

УДК 519.21 (045)

Н. Б. Марченко, канд. техн. наук

МОДЕЛЮВАННЯ СМУГОВОГО ПРОЦЕСУНаціональний авіаційний університет, м. Київ, e-mail: nadmar@i.ua

Розглянуто проблему обґрунтування способів моделювання різних процесів, зокрема смугового процесу. Описано прості моделі шумів з дискретним часом, особливості та властивості таких моделей та побудовано графіки оцінювання кореляційної функції і спектральної щільності потужності смугового процесу.

Ключові слова: смуговий процес, згортка, функція розподілу, кореляційна функція, породжувальний процес, білий шум, формувальний фільтр.

Вступ. Цю роботу присвячено математичним моделям шумів, що відіграють виняткову роль як первинні моделі для моделювання більш складних процесів, наприклад смугового процесу. Залежно від галузі науки, у якій застосовується метод моделювання, моделі бувають фізичні, біологічні, астрономічні, математичні тощо. Математичні моделі зручно поділяти на аналогові (з неперервним часом) і цифрові (з дискретним часом). У роботі ставиться завдання описати найпростіші моделі шумів з дискретним часом, обґрунтувати формули їх теоретичних параметрів, проілюструвати графічно формули, а також описати особливості та властивості таких моделей.

Аналіз досліджень і публікацій. Сигнали можуть бути об'єктами теоретичних досліджень і практичного аналізу лише в тому випадку, якщо спосіб їх математичного опису становить математичну модель сигналу. Математичний опис дає змогу абстрагуватися від фізичної природи сигналу та матеріальної форми його носія, класифікувати сигнали, їх порівнювати, установлювати ступінь тотожності, моделювати системи оброблення сигналів. Опис сигналу задається функціональною залежністю певного інформаційного параметра сигналу від незалежної змінної. Вибір математичного апарату опису вирізняється простотою та зручністю його використання під час аналізу й оброблення інформаційних сигналів [2]. Під час реєстрації на детекторі сигналів, що містять цільову для такого виду вимірювань інформацію, у сукупності з основним сигналом одночасно реєструються й побічні сигнали – шуми та завади різної природи. Завадами також є спотворення корисних сигналів у разі виявлення різних дестабілізуювальних факторів, що впливають на процеси вимірювання. Виокремлення корисних складових із загальної кількості зареєстрованих сигналів або максимальне зниження шумів і завад в інформаційному сигналі зі збереженням його корисних складових є однією з основних функцій первинного оброблення сигналів (результатів спостережень). Поділ сигналів на корисні і такі, що заважають (шумові), досить умовний. Джерелами шумових сигналів є певні фізичні процеси, явища, об'єкти. У разі виявлення природи шумових сигналів їх можна переводити в розряд інформаційних [3].

Постановка завдання. Метою роботи є обґрунтування деяких способів моделювання різних процесів, зокрема білого та забарвленого шумів, побудова алгоритмів, ілюстрація характеристик розроблених моделей та методів з їх застосування.

Побудова моделі смугового процесу. Для аналізу фізичних даних використовують два основні підходи до створення математичних моделей сигналів. Відповідно до першого підходу розглядаються детерміновані сигнали, значення яких у будь-який момент часу або в довільній точці простору є апріорно відомими. Тобто детермінований сигнал – це сигнал, який з достатньою точністю можна описати явними математичними формулами або обчислювальними алгоритмами. Другий підхід передбачає випадковий характер сигналів, які набувають конкретних значень з деякою імовірністю; їх можна описати лише з використанням статистичних характеристик. Випадковість може бути зумовлена як власною фізичною природою сигналів, так і ймовірнісним характером сигналів, що реєструються як

за часом, так і за місцем їх появи та змістом. З огляду на це випадковий сигнал можна розглядати як відображення випадкового за своєю природою процесу, що визначається випадковими параметрами.

Залежності від підходу математичні моделі поділяють на аксіоматичні та конструктивні. У класичній теорії імовірностей для побудови аксіоматичних моделей використовують систему аксіом, запропонованих Колмогоровим [4]. Як моделі випадкових процесів зручно використовувати конструктивний підхід, якому притаманна більша наочність, він більш близький до практики. Параметри конструкцій процесів у такому випадку легко пов'язуються з описом фізичних явищ за допомогою фізичних моделей. Конструктивна модель – це математична модель (процес), що будується на базі конструкцій процесу.

У цій роботі будемо розглядати конструктивні моделі, але при цьому відсліджувати їх зв'язок з відповідними фізичними моделями. Однак аксіоматичний і конструктивний підходи мають багато спільного в теоретичному сенсі і повинні бути узгоджені між собою. Як конструктивні моделі використовують математичну конструктивну модель лінійного випадкового процесу, яка будується на базі математичного поняття дискретної згортки функцій і в фізичному сенсі відповідає фізичній моделі фільтрації деякого процесу, який називається породжувальним фільтром із детермінованою імпульсною реакцією. В цій роботі використовуються лінійні процеси з дискретним часом.

За основу побудови моделей випадкових завад візьмемо відомий у статистичній радіотехніці метод формувальних фільтрів у дискретному варіанті [5]. Твірним процесом тут є білий шум у строгому сенсі з дискретним часом, тобто процес з незалежними значеннями:

$$\{\zeta(t), t \in (-\infty, \infty)\}, \quad (1)$$

де всі $\zeta(t)$ статистично незалежні в сукупності. Закон розподілу цього процесу взагалі може бути довільним, однак якщо цей процес отриманий дискретизацією стохастично неперервного випадкового процесу приросту, то він належить до класу безмежно подільних. Таким чином, твірний процес цілком задається послідовністю одновимірних функцій розподілу $F_t(x), t \in (-\infty, \infty)$. Однак під час розв'язування практичних задач умову незалежності значень $\zeta(t)$ можна послабити і вимагати лише некорельованості. У такому випадку використовується термін «білий шум у широкому сенсі» або забарвлений шум з дискретним часом. При цьому обов'язково вважати здійсненою умову $D\zeta(t) < \infty$ – обмеженої дисперсії (потужності), що на практиці майже завжди виконується. Процеси зі скінченною потужністю будемо надалі називати гільбертовими.

Усі інші моделі процесів будуватимемо шляхом лінійної фільтрації процесу (1), тобто вважатимемо їх результатом операції дискретної згортки процесу (1) з імпульсними характеристиками стаціонарного формувального фільтра, які позначимо через $\varphi(t), t \in (-\infty, \infty)$.

На функцію $\varphi(t)$ накладаються такі умови: $\varphi(t) \equiv 0, t \in (-\infty, 0)$ та $\sum_{t=-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) < \infty$.

Отриманий в результаті згортки процес

$$\xi(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \zeta(t - \tau), \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

називається лінійним випадковим процесом з дискретним часом.

Лінійний процес з дискретним часом може бути зображений у вигляді дискретної згортки породжувального процесу, що являє собою процес (послідовність) із незалежними значеннями з деякою числовою послідовністю, оскільки лінійний процес – це процес, який

отримується з білого шуму за допомогою формувального фільтра. Від формувального фільтра буде взята для моделі класифікація з аналогічним сигналом, а саме: модель смугового процесу, моделі RC та RLC-процесів. Ці моделі розглядатимемо з точки зору спектрально-кореляційної теорії.

Перейдемо до опису шумових процесів за допомогою моделі дискретного лінійного випадкового процесу з безмежно подільним законом розподілу. По-перше, така модель досить повно досліджена. І над лінійним процесом порівняно просто виконуються лінійні операції, що, по суті, зводяться до операцій над ядром $\varphi(t)$ зображення (2). По-друге, для такого процесу відома канонічна форма характеристичної функції $f_{\xi}(u)$, логарифм якої з урахуванням виразу (2) у формі Комогорова має вигляд [5]

$$\ln f_{\xi}(u) = imu \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{iux\varphi(\tau)} - 1 - iux\varphi(\tau) \right] \frac{dK(x)}{x^2}, \quad \tau \in (-\infty, \infty).$$

Тут m – математичне сподівання процесу (1); $K(x)$ – неспадна дійсна обмежена функція; за відомою характеристичною функцією вона визначається зі співвідношення

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iuy} - e^{-iux}}{iu} \cdot \frac{d^2 \ln f_{\xi}(u)}{du^2} du.$$

Наведемо формулу, відповідно до якої можна виконати обчислення функції розподілу, що відповідає процесу (2) у всіх точках неперервності:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f_{\xi}(-u)e^{iux} - f_{\xi}(u)e^{-iux}}{iu} du.$$

