УДК 517.3(045)

[1] **О. М. Литвин**, доктор фіз.-мат. наук, проф.,
[2] **О. П. Нечуйвітер**, канд. фіз.-мат. наук

ІНТЕРЛІНАЦІЯ ТА ОПТИМАЛЬНА ЗА ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТІ КУБАТУРНА ФОРМУЛА ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ

[1] Українська інженерно-педагогічна академія, e-mail: olesya@email.com
[2] Українська інженерно-педагогічна академія, e-mail: academ@kharkov.ua

Запропоновано оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних на основі сплайн-інтерлінації на лініях ректангуляції.

Вступ та постановка завдання. Натепер суттєвим є питання створення оптимальних алгоритмів (або близьких до них) розв'язання тих чи інших завдань. Особливо це пов'язано з тим, що для розв'язання завдань радіоастрономії, радіолокації, кристалографії необхідно виконувати обчислення з досить великою точністю, якомога меншою витратою часу, обробляючи при цьому великі масиви інформації. Ця проблема актуальна і для завдань цифрової обробки сигналів. У праці [1] наведено оптимальні за точністю, оптимальні за порядком точності та асимптотично оптимальні кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на класах Ліпшиця, диференційовних функцій.

У цій роботі йтиметься про побудову оптимальної за порядком точності кубатурної формули для обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних на основі сплайн-інтерлінації на лініях ректангуляції,

$$I(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy,$$

де $f(x,y)$ – належить до деякого класу функцій і інформацію про функцію задано не більше ніж на N лініях з $[0,1]^2$.

Загальна оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних на основі сплайн-інтерлінації на лініях ректангуляції. Як множину кубатурних формул L_N для наближеного обчислення $I(f,\omega)$ будемо розглядати множину кубатурних формул ℓ_N, що використовують інформація про $f(x,y)$ не більше ніж на N лініях. Через $R(f,\omega,\ell_N)$ позначимо похибку наближеного обчислення $I(f,\omega)$ кубатурною формулою $\ell_N: R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N$. Похибкою кубатурної формули ℓ_N на класі F називаємо величину $R(F,\omega,\ell_N)=\sup\limits_{f(x)\in F}\left|R(f,\omega,\ell_N)\right|$. Оптимальною похибкою числового інтегрування на класі називаємо $R_N(F,\omega)=\inf\limits_{\ell_N\in L_N}R(F,\omega,\ell_N)$. Щоб отримати оцінку знизу величини $R_N(F,\omega)$ спочатку для фіксованої кубатурної формули ℓ_N отримаємо оцінку знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$. Якщо ця оцінка знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$ не залежить від кубатурної формули ℓ_N, то ця ж оцінка справедлива і для величини $R_N(F,\omega)$. Для отримання оцінок знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$ використовуємо метод "капелюхів", основу якого складає лема.

Лема. Нехай $I(f,\omega)$ обчислюється за допомогою кубатурної формули

$$\ell_N = \sum_{k=1}^{N_1}\alpha_k \sum_{s_1=0}^{n}\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_k,y)\sin\omega y dy + \sum_{j=1}^{N_2}\beta_j\sum_{s_2=0}^{n}\int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_j)\sin\omega x dx - \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} c_{kj} f(x_k,y_j),$$

що зводить $I(f,\omega)$ до обчислення N інтегралів $\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_k,y)\sin\omega y dy$, $\int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_j)\sin\omega x dx$, $k=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$, $N=N_1+N_2$, $s_1,s_2=\overline{0,n}$. Тоді для похибки $R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N$ справедлива формула

$$R(f,\omega,\ell_N)=\int_0^1\int_0^1 \varphi(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy,$$

де $\varphi(x,y)\Big|_{x=x_k}=0,\quad \varphi(x,y)\Big|_{y=y_j}=0,\quad \varphi(x_k,y_j)=0,\quad 1\le k\le N_1,\quad 1\le j\le N_2.$

Доведення. Уведемо до розгляду оператор $O_{N_1N_2}f(x,y)$-інтерлінант з властивостями

$$\frac{\partial^{p_1}O_{N_1N_2}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k}=\frac{\partial^{p_1}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k},\qquad \frac{\partial^{p_2}O_{N_1N_2}f(x,y)}{\partial y^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j}=\frac{\partial^{p_2}f(x,y)}{\partial y^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j},$$

$1\le k\le N_1,\quad 1\le j\le N_2,\quad 0\le p_1,p_2\le n.$

Тоді

$$R(f,\omega,\ell_N)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy-\int_0^1\int_0^1 O_{N_1N_2}f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y)-O_{N_1N_2}f(x,y)\right]\sin\omega x\sin\omega y dxdy=\int_0^1\int_0^1\varphi(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy,$$

де $\varphi(x,y)$ має властивості

$$\varphi(x,y)\Big|_{x=x_k}=0,\quad \varphi(x,y)\Big|_{y=y_j}=0,\quad \varphi(x_k,y_j)=0,\quad 1\le k\le N_1,\quad 1\le j\le N_2.$$

Зауваження. Аналогічна лема для випадку однієї змінної наводиться у праці [2].

