

УДК 629.735.051.681.323(045)

М. С. Фельзер, канд. техн. наук

ОБЧИСЛЕННЯ КЕРОВАНОСТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМІнститут аерокосмічних систем управління НАУ, e-mail: iacs@nau.edu.ua*Розглянуто питання побудови алгоритмів обчислення керованості для лінійних систем. Запропоновано критерій керованості, заснований на матричній симетризації.***Ключові слова:** керованість системи, матрична симетризація, блок векторів.

Вступ та постановка завдання. У праці [1] наводяться приклади лінійних багатовимірних систем, зокрема системи керування бічним рухом літака. Під час дослідження таких систем важливим є визначення керованості системи.

Розглянемо задачу обчислення керованості для лінійної стаціонарної системи:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1)$$

де $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^q$ – змінні стану, входу і виходу відповідно; A, B, C є дійсні постійні матриці розміру $n \times n, n \times m, n \times q$, відповідно. Система (1) називають керованою, якщо існує єдиний вектор u , який переводить систему із початкового стану $x(0)$ у кінцевий стан $x(n)$. Є декілька критеріїв керованості.

Критерій 1. Система (1) керована тоді і тільки тоді, коли ранг матриці $C(A, B) = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ дорівнює n .

Критерій 2. Система (1) керована тоді і тільки тоді, коли квадратна матриця $W = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B B^1 (A^T)^i$ невироджена.

Критерій 3. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – власні числа матриці A . Система (1) керована в тому і тільки в тому випадку, коли кожна із n матриць $(B, A - A\lambda_i I), i = 1, \dots, n$ має ранг n .

Алгоритм обчислення. Щоб одержати канонічну форