационных систем. На данный момент эту задачу решают зачастую на основе использования вероятностных критериев качества (Байеса, Неймана–Пирсона и др.) [1 – 2], где для практического использования широко распространена гауссовская модель помехи, которая не отображает реальных природных процессов. Интересным является построение алгоритмов обнаружения сигналов на фоне негауссовских помех как более обобщённых и приближённых к реальным помехам. Показано, что построение новых моментных критериев, базирующихся на моментно-кумулянтном описании случайной величины и полиномиальном представлении решающих правил (РП) позволяют эффективно решать данную проблему.

Актуальным является построение таких методов и алгоритмов, которые позволяли бы достаточно просто, но в то же время эффективно решать задачу проверки статистических гипотез при использовании моделей негауссовских помех.

Целью этой работы является исследование новых статистических методов и построение на их основе РП обнаружения сигналов на фоне негауссовских помех.

В работе используется моментно-кумулянтное описание случайных величин с помощью конечного числа моментов [3] и полиномиальное представление РП, оптимальные коэффициенты которого находятся по выбранному критерию качества. Такой подход является более предпочтительным с точки зрения простоты получения решений и их эффективности.

В работе использован новый моментный критерий качества типа Неймана–Пирсона KuP , основанный на верхних границах вероятностей ошибок РП KuP . Этот критерий отличается от вероятностного критерия Неймана–Пирсона и является адаптированным для решения новых практических задач по обработке негауссовских случайных величин [4 – 6].

Использование критерия качества позволяет строить такие алгоритмы обработки сигналов, когда одна из вероятностных ошибок РП фиксируется, а вторая находится из минимума критерия качества, что является более предпочтительным с практической точки зрения.

Методика решения задачи. Пусть наблюдается случайная величина ξ в виде аддитивной смеси полезного постоянного сигнала a и случайной величины η , которая распределена по негауссовскому закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией χ_2

$$\xi = a + \eta.$$

Допустим, что из случайного сигнала ξ произведена выборка $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ объемом n . По результатам обработки необходимо принять решение о принятии гипотезы H_1 , когда наблюдается полезная величина вида $\xi = a + \eta$, либо гипотезы H_0 , когда принимается только помеха – $\xi = \eta$.

Для формирования РП воспользуемся моментным критерием качества типа Неймана-Пирсона (*KuP*).

Согласно этому критерию полиномиальное РП Λ_{ns} в общем виде запишем как

$$\Lambda_{ns}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^s k_i \sum_{v=1}^n x_v^i + k_0 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix}, \quad (1)$$

где порог РП

$$k_0 = E_0 C + (1 - C) E_1, \quad (2)$$

где C – нормирующий коэффициент, а k_i находятся из минимума критерия *KuP*:

$$KuP(G, E) = \frac{\frac{G_0}{(1-C)^2} + \frac{G_1}{C^2}}{[E_1 - E_0]^2}, \quad (3)$$

где E_0, E_1, G_0, G_1 – математическое ожидание и дисперсия РП (1) при гипотезах H_0 и H_1 соответственно [4].

Тогда коэффициенты k_i , минимизирующие правую часть (3), находим из решения системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^s k_j \left[\frac{F_{i,j}(H_0)}{(1-C)^2} + \frac{F_{i,j}(H_1)}{C^2} \right] = m_i - u_i, i = \overline{1, S}, \quad (4)$$

где $F_{i,j}(H_0)_j, F_{i,j}(H_1)_j$ – коррелянты размером (i, j) наблюдаемой случайной величины ξ при гипотезе H_0 и альтернативе H_1 соответственно и находятся: $F_{i,j}(H_0) = u_{i+j} - u_i u_j$, $F_{i,j}(H_1) = m_{i+j} - m_i m_j$, где m_i, u_i – начальные моменты i -го порядка наблюдаемой случайной величины при гипотезе и альтернативе соответственно [4].