Нехай $\Omega=[0,1]^2$, $\Omega=\bigcup_i \Pi_i$, $\Pi_i=[x_{i_1},x_{i_1+1}]\times[y_{i_2},y_{i_2+1}]$, $i=(i_1,i_2)$, $i_1=\overline{1,N_1-1}$, $i_2=\overline{1,N_2-1}$. Розглянемо оператор

$$E_{i,n}f(x,y)=\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{s_1=0}^{n}h_{j_1,s_1}(x)f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n}H_{j_2,s_2}(y)f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_1=0}^{n}\sum_{s_2=0}^{n}h_{j_1,s_1}(x)H_{j_2,s_2}(y)f^{(s_1,s_2)}(x_{j_1},y_{j_2}),$$

$$(x,y)\in\Pi_i\subset\Omega,\quad i=(i_1,i_2),$$

де $h_{j_1,s_1}(x)$, $H_{j_2,s_2}(y)$ – базисні сплайни порядку 0, 1, 2, 3,...з властивостями

$$\frac{d^{p_1}h_{j_1,s_1}(x)}{dx^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k}=\delta_{p_1,s_1}\delta_{k,j_1};\qquad \frac{d^{p_2}H_{j_2,s_2}(y)}{dy^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j}=\delta_{p_2,s_2}\delta_{j,j_2}.$$

Цей оператор має властивості

$$f(x,y)\in C^{m}(\Omega)\to E_{i,n}f(x,y)\in C^{m-n}(\Omega),\quad m\ge 2n,$$

$$\left.\frac{\partial^{p_1}E_{i,n}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_k}=\left.\frac{\partial^{p_1}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_k},\qquad \left.\frac{\partial^{p_2}E_{i,n}f(x,y)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_j}=\left.\frac{\partial^{p_2}f(x,y)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_j},$$

$0\le p_1,p_2\le n$.

Тоді оператор $E_{\Omega}f(x,y)$, що визначається рівностями

$$E_{\Omega}f(x,y)=E_{i,n}f(x,y),\quad (x,y)\in\Pi_i\subset\Omega,$$

буде задовольняти умови $E_{\Omega}f(x,y)\in C^{n}(\Omega)$,

$$\left.\frac{\partial^{p_1}E_{\Omega}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_k}=\left.\frac{\partial^{p_1}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\right|_{x=x_k},\qquad \left.\frac{\partial^{p_2}E_{\Omega}f(x,y)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_j}=\left.\frac{\partial^{p_2}f(x,y)}{dy^{p_2}}\right|_{y=y_j},$$

$0\le p_1,p_2\le n$ і називається кусково-поліноміальним інтерлінаційним оператором, або кусково-поліноміальним інтерлінантом. Він інтерлінує функцію $f(x,y)$ та її немішані похідні на чотирьох взаємно перпендикулярних прямих – межі Π_i; при цьому на межах двох сусідніх прямокутників, що мають спільні сторони або точки, породжені цим оператором функції, зберігають неперервні похідні до порядку n включно. Функція $E_{\Omega}f(x,y)$ має значення в точках $(x,y)\in\Pi_i\subset\Omega$, залежні від слідів функції $f(x,y)$ та її нормальних похідних до порядку n лише на межі $\partial\Pi_i$.

Нехай $f(x,y)\in L^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, $1\le q\le\infty$,

$$L_q^{p}(\Omega)=:\left\{f(x,y)\,\middle|\,f^{(s_1,s_2)}(x,y)\in C(\Omega),\quad 0\le s_k\le p_k,\,k=1,2,\,s\ne p,\,p=(p_1,p_2):\ \left\|f^{(p)}\right\|_{L_q(\Omega)}\le 1\right\}.$$

