УДК 621.372

[1]**І. Б. Ніколенко,** асп.,
[2]**В. М. Шутко,** д-р техн. наук

СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЯ ЧАСОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ З АНАЛІТИЧНИМ ЗВ'ЯЗКОМ МІЖ ЇХ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ ОСНОВАМИ

[1]Інститут електроніки і систем управління, e-mail: 4667822@ukr.net
[2]Інститут електроніки і систем управління, e-mail: shutko@nau.edu.ua

Запропоновано сплайн-оцінювання за методом найменших квадратів двох часових послідовностей, які містять випадкову складову, з урахуванням лінійного аналітичного зв`язку між детермінованими основами цих послідовностей.

Постановка проблеми. У задачах числової обробки даних, що містять випадкові складові, часто необхідно оцінити тренди часових послідовностей, між якими існує деякий аналітичний зв'язок. Природно використовувати апріорні зв'язки як у випадку, коли оцінюються систематичні похибки вимірювань, так і для підвищення точності обробки експериментальних даних за наявності випадкових похибок. Такими методами є, зокрема, поліноміальне згладжування, згладжування тригонометричними багаточленами, калманівська фільтрація, багаточленні узагальнені, квазікалманівські, вінерівські та інші фільтри. Цікавим для розв'язання цієї задачі є застосування сплайнів як згладжувальної функції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У праці [5] розглянуто задачу узгодження польотних даних з використанням апріорного аналітичного надлишку, що є у кінематичних співвідношеннях і рівняннях руху центра мас, які виражені через перевантаження (прискорення) в центрі мас. Можливі й інші апріорні зв'язки між вимірюваними параметрами. У цій монографії розглядаються різні модельні задачі згладжування двох і більше часових рядів за наявності між вимірюваними величинами лінійних та нелінійних апріорних аналітичних зв'язків.

Сплайн-апроксимація аналітично-зв'язаних часових послідовностей. Розглянемо задачу в такій постановці.

Часові послідовності деяких випадкових процесів подано відліками:

$$y_1(t) = \{y_1(1),\, y_1(2),...,\, y_1(N)\} \text{ та } y_2(t) = \{y_2(1),\, y_2(2),...,\, y_2(N)\},$$

одержаними як результати вимірювань за схемою:

$$y_i(t) = x_i(t) + \eta_i(t), \quad i = 1, 2, ... ,$$

де $\eta_i(t)$ – шум з нульовим середнім; $E(.)$ – математичне сподівання $E\eta_i(t) = 0$; $E\eta_i(t)\eta_j(\tau) = \sigma^2_{\eta_i}\delta_{ij}\delta_{t\tau}$, δ_{ij}, $\delta_{t\tau}$ – функції Дірака.

Нехай далі між $x_1(t)$ та $x_2(t)$ існує лінійний зв'язок:

$$b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = d .$$

Складемо такий функціонал у вигляді:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}[y_1(i) - S_1(t_i)]^2 + \sum_{i=1}^{N}[y_2(i) - S_2(t_i)]^2 + \lambda\sum_{i=1}^{N}[d - b_1 S_1(t_i) - b_2 S_2(t_i)]^2,$$

де $S_1(t) = XA_1$ та $S_2(t) = XA_2$ – кубічні ермітові сплайни, які апроксимують часові послідовності $y_1(t)$ та $y_2(t)$; X – матриця планування; $A = \{a_j\}_{j=0}^{r}$ – вектори оцінюваних параметрів (ординати точок "склейки" фрагментів сплайнів), у цьому випадку вага $\lambda = 1$.

Значення локального ермітового кубічного сплайна в довільній точці обчислюємо за формулою

$$S(\omega) = a_{j\text{-}1}\ {}^{1}x(\omega) + a_j\ {}^{2}x(\omega) + a_{j+1}\ {}^{3}x(\omega) + a_{j+2}\ {}^{4}x(\omega)$$

для $\omega \in [\omega_{u_j}, \omega_{u_{j+1}}]$, де ${}^{k}x(\omega)$ – локальні функції форми, $k = \overline{1...4}$,

a_j – значення ординат вузлів "склейки", $j = 1, 2, ..., r$.