Неизвестный нормирующий коэффициент C находится из условия заданной вероятности ошибки первого рода:

$$\frac{G_0(C)}{(1-C)^2 [T_1(C) - T_0(C)]^2} = \alpha, \quad (5)$$

а минимизированная вероятность ошибки второго рода РП примет вид

$$\beta = \frac{G_1}{C^2 [E_1 - E_0]^2}. \quad (6)$$

Математические ожидания E_0, E_1 и дисперсии G_0, G_1 при гипотезе и альтернативе РП (1) запишутся в виде

$$E_0 = E[\Lambda_{ns}(\vec{x})/H_0] = n \sum_{i=1}^s k_i u_i, \quad E_1 = E[\Lambda_{ns}(\vec{x})/H_1] = n \sum_{i=1}^s k_i m_i,$$

$$G_0 = E \left[\left(\Lambda_{ns}(\bar{x}) \right)^2 / H_0 \right] = n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_i k_j F_{i,j}(H_0), \quad G_1 = E \left[\left(\Lambda_{ns}(\bar{x}) \right)^2 / H_1 \right] = n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_i k_j F_{i,j}(H_1).$$

В качестве априорной информации о распределении помехи при синтезе РП выступает последовательность моментов и кумулянтов. В этой работе рассмотрена эксцессная случайная величина 1-го типа 1-го вида, для которой отличным от нуля будет кумулянтный коэффициент четвертого порядка γ_4 [3].

Для синтеза нелинейных РП до степени полинома $S = \overline{1,6}$ необходимо учитывать начальные моменты случайной величины ξ при гипотезе и альтернативе до 12-го порядка показанные в работах [3; 4].

Построение РП и исследование их эффективности. В общем виде при степени полинома $S = 1$ РП запишем в линейной форме:

$$\Lambda(\bar{x})_{1n} = k_0 + k_1 \sum_{v=1}^n x_v \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} 0.$$

Из уравнения (4) легко получить значение коэффициента k_1 :

$$k_1 = \frac{q^{0.5}}{\chi_2^{0.5} \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{(1-C)^2} \right)},$$

где $q = \frac{a^2}{\chi_2}$ – отношение сигнал/шум по мощности.

Тогда, для получения порога РП k_0 воспользуемся выражением (2), тогда коэффициент k_0 примет вид:

$$k_0 = \frac{nq(1-C)}{\left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{(1-C)^2} \right)}.$$

Таким образом, РП (1) при степени полинома $S = 1$ примет вид:

$$\Lambda(\bar{x})_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v - (1-C) a \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} 0. \quad (7)$$

Нормирующий коэффициент C находим из условия заданной вероятности ошибки и после несложных преобразований получим, что

$$C = 1 - \frac{1}{\sqrt{nq\alpha}}.$$

При $C = 0,5$ получаем РП, которое полностью совпадает с линейным РП, полученным как по моментному критерию минимума верхней границы вероятностей ошибок [4], так и по вероятностному критерию минимума суммы вероятностей ошибок первого и второго рода РП в предположении гауссовской помехи [1].

Минимизированная вероятность ошибки второго рода РП согласно выражению (6) при $S = 1$ принимает вид

$$\beta_{1n} = \frac{1}{C^2 n q}. \quad (8)$$

Из выражений вероятностей ошибок первого и второго рода РП видно, что при возрастании одной вероятности ошибок другая уменьшается и наоборот, что совпадает с теоретическим трактованием их взаимодействия.

Количество извлекаемой информации о различии гипотез является обратной величиной полученного критерия KuP и может служить количественной мерой оценки эффективности синтезированных РП. В общем виде данная величина имеет вид

$$I_{sn} = \frac{G_0}{(1-C)^2} + \frac{G_1}{C^2} = E_1 - E_0.$$

Для линейного РП (7) количество извлекаемой информации о различии гипотез запишем:

$$I_{1n} = n \frac{q}{\left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{(1-C)^2} \right)}.$$

Из выражения (8), которое выражает вероятность ошибки РП, видно, что при $n \rightarrow \infty$ или при $q \rightarrow \infty$ значение β_1 стремится к нулю.

Линейное РП не учитывает негауссовского распределения помехи, поэтому увеличим степень полинома до $S = 1$.

Для построения нелинейного РП при степени $S = 2$ постановка задачи будет совпадать с постановкой задачи для случая $S = 1$ и поэтому, используя уравнение (1), получим

$$\Lambda(\bar{x})_{2n} = \begin{matrix} H_1 \\ > \\ k_1 \sum_{v=1}^n x_v + k_2 \sum_{v=1}^n x_v^2 - k_0 \\ < \\ H_0 \end{matrix} 0. \quad (9)$$

Показано, что неизвестные коэффициенты РП (9) находятся из решения системы алгебраических уравнений (4).