Похибка поліноміальної інтерлінації в кожному з прямокутників Π_i задовольняє нерівність $\left|f(x,y)-E_{\Omega}f(x,y)\right|\le\left|Q_i(x,y)\right|$, $(x,y)\in\Pi_i\subset\Omega$, $i=(i_1,i_2)$, де $Q_i(x,y)$ ‘стандартна’ функція:

$$Q_i(x,y)=\frac{1}{\big(2(n+1)\big)!\cdot\big(2(n+1)\big)!}\prod_{j_1=i_1}^{i_1+1}\left(x-x_{j_1}\right)^{n+1}\prod_{j_2=i_2}^{i_2+1}\left(y-y_{j_2}\right)^{n+1},\quad (x,y)\in\Pi_i.$$

Твердження 1 [3]**.** Якщо $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, то $\left|f(x,y)-E_{\Omega}f(x,y)\right|\le\left|Q(x,y)\right|$, $(x,y)\in\Omega$. Похибка є найменшою у кожній точці $x\in\Omega$, де $Q(x,y)=Q_i(x,y)$, $(x,y)\in\Pi_i$.

Тому похибка наближення функції $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$ оператором $E_{\Omega}f(x,y)$ у кожній точці оцінюється з огляду на значення функції $Q(x,y)=Q_i(x,y)$, $(x,y)\in\Pi_i$.

Нехай $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, $1\le q\le\infty$ і сліди $f(x_{j_1},y)$, $f(x,y_{j_2})$, $j_1,j_2=\overline{1,M}$ задані не більше, ніж на $N=2M$ прямих. Для обчислення інтеграла

$$I(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y\,dxdy$$

пропонується формула

$$R_N(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1 E_\Omega f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy.$$

Підставляючи вираз для оператора-інтерлінанта, отримаємо

$$R_N(f,\omega)=\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{s_1=0}^{n}\int_0^1 h_{j_1,s_1}(x)\sin\omega x dx\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)\sin\omega y dy+$$

$$+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n}\int_0^1 H_{j_2,s_2}(y)\sin\omega y dy\int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})\sin\omega x dx-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_1=0}^{n}\sum_{s_2=0}^{n} f^{(s_1,s_2)}(x_{j_1},y_{j_2})\int_0^1 h_{j_1,s_1}(x)\sin\omega x dx\int_0^1 H_{j_2,s_2}(y)\sin\omega y dy.$$

Будемо вважати, що $\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)\sin\omega y dy,\quad \int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})\sin\omega x dx$ задано точно.

Теорема 1. Кубатурна формула $R(f,\omega)$ для обчислення інтеграла $I(f,\omega)$ є оптимальною за порядком точності, якщо $M(n+1)\ge|\omega|$.

Доведення. Отримаємо оцінку знизу та зверху величини $R(F,\omega,\ell_N)=$ $=R\left(L_q^{2(n+1),2(n+1)}(\Omega),\omega,R_N(f,\omega)\right)$.

Знайдемо оцінку зверху

$$\left|I(f,\omega)-R_N(f,\omega)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right)\sin\omega x\sin\omega y dxdy\right|\le$$

$$\le\sum_{j_1=1}^{M-1}\sum_{j_2=1}^{M-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\left|f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right|dxdy\le$$

$$\le\frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^2}\sum_{j_1=1}^{M-1}\sum_{j_2=1}^{M-1}\int_{x_{j_1}}^{x_{j_1+1}}\int_{y_{j_2}}^{y_{j_2+1}}\prod_{\alpha=i_1}^{i_1+1}\prod_{\beta=i_2}^{i_2+1}(x-x_\alpha)^{n+1}(y-y_\beta)^{n+1}dxdy=$$

$$=\frac{\Delta^{2(n+1)}\Delta^{2(n+1)}}{(2(n+1))!(2(n+1))!}=\frac{\Delta^{4(n+1)}}{\left[(2(n+1))!\right]^2}.$$

Оскільки оцінка $\left|I(f,\omega)-R_N(f,\omega)\right|$ справедлива для будь-якої функції класу $L_q^{2(n+1),2(n+1)}(\Omega)$, то

$$R\left(L_q^{2(n+1),2(n+1)}(\Omega),\omega,R_N(f,\omega)\right)\le\frac{\Delta^{4(n+1)}}{\left[(2(n+1))!\right]^2}=\frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^2}\frac{1}{M^{4(n+1)}}.$$

Отже, $R\left(L_q^{2(n+1),2(n+1)}(\Omega),\omega,R_N(f,\omega)\right)\le\dfrac{2^{4(n+1)}}{\left[(2(n+1))!\right]^2}\dfrac{1}{N^{4(n+1)}}$.