Забарвлений шум – це процес з дискретним часом, отриманий фільтрацією дискретного білого шуму фільтром з амплітудно-частотною характеристикою, рівною u в смузі частот $|\omega| \leq \omega_0$ і рівною нулю поза цією смугою. Такий процес формується з білого шуму фільтром з імпульсною перехідною характеристикою вигляду

$$\varphi(t) = \frac{u \sin \omega_0 t}{\pi t}; \quad t \in (-\infty, \infty); \quad 0 < \omega_0 \leq \pi.$$

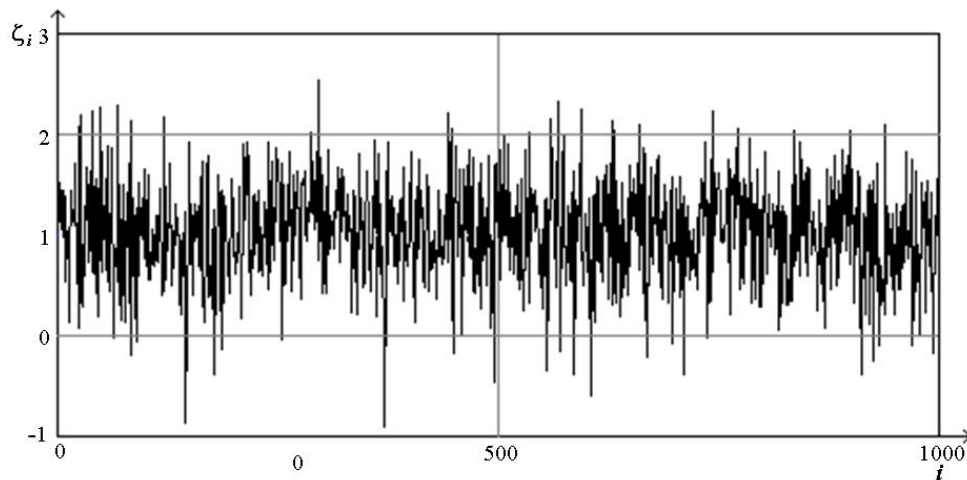
Такий процес фізично нездійснений, оскільки $\varphi(t)$ не перетворюється в нуль, якщо $t < 0$, але він зручний для теоретичних міркувань і моделювання. Смуговий процес можна подати таким чином:

$$\xi(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{u \sin \omega_0 \tau}{\pi \tau} \zeta(t - \tau), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Якщо $|\omega_0| = \pi$, отримуємо твірний процес (1), білий шум, а якщо $0 < |\omega_0| < \pi$, – смуговий процес.

Числова реалізація побудови моделей. Перейдемо до практичної частини. Зупинимось на моделюванні випадкового процесу [3], для якого були отримані такі реалізації та значення.

Отримано одну реалізацію випадкового процесу [1], значення незалежних реалізацій ζ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ випадкової величини ζ зображено на рис. 1. У цьому випадку візьмемо обсяг вибірки $N = 1000$.

Рис. 1. Реалізація випадкового процесу ζ_i

Для отриманих реалізацій знаходимо математичне сподівання та дисперсію:

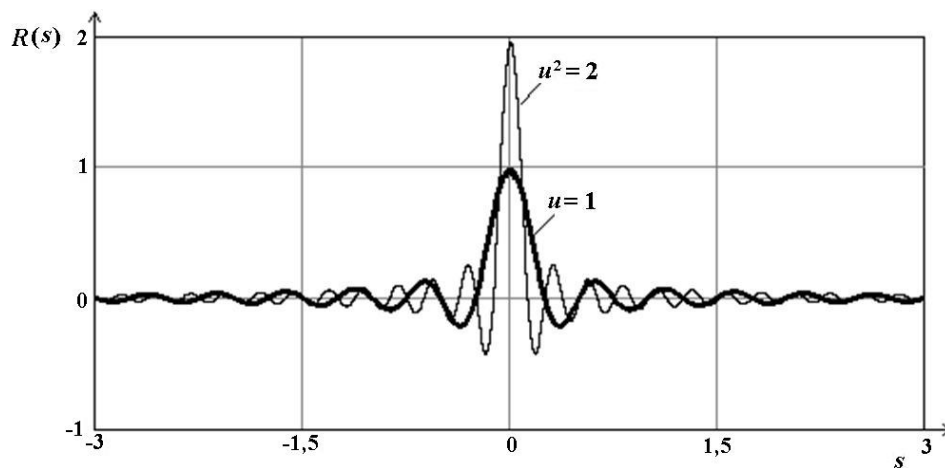
$$v_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad \kappa_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\xi_j - v_1)^2.$$

Отже, $v_1 = 1,015$, $\kappa_2 = 0,246$.