Порог РП определим в виде выражения

$$k_0 = n \left[C k_2 + (1-C) (k_1 q^{0.5} + k_2 (q+1)) \right].$$

Количество извлекаемой информации о различии гипотез примет вид

$$I_{2n} = n (k_1 q^{0.5} + k_2 q).$$

Неизвестную нормирующую величину C находим из условия заданной вероятности ошибки (5)

$$\alpha_{2n} = \frac{k_1^2 + k_2^2 (\gamma_4 + 2)}{n (1-C)^2 [k_1 q^{0.5} + k_2 q]^2}.$$

Минимизированная вероятность ошибки

$$\beta_{2n} = \frac{A + B}{nC^2 [k_1 q^{0.5} + k_2 q]^2},$$

где $A = k_1^2 + 4k_1 k_2 2q^{0.5}$, $B = k_2^2 (4q^{0.5} + \gamma_4 + 2)$.

Проводя аналогичные рассуждения для различных степеней стохастического полинома, были построены и проанализированы другие РП. Например, при $S = 6$ РП примет вид

$$\Lambda(\bar{x})_{6n} = k_1 \sum_{v=1}^n x_v + k_2 \sum_{v=1}^n x_v^2 + k_3 \sum_{v=1}^n x_v^3 + k_4 \sum_{v=1}^n x_v^4 + k_5 \sum_{v=1}^n x_v^5 k_5 + k_6 \sum_{v=1}^n x_v^6 - k_0 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix}$$

Проведено исследование свойства синтезированных РП. Зависимость отношения количества извлекаемой информации о различии гипотез для линейного РП I_{ln} при $S = 1$ к количеству извлекаемой информации о различии гипотез для нелинейных РП I_{sn} при $S = \overline{2,6}$ от коэффициента эксцесса γ_4 при заданной вероятности ошибки первого рода $\alpha = 10^{-4}$, отношении сигнал/шум $q = 5$ показана на рис. 1.

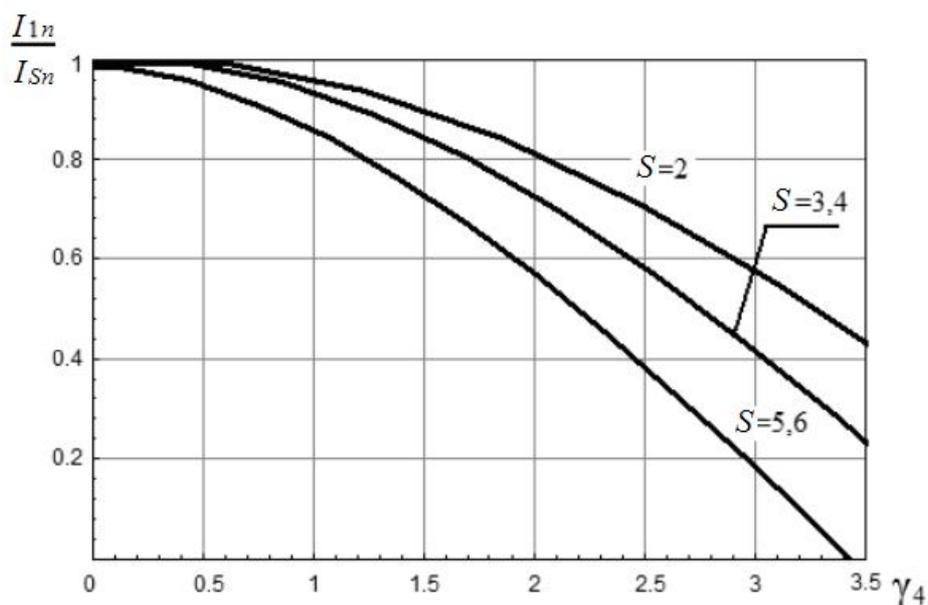


Рис. 1. График зависимости отношения количества извлекаемой информации о различии гипотез для линейного РП I_{ln} к нелинейным РП I_{sn} ($S=\overline{2,6}$) от коэффициента эксцесса γ_4

Из рис. 1 видно, что качество распознавания гипотез будет увеличиваться при отличном от нуля коэффициенте эксцесса γ_4 и количество извлекаемой информации о различии гипотез для нелинейных РП будет стремиться к бесконечности при стремлении γ_4 к границе области допустимых значений (ОДЗ) [3]. С ростом степени полинома S РП эффективность различения гипотез увеличивается при уменьшении ОДЗ.