Знайдемо оцінку знизу. Нехай область Ω розбивається на підобласті $G_{kr}=\Delta_k\times\overline{\Delta}_r$,

$$\Delta_k=\left\{x:x\in\left[(6k+1)\pi/|\omega|;(6k+5)\pi/|\omega|\right]\right\},\ k=0,1,...,\left[|\omega|/\pi\right]-1;$$

$$\bar{\Delta}_r = \left\{ y : y \in \left[(6r+1)\pi/|\omega|; (6r+5)\pi/|\omega| \right] \right\},\ r = 0,1,...,\left[|\omega|/\pi \right] - 1$$

площею $\frac{2\pi}{3|\omega|} \times \frac{2\pi}{3|\omega|}$; тоді в точках цієї підобласті маємо $|\sin\omega x| \ge \frac{1}{2}$, $|\sin\omega y| \ge \frac{1}{2}$, $(x,y) \in G_{kr}$. Нехай $M(n+1) \ge |\omega|$. Розіб'ємо кожну область G_{kr} на $\ell = \left(\left[2M/\left[|\omega|/\pi \right] \right] + 1 \right)^2$ підобластей $G_{kr}^{\nu\mu} = \Delta_k^{\nu} \times \bar{\Delta}_r^{\mu}$, $\nu, \mu = 0,...,\ell - 1$. Повне число підобластей $G_{kr}^{\nu\mu}$ дорівнює $\ell \left(\left[|\omega|/\pi \right] \right)^2 \ge 4M^2$, отже, буде не менше ніж M^2 областей $G_{kr}^{\nu\mu}$, куди не попали вузли кубатурної формули.

Зауважимо, що

$$\left(f(x,y) - E_\Omega f(x,y) \right) \Big|_{x = x_k^{\mu}} = \left(f(x,y) - E_\Omega f(x,y) \right) \Big|_{y = y_r^{\nu}} = 0 .$$

Розглянемо функцію

$$f^*(x,y) = \frac{1}{\left[(2n+2)! \right]^2} \left(x - x_k^{\mu} \right)^{n+1} \left(x - x_k^{\mu+1} \right)^{n+1} \left(y - y_r^{\nu} \right)^{n+1} \left(y - x_r^{\nu+1} \right)^{n+1} \operatorname{sign}(\sin\omega x) \operatorname{sign}(\sin\omega y)$$

на тих $\Delta_k^{\nu} \times \bar{\Delta}_r^{\mu}$, куди не попали лінії інтегрування. Коли $(x,y) \in G \setminus G_{kr}^{\nu\mu}$, то $f^*(x,y) = 0$. Ця функція належить до класу $L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$ та згідно з методом "капелюхів" є "поганою" [1] функцією класу. Знайдемо оцінку знизу:

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 f^*(x,y) \sin\omega x \sin\omega y dxdy \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\left[(2n+2)! \right]^2} \sum_{\Delta_k^{\mu}} \sum_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \int_{\Delta_k^{\mu}} \int_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \prod_{\alpha=\mu}^{\mu+1} \prod_{\beta=\nu}^{\nu+1} \left(x - x_k^{\alpha} \right)^{n+1} \left(y - y_r^{\beta} \right)^{n+1} \operatorname{sign}(\sin\omega x) \operatorname{sign}(\sin\omega x) \sin\omega x \sin\omega x dxdy \right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{4\left[(2n+2)! \right]^2} \sum_{\Delta_k^{\mu}} \sum_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \int_{\Delta_k^{\mu}} \int_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \prod_{\alpha=\mu}^{\mu+1} \prod_{\beta=\nu}^{\nu+1} \left| \left(x - x_k^{\alpha} \right)^{n+1} \left(y - y_r^{\beta} \right)^{n+1} \right| dxdy =$$

$$= \frac{1}{4\left[(2n+2)! \right]^2} \sum_{\Delta_k^{\mu}} \sum_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \int_{\Delta_k^{\mu}} \left| \left(x - x_k^{\mu} \right)^{n+1} \left(x - x_k^{\mu+1} \right)^{n+1} \right| dx \int_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \left| \left(y - y_r^{\nu} \right)^{n+1} \left(y - y_r^{\nu+1} \right)^{n+1} \right| dy .$$

Обчислимо інтеграл

$$\int_{\Delta_k^{\mu}} \left| \left(x - x_k^{\mu} \right)^{n+1} \left(x - x_k^{\mu+1} \right)^{n+1} \right| dx = \int_{x_k^{\mu}}^{x_k^{\mu+1}} \left(x - x_k^{\mu} \right)^{n+1} \left(x_k^{\mu+1} - x \right)^{n+1} dx = \frac{\left((n+1)! \right)^2}{(2n+3)!} \left(\Delta_{1k}^{\mu} \right)^{2n+3} .$$