Вимагатимемо виконання умови методу найменших квадратів (МНК): $\Phi^* = \min$. Для цього потрібно розв'язати систему з $2r$ рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_{1j}} = 0, \quad j = \overline{1, r}; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_{2j}} = 0, \quad j = \overline{1, r}. \end{cases}$$

Розв'язати цю систему доцільніше у матричному вигляді. Тоді:

$$\Phi = (Y_1 - XA_1)^{\mathrm{T}}(Y_1 - XA_1) + (Y_2 - XA_2)^{\mathrm{T}}(Y_2 - XA_2) +$$
$$+ \lambda(D - b_1XA_1 - b_2XA_2)^{\mathrm{T}}(D - b_1XA_1 - b_2XA_2).$$

А вимоги МНК:

$$(Y - PA)^{\mathrm{T}}(Y - PA) = \min,$$

де $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ D \end{bmatrix}$, $Y_1 = [y_1(1), y_1(2), ..., y_1(N)]^{\mathrm{T}}$, $Y_2 = [y_2(1), y_2(2), ..., y_2(N)]^{\mathrm{T}}$ – вектори початкових часових послідовностей;

$D = [d, d, ..., d]^{\mathrm{T}}$, розмірності $(N * 1)$;

$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $A_1 = [a_{11}, a_{12}, ..., a_{1r}]^{\mathrm{T}}$, $A_2 = [a_{21}, a_{22}, ..., a_{2r}]^{\mathrm{T}}$ – вектори ординат вузлів "склейки" фрагментів сплайна;

$P = \begin{bmatrix} X & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & X \\ b_1X & b_2X \end{bmatrix}$, X – блочнодіагональні матриці планування, стовпцями яких є локальні функції форми сплайна ${}^{k}x(t)$, $k = 1...4$ [3, 4]; O – нульова матриця, розмірності $N * r$. Розмірність матриці P – $(3N * 2r)$.

Далі класичний розв'язок МНК:

$$A = (P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}Y,$$

та $S_1 = XA_1$, $S_2 = XA_2$ – сплайни, які побудовані вже з урахуванням аналітичного зв'язку між $x_1(t)$ та $x_2(t)$.

На рис. 1 наведено приклад побудови класичної сплайн-апроксимації (Sk_1, Sk_2) та сплайн-оцінки (S_1, S_2) з урахуванням аналітичного зв'язку двох часових послідовностей:

$$y_1(t) = \sin(t) + \eta_1(t) \quad \text{та} \quad y_2(t) = \frac{d}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} x_1(t) + \eta_2(t),$$

де $\eta_1(t), \eta_2(t)$ – нормальні шуми з нульовими математичними сподіваннями та середньоквадратичними відхиленнями $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ ($d = -2,\ b_1 = 1,\ b_2 = 2$).

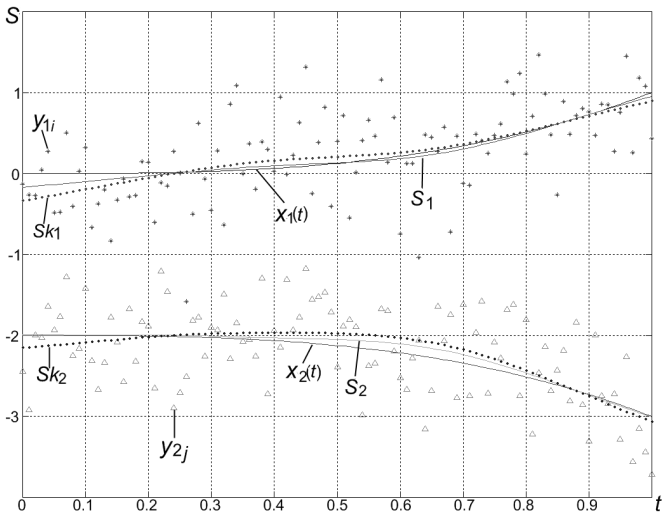


Рис. 1. Сплайн-апроксимації часових послідовностей
класичним (Sk_1, Sk_2) та запропонованим (S_1, S_2) методами

За допомогою математичного моделювання побудуємо графіки похибок сплайнів відносно детермінованих основ ($x_1(t), x_2(t)$) залежно від середньоквадратичних відхилень випадкових складових ($\sigma_1 = \sigma_2$) (рис. 2).