На рис. 2, 3 приведены графики зависимости отношения минимизированной вероятности ошибки второго рода для линейного РП β_{ln} к нелинейным РП β_{sn} ($S=\overline{2,6}$) от соотношения сигнал/шум q при заданной вероятности ошибки первого рода $\alpha = 10^{-3}$ и объеме выборки $n = 200$. На графиках видно, что учёт коэффициента эксцесса γ_4 позволяет уменьшить минимизированную вероятность ошибки второго рода, причем наблюдается резкое уменьшение отношения β_{sn} с учётом негауссовости помехи в виде коэффициента γ_4 .

Из графиков зависимости порога РП k_0 при степенях стохастического полинома $S = 1$ и $S = 2$ видно, что коэффициент эксцесса γ_4 значительно влияет на его величину, а, следовательно, и на эффективность обработки (рис. 4).

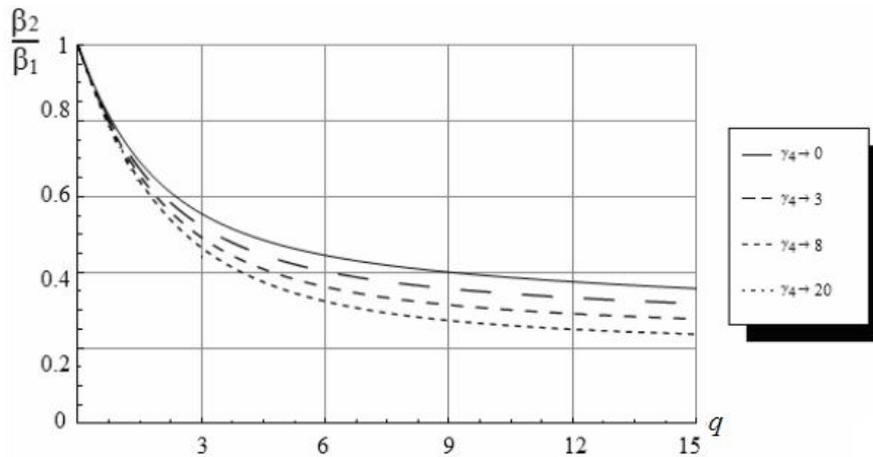


Рис. 2. График зависимости отношения вероятности ошибки второго рода для линейного РП β_{1n} к нелинейному РП β_{2n} от соотношения сигнал/шум q

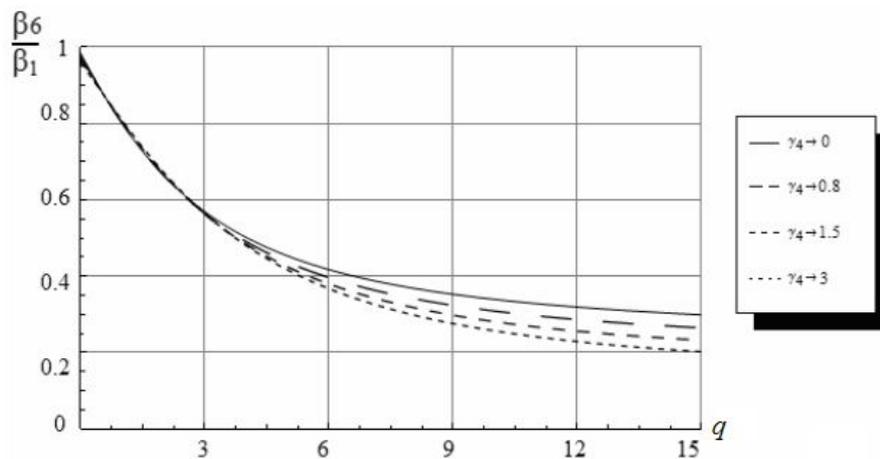


Рис. 3. График зависимости отношения вероятности ошибки второго рода для линейного РП β_{1n} к нелинейному РП β_{6n} от соотношения сигнал/шум q