Отже, $\left| \int_0^1 \int_0^1 f^*(x,y) \sin\omega x \sin\omega y dxdy \right| \ge \frac{1}{4\left[(2n+2)! \right]^2} \frac{\left((n+1)! \right)^4}{\left((2n+3)! \right)^2} \sum_{\Delta_k^{\mu}} \sum_{\bar{\Delta}_r^{\nu}} \left| \Delta_k^{\mu} \right|^{2n+3} \left| \bar{\Delta}_r^{\nu} \right|^{2n+3} \ge$

$$\ge \frac{1}{\left[(2n+2)! \right]^2} \frac{\left((n+1)! \right)^4}{\left((2n+3)! \right)^2} \left(\frac{2\pi}{3|\omega| \left[2M/\left[|\omega|/\pi \right] \right]} \right)^{4n+4} \ge$$

$$\geq \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}\frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{4n+4}\frac{1}{M^{4(n+1)}}=\frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}\frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{4n+4}\frac{1}{N^{4(n+1)}}.$$

Розглянемо функцію $f_1^*(x,y)=-f^*(x,y)$. Наближені значення інтегралів $I\left(f^*,\omega\right)$ та $I\left(f_1^*,\omega\right)$, що обчислені за кубатурною формулою $R_N\left(f,\omega\right)$, рівні між собою. Точні значення інтегралів $I\left(f^*,\omega\right)$ та $I\left(f_1^*,\omega\right)$ однакові за модулем і мають протилежний знак. Отже, хоча б для однієї з функцій $f_1^*(x,y)$, $f^*(x,y)$ похибка інтегрування буде більшою або дорівнювати модулю інтеграла. Тому як функцію $\varphi(x)$ беремо $f^*(x,y)$.

Таким чином, отримали оцінку знизу та зверху величини $R\left(F,\omega,\ell_N\right)=$ $=R\left(L_q^{2(n+1),2(n+1)}(\Omega),\omega,R_N\left(f,\omega\right)\right)$:

$$C_1\frac{1}{N^{4(n+1)}}\leq R\left(L_q^{2(n+1),2(n+1)}(\Omega),\omega,R_N\left(f,\omega\right)\right)\leq C_2\frac{1}{N^{4(n+1)}};$$

$$C_1=\frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}\frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{4n+4},\qquad C_2=\frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}.$$

Теорему доведено.

Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних на основі сплайн-інтерлінації на лініях ректангуляції. У зв'язку з практичною значущістю наводимо попередні результати при $n=0$.

Нехай $\Omega=\left[0,1\right]^2$, $\Omega=\bigcup_i\Pi_i$, $\Pi_i=\left[x_{i_1},x_{i_1+1}\right]\times\left[y_{i_2},y_{i_2+1}\right]$, $i=(i_1,i_2)$, $i_1=\overline{1,N_1-1}$, $i_2=\overline{1,N_2-1}$. Оператор

$$E_if\left(x,y\right)=\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}h_{j_1,s_1}(x)f\left(x_{j_1},y\right)+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}H_{j_2,s_2}(y)f\left(x,y_{j_2}\right)-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}h_{j_1,s_1}(x)H_{j_2,s_2}(y)f\left(x_{j_1},y_{j_2}\right),$$

$$(x,y)\in\Pi_i\subset\Omega,\quad i=(i_1,i_2),$$

де $h_{j_1,s_1}(x)$, $H_{j_2,s_2}(y)$ – базисні сплайни порядку 0, 1, 2, 3,...

$$h_{j_1,s_1}(x)\Big|_{x=x_k}=\delta_{p_1,s_1}\delta_{k,j_1},\qquad H_{j_2,s_2}(y)\Big|_{y=y_j}=\delta_{p_2,s_2}\delta_{j,j_2},$$

має властивості $f(x,y)\in C^m(\Omega)\to E_if(x,y)\in C^m(\Omega)$, $m\geq 0$,

$$E_if(x,y)\Big|_{x=x_k}=f(x,y)\Big|_{x=x_k},\qquad E_if(x,y)\Big|_{y=y_j}=f(x,y)\Big|_{y=y_j}.$$