Кореляційна функція смугового процесу становить [3]:

$$R(s) = \kappa_2 \frac{u^2 \sin \omega_0 s}{\pi s}, \quad s \in (-\infty, \infty).$$

За допомогою розробленої програми в середовищі Mathcad будуємо графік оцінювання кореляційної функції $R(s)$, де $s \in (-3, 3)$. Графік оцінювання кореляційної функції зображено на рис. 2.

Рис. 2. Графік оцінювання кореляційної функції $R(s)$

Спектральна щільність потужності смугового процесу

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{\kappa_2 u^2}{2\pi}, & |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3)$$

де $\kappa_2 = \mathbf{D}\zeta(t)$ – інтенсивність (дисперсія) стаціонарного білого шуму.

Спектральну щільність потужності $S(\omega)$, отриману в результаті моделювання згідно з теоретичною формулою (3), показано на рис. 3.

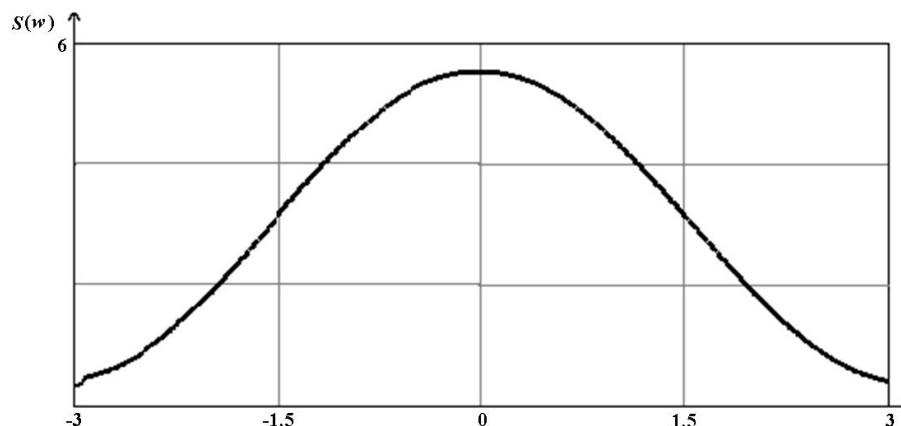


Рис. 3. Графік спектральної щільності потужності $S(\omega)$

Висновки. Розглянуто та проілюстровано побудову моделі смугового процесу. За допомогою розробленої програми оцінено математичне сподівання, дисперсії; побудовано графіки кореляційної функції та спектральної щільності. З рис. 2 видно, що в разі обмеження частотного діапазону в шумах з'являється певна коваріація між значеннями і чим менший частотний діапазон шумів, тим більший їх радіус коваріації. По суті, обмеження частотного діапазону шумів певним діапазоном еквівалентно фільтрації білого шуму частотним фільтром з відповідною шириною смуги пропускання, при цьому кореляційна функція імпульсного відгуку переноситься на шум.

Список літератури

1. Бабак В. П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В. П. Бабак, Б. Г. Марченко, М. Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
2. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
3. Жаровський Р. О. Моделювання білого шуму з дискретним часом / Р. О. Жаровський, Б. Г. Марченко, Н. Б. Марченко // Вісн. Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2007. – №4. – С. 152–157.
4. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1974. – 120 с.
5. Марченко В. Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике / В. Б. Марченко – К.: Наук. думка, 1992. – 212с.

Н. Б. Марченко

Моделирование полосового процесса

Рассмотрена проблема обоснования способов моделирования различных процессов, в частности полосового процесса. Описаны простые модели шумов с дискретным временем, особенности и свойства таких моделей и приведены графики оценки корреляционной функции и спектральной плотности мощности полосового процесса.

N. B. Marchenko

Modeling of bandpass process

The problem of justification of methods of modeling the various processes, particularly bandpass process. We describe a simple model of discrete-time noise, characteristics and properties of these models, also shows plots of estimates of the correlation function and power spectral density of bandpass process.