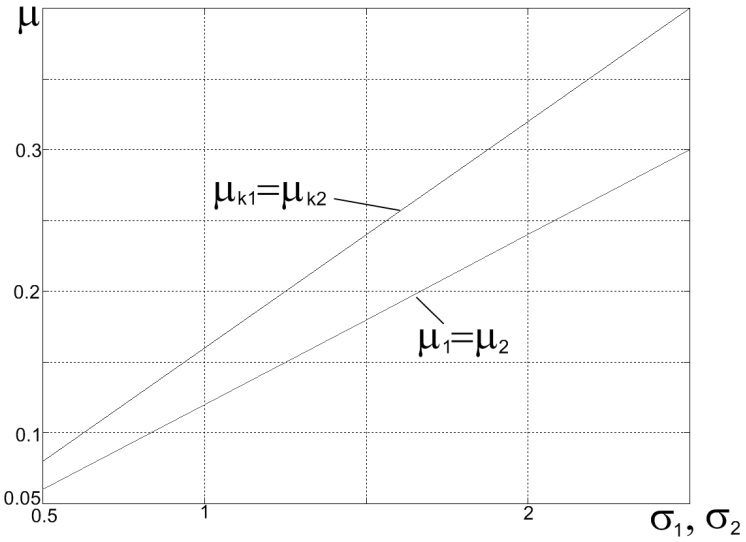


Рис. 2. Середньоквадратичне відхилення похибок сплайнів,
побудованих класичним ($\mu k_1, \mu k_2$) та запропонованим (μ_1, μ_2) методами

Цікаво відзначити, що сплайни, які апроксимують першу і другу часові послідовності (похибки $\mu_1 = \mu_2$), мають перевагу порівняно з класичним методом (похибки $\mu k_1, \mu k_2$).

Результати експериментального оцінювання залежності середньоквадратичних відхилень μ_1, μ_2 від значення вагового множника λ показано на рис. 3.

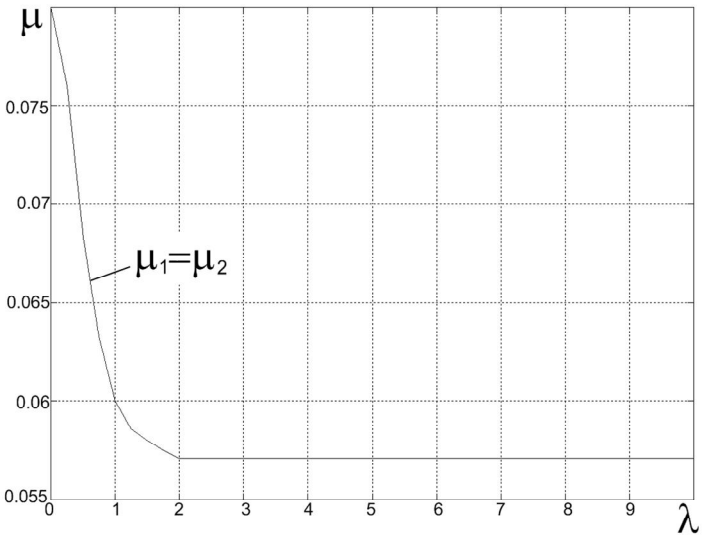


Рис. 3. Залежність середньоквадратичних відхилень μ_1, μ_2 від значення вагового множника λ

Висновки:

1. Урахування аналітичного зв'язку зменшує середньоквадратичне відхилення побудованого сплайна від його детермінованої основи.

2. Експериментально показано, що із зменшенням вагового множника λ зменшуються значення похибки μ, але оскільки для $\lambda > 2$ зменшення середньоквадратичного відхилення незначне, то доцільно вибирати для конкретної задачі $0 < \lambda < 2$.

Список літератури

1. *Шутко М. О.* Методы и средства повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем управления воздушным движением // Автореф. дис…. д-ра техн. наук: 05.22.14/КИИГА. – К., 1991. – 32 с.
2. *Шутко В. М.* Сплайн-Фур'є методи й засоби підвищення ефективності функціонування автоматизованих систем управління // Автореф. дис…. д-ра техн. наук: 05.13.06 / НАУ. – К., 2006. – 36 с.
3. *Касьянов В. О., Шутко В. М., Шелевицький І. В.* Сплайн-апроксимація аналітично зв'язаних часових послідовностей // Вісн. НАУ.– К.: НАУ, 2001. – № 4(11). – С. 117 – 120.
4. *Шутко В. М.* Сплайн-апроксимація оцінок кореляційних послідовностей гармонійних сигналів // Вісн. НАУ. – К.: НАУ, 2002. – № 1(12). – С. 73 – 77.
5. *Касьянов В. А.* Моделирование полета: Монография. – К.: В-во НАУ, 2004. – 381 с.

И. Б. Николенко, В. Н. Шутко

Сплайн-аппроксимация временных последовательностей с аналитической связью между их детерминированными основами.

Предложено сплайн-оценивание по методу наименьших квадратов двух временных последовательностей, которые содержат случайную составляющую, с учетом линейной аналитической связи между детерминированными основами этих последовательностей.

I. B. Nikolenko, V. N. Shutko

A spline-approximation of temporal sequences with analytical connection between their determined bases.

A spline-evaluation after the method of the least squares of two temporal sequences which contain a accidental constituent is offered, taking into account linear analytical connection between the determined bases of these sequences.