Тоді оператор $E_\Omega f(x,y)$, що визначається рівностями

$$E_\Omega f(x,y)=E_if(x,y),\quad (x,y)\in\Pi_i\subset\Omega,$$

буде задовольняти умови $E_\Omega f(x,y) \in C(\Omega)$,

$$E_\Omega f(x,y)\Big|_{x=x_k} = f(x,y)\Big|_{x=x_k}, \qquad E_\Omega f(x,y)\Big|_{y=y_j} = f(x,y)\Big|_{y=y_j}$$

і називається кусково-поліноміальним інтерлінаційним оператором, або кусково-поліноміальним інтерлінантом. Він інтерлінує функцію $f(x,y)$ на чотирьох взаємно перпендикулярних прямих – межі Π_i; при цьому на межах двох сусідніх прямокутників, що мають спільні сторони або точки; породжені цим оператором функції зберігають неперервні похідні до порядку n включно. Функція $E_\Omega f(x,y)$ має значення в точках $(x,y) \in \Pi_i \subset \Omega$, залежні від слідів функції $f(x,y)$ лише на межі $\partial\Pi_i$.

Нехай $f(x,y) \in L_q^{2,2}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$,

$$L_q^p(\Omega) = \Big\{ f(x,y) \Big| f^{(s_1,s_2)}(x,y) \in C(\Omega), \quad 0 \le s_k \le p_k, k = 1,2,$$

$$s \ne p, p = (p_1,p_2): \quad \left\| f^{(p)} \right\|_{L_q(\Omega)} \le 1 \Big\}.$$

Похибка поліноміальної інтерлінації в кожному з прямокутників Π_i задовольняє нерівність $\left| f(x,y) - E_\Omega f(x,y) \right| \le \left| Q_i(x,y) \right|$, $(x,y) \in \Pi_i \subset \Omega$, $i = (i_1, i_2)$, де $Q_i(x,y)$ ‘стандартна’ функція:

$$Q_i(x,y) = \frac{1}{4} \prod_{j_1=i_1}^{i_1+1} \left(x - x_{j_1} \right) \cdot \prod_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left(y - y_{j_2} \right), \quad (x,y) \in \Pi_i .$$

Твердження 2 [3]. Якщо $f(x,y) \in L_q^{2,2}(\Omega)$,, то $\left| f(x,y) - E_\Omega f(x,y) \right| \le \left| Q(x,y) \right|$, $(x,y) \in \Omega$. Похибка є найменшою у кожній точці $x \in \Omega$, де $Q(x,y) = Q_i(x,y)$, $(x,y) \in \Pi_i$.

Тому похибка наближення функції $f(x,y) \in L_q^{2,2}(\Omega)$ оператором $E_\Omega f(x,y)$ у кожній точці оцінюється з огляду на значення функції $Q(x,y) = Q_i(x,y)$, $(x,y) \in \Pi_i$.

Нехай $f(x,y) \in L_q^{2,2}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$ і сліди цієї функції, тобто функцієї однієї змінної $f(x_{j_1}, y)$, $f(x, y_{j_2})$, $j_1, j_2 = \overline{1,M}$, задані не більше, ніж на $N = 2M$ прямих. Для обчислення інтеграла

$$I(f,\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \sin\omega x \sin\omega y dxdy$$

пропонується формула

$$R_N(f,\omega) = \int_0^1 \int_0^1 E_\Omega f(x,y) \sin\omega x \sin\omega y dxdy.$$

Підставляючи вираз для оператора-інтерлінанта, отримаємо

$$R_N(f,\omega) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \int_0^1 h_{j_1,s_1}(x) \sin\omega x dx \int_0^1 f(x_{j_1}, y) \sin\omega y dy +$$

$$+ \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \int_0^1 H_{j_2,s_2}(y) \sin\omega y dy \int_0^1 f(x, y_{j_2}) \sin\omega x dx -$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} f\left(x_{j_1},y_{j_2}\right)\int_0^1 h_{j_1,s_1}\left(x\right)\sin\omega x dx\int_0^1 H_{j_2,s_2}\left(y\right)\sin\omega y dy .$$

Будемо вважати, що $\int_0^1 f(x_{j_1},y)\sin\omega y dy$, $\int_0^1 f(x,y_{j_2})\sin\omega x dx$ задані точно.

Теорема 2. Кубатурна формула $R_N\left(f,\omega\right)$ для обчислення інтеграла $I\left(f,\omega\right)$ є оптимальною за порядком точності при $M\ge\left|\omega\right|$.

Доведення. Отримаємо оцінку знизу та зверху величини $R\left(F,\omega,\ell_N\right)=$ $=R\left(L_q^{2,2}\left(\Omega\right),\omega,R_N\left(f,\omega\right)\right)$.