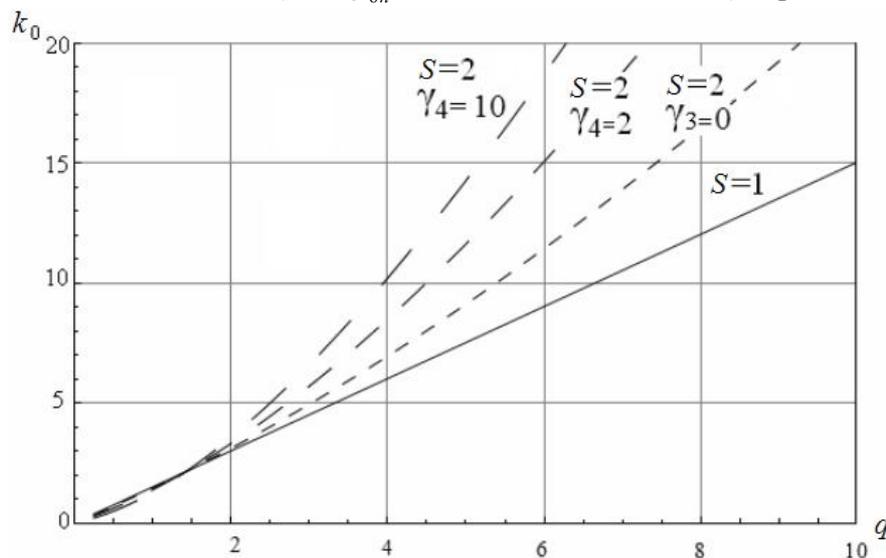


Рис. 4. График зависимости порога РП k_0 от соотношения сигнал/шум q

На основе полученных РП построена структурная схема полиномиальных обнаружителей постоянного сигнала на фоне негауссовских помех (рис. 5).

Структурная схема состоит из 6 параллельных степенных блоков обработки сигнала. Количество степенных блоков определяется степенью полинома S . В степенных блоках обработки происходит суммирование и умножение выборочных значений x_v на соответствующие коэффициенты k_i . Сумма перемноженных выборочных значений x_v сравнивается со значением порогового коэффициента и таким образом система принимает решение о наличии на входе устройства только помехи (гипотеза H_0) или аддитивной смеси сигнала и помехи (гипотеза H_1).