Знайдемо оцінку зверху:

$$\left|I\left(f,\omega\right)-R_N\left(f,\omega\right)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\left(f\left(x,y\right)-E_\Omega f\left(x,y\right)\right)\sin\omega x\sin\omega y dxdy\right|\le$$

$$\le\sum_{j_1=1}^{M-1}\sum_{j_2=1}^{M-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\left|f\left(x,y\right)-E_\Omega f\left(x,y\right)\right|dxdy\le$$

$$\le\frac{1}{4}\sum_{j_1=1}^{M-1}\sum_{j_2=1}^{M-1}\int_{x_{j1}}^{x_{j_1+1}}\int_{y_{j2}}^{y_{j_2+1}}\prod_{\alpha=i_1}^{i_1+1}\prod_{\beta=i_2}^{i_2+1}\left(x-x_\alpha\right)\left(y-y_\beta\right)dxdy=\frac{\Delta^2\cdot\Delta^2}{4}M^2\Delta^2=\frac{\Delta^4}{4}=\frac{1}{4M^4}=\frac{4}{N^4}.$$

Оскільки оцінка $\left|I\left(f,\omega\right)-R_N\left(f,\omega\right)\right|$ справедлива для будь-якої функції класу $L_q^{2,2}\left(\Omega\right)$, то $R\left(L_q^{2,2}\left(\Omega\right),\omega,R_N\left(f,\omega\right)\right)\le\frac{4}{N^4}$.

Знайдемо оцінку знизу. Нехай область Ω розбивається на підобласті $G_{kr}=\Delta_k\times\overline{\Delta}_r$,

$$\Delta_k=\left\{x:x\in\left[\left(6k+1\right)\pi/\left|\omega\right|;\left(6k+5\right)\pi/\left|\omega\right|\right]\right\},\ k=0,1,...,\left[\left|\omega\right|/\pi\right]-1,$$

$$\overline{\Delta}_r=\left\{y:y\in\left[\left(6r+1\right)\pi/\left|\omega\right|;\left(6r+5\right)\pi/\left|\omega\right|\right]\right\},\ r=0,1,...,\left[\left|\omega\right|/\pi\right]-1$$

площею $\frac{2\pi}{3\left|\omega\right|}\times\frac{2\pi}{3\left|\omega\right|}$; тоді в точках цієї підобласті маємо $\left|\sin\omega x\right|\ge\frac{1}{2}$, $\left|\sin\omega y\right|\ge\frac{1}{2}$, $\left(x,y\right)\in G_{kr}$. Нехай $M\ge\left|\omega\right|$. Розіб'ємо кожну область G_{kr} на $\ell=\left(\left[2M/\left[\left|\omega\right|/\pi\right]\right]+1\right)^2$ підобластей $G_{kr}^{\nu\mu}=\Delta_k^\nu\times\overline{\Delta}_r^\mu$, $\nu,\ \mu=0,...,\ell-1$. Повне число підобластей $G_{kr}^{\nu\mu}$ дорівнює $\ell\left(\left[\left|\omega\right|/\pi\right]\right)^2\ge4M^2$, отже, буде не менше ніж M^2 областей $G_{kr}^{\nu\mu}$, куди не попали вузли кубатурної формули.

Зауважимо, що

$$\left(f\left(x,y\right)-E_\Omega f\left(x,y\right)\right)\Big|=\left(f\left(x,y\right)-E_\Omega f\left(x,y\right)\right)\Big|_{x=x_k^\mu}=0 .$$

Розглянемо функцію

$$f^*(x,y)=\frac{1}{4}\left(x-x_k^{\mu}\right)\left(x-x_k^{\mu+1}\right)\left(y-y_r^{\nu}\right)\left(y-x_r^{\nu+1}\right)\operatorname{sign}\left(\sin\omega x\right)\operatorname{sign}\left(\sin\omega y\right)$$

на тих $\Delta_k^{\nu}\times\overline{\Delta}_r^{\mu}$, куди не попали лінії інтегрування. Коли $(x,y)\in G\setminus G_{kr}^{\nu\mu}$, то $f^*(x,y)=0$. Ця функція належить до класу $L_q^{2,2}(\Omega)$ і згідно з методом "капелюхів" є "поганою" [1] функцією класу. Знайдемо оцінку знизу:

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)\sin\omega x\sin\omega y\,dxdy\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{4}\sum_{\Delta_k^{\mu}}\sum_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\int_{\Delta_k^{\mu}}\int_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\prod_{\alpha=\mu}^{\mu+1}\prod_{\beta=\nu}^{\nu+1}\left(x-x_k^{\alpha}\right)\left(y-y_r^{\beta}\right)\operatorname{sign}\left(\sin\omega x\right)\operatorname{sign}\left(\sin\omega x\right)\sin\omega x\sin\omega x\,dxdy\right|\geq$$

$$\geq\frac{1}{16}\sum_{\Delta_k^{\mu}}\sum_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\int_{\Delta_k^{\mu}}\int_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\prod_{\alpha=\mu}^{\mu+1}\prod_{\beta=\nu}^{\nu+1}\left|\left(x-x_k^{\alpha}\right)\left(y-y_r^{\beta}\right)\right|dxdy=$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{\Delta_k^{\mu}}\sum_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\int_{\Delta_k^{\mu}}\left|\left(x-x_k^{\mu}\right)\left(x-x_k^{\mu+1}\right)\right|dx\int_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\left|\left(y-y_r^{\nu}\right)\left(y-y_r^{\nu+1}\right)\right|dy.$$

Обчислимо інтеграл

$$\int_{\Delta_k^{\mu}}\left|\left(x-x_k^{\mu}\right)\left(x-x_k^{\mu+1}\right)\right|dx=\frac{1}{6}\left(\Delta_{1k}^{\mu}\right)^3.$$

Отже,

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)\sin\omega x\sin\omega y\,dxdy\right|\geq\frac{1}{16}\frac{1}{36}\sum_{\Delta_k^{\mu}}\sum_{\overline{\Delta}_r^{\nu}}\left|\Delta_k^{\mu}\right|^3\left|\overline{\Delta}_r^{\nu}\right|^3\geq\frac{1}{16}\frac{1}{36}\left(\frac{2\pi}{3|\omega|\left[2M/\left[|\omega|/\pi\right]\right]}\right)^4\geq$$

$$\geq\frac{1}{16}\frac{1}{36\cdot 6^4}\frac{1}{M^4}=\frac{1}{36\cdot 6^4}\frac{1}{N^4}=\frac{1}{6^6}\frac{1}{N^4}=\frac{1}{46656}\frac{1}{N^4}.$$

Розглянемо функцію $f_1^*(x,y)=-f^*(x,y)$. Наближені значення інтегралів $I\left(f^*,\omega\right)$ та $I\left(f_1^*,\omega\right)$, що обчислені за кубатурною формулою $R_N(f,\omega)$, рівні між собою. Точні значення інтегралів $I\left(f^*,\omega\right)$ та $I\left(f_1^*,\omega\right)$ однакові за модулем і мають протилежний знак. Отже, хоча б для одної з функцій $f_1^*(x,y)$, $f^*(x,y)$ похибка інтегрування буде більшою або дорівнювати модулю інтеграла, тоді як функцію $\varphi(x)$ беремо $f^*(x,y)$.

Таким чином, отримали оцінку знизу та зверху величини $R\left(F,\omega,\ell_N\right)=$ $=R\left(L_q^{2,2}(\Omega),\omega,R_N(f,\omega)\right)$:

$$\frac{1}{46656}\frac{1}{N^4}\leq R\left(L_q^{2,2}(\Omega),\omega,R_N(f,\omega)\right)\leq\frac{4}{N^{4(n+1)}}.$$

Теорему доведено.

Висновки. Запропонована кубатурна формула належить до класу кубатурних формул, які зводять обчислення швидкоосцилюючих інтегралів функції двох змінних до швидкоосцилюючих інтегралів функції однієї змінної. Це означає, що, використовуючи ту або іншу квадратурну формулу для обчислення швидкоосцилюючих інтегралів функції однієї змінної, можна отримати різні кубатурні формули.

Список літератури

1. *Задирака В. К., Мельникова С. С.* Цифровая обработка сигналов. – К.: Наук. думка. – 1993. – 294 с.
2. *Жилейкин Я. М., Кукаркин А. Б.* Приближенное вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций: Учеб.-практ. пособие. – М.: МГУ. – 1987. – 99 с.
3. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.

О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер

Интерлинация и оптимальная по порядку точности кубатурная формула вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций

Предложены оптимальные по порядку точности кубатурные формулы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций двух переменных на основе сплайн-интерлинации на линиях ректангуляции.

O. N. Lytvyn, O. P. Nechuyviter

Interlineation and optimal by order of exactness formula of the evaluating of two dimensions of Fourier's coefficients

The article is devoted to optimal by order of exactness formula of the evaluating of two dimensions of Fourier's coefficients with using spline-interlineation.