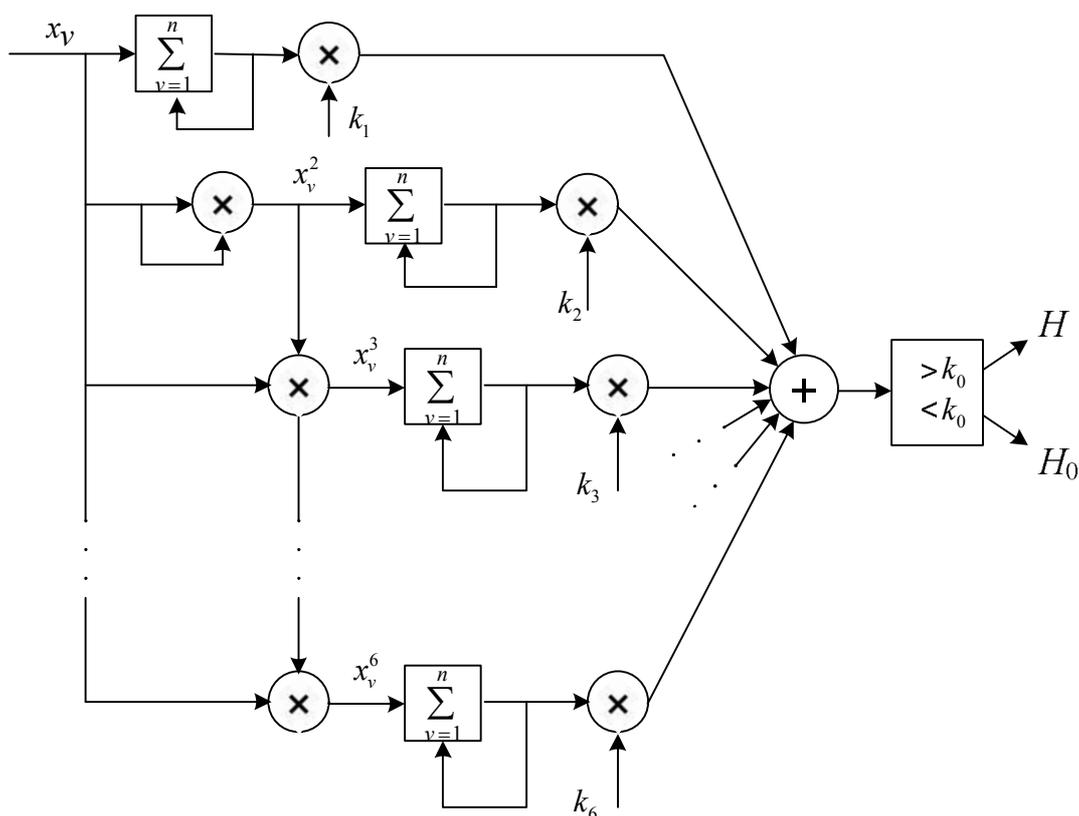


Рис. 5. Структурная схема обнаружителя постоянного сигнала

Выводы. В данной работе использован новый метод проверки статистических гипотез на основе использования моментно-кумулянтного описания случайных величин и построение РП в виде стохастических полиномов высших порядков.

При построении РП был использован новый адаптированный моментный критерий качества типа Неймана–Пирсона, на основе которого синтезированы нелинейные РП, найдены их качественные характеристики.

Проведено компьютерное моделирование эффективности синтезированных полиномиальных РП. Показано что, учёт негауссовости помехи и увеличение степени стохастического полинома позволяет увеличить количество извлекаемой информации из выборочных значений и уменьшить одну из вероятностей ошибок РП, что в целом приводит к увеличению эффективности синтезированных алгоритмов.

Проведён анализ нелинейных РП, построены структурные схемы алгоритмов обнаружения, которые достаточно просто реализуются на современной элементной базе.

Результаты исследований показывают, что учёт тонкой структуры негауссовской помехи в виде коэффициента эксцесса γ_4 , позволяет повысить эффективность синтезированных РП при достаточно простой структуре их построения, что позволяет

утверждать о возможности эффективного практического применения синтезированных нелинейных алгоритмов выявления сигналов на фоне негауссовских помех в системах связи, радиолокации и др.

Список литературы

1. *Сосулин Ю. Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.
2. *Акимов П. С.* Обнаружение радиосигналов. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с.
3. *Кунченко Ю. П.* Стохастические полиномы. – К.: Наук. думка, 2006. – 275 с.
4. *Палагин В. В.* Построение полиномиальных решающих правил обнаружения сигналов на фоне негауссовских помех по моментному критерию типа Неймана-Пирсона. 2006 // Вісн. ЧДТУ. – №4. – С. 94 – 99.
5. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В.* Построение моментного критерия качества типа Неймана-Пирсона для проверки простых статистических гипотез // Вісн. інж. акад. України. – 2005. – №1. – С. 26 – 30.
6. *Кунченко Ю. П., Палагин В. В., Мартыненко С. С.* Разработка нелинейных обнаружителей сигналов при негауссовых помехах, оптимальных по дисперсионным критериям // Тр. 2-й междунар. конф. по радиосвязи, звуковому и телевиз. вещанию (УкрТелеком-95). – Одесса, 1995. – С. 440 – 443.

Ю. Г. Лега, В. В. Палагин, С. А. Лелеко

Побудова поліноміальних вирішальних правил за моментним критерієм типа Неймана-Пірсона для перевірки статистичних гіпотез

На підставі адаптованого моментного критерію перевірки статистичних гіпотез типу Неймана-Пірсона, моментно-кумулянтного опису випадкових величин і стохастичних поліномів вищих порядків розроблено алгоритм виявлення постійного сигналу на фоні ексцесних негауссівських завад. Побудовано структурні схеми поліноміальних алгоритмів виявлення постійного сигналу на фоні ексцесних негауссівських завад та досліджено їх ефективність.

Y. G. Lega, V. V. Palahin, S. A. Leleko

Synthesis of polynomials decisions rules noise by a moments criterion as neyman-pyrson of signals detection on a background non-gaussisan for verification of statistical hypotheses

In paper on the basis of the adapted moment criterion of verification of statistical hypotheses of type Neyman-Pirson, moment descriptions of casual values and stochastic polynomials of higher orders are developed algorithm of exposure of permanent signal on a background of kurtosis non-Gaussian noises. The efficiency of the synthesized nonlinear algorithms of signals recognition was explored. Also the flowchart of realization of algorithms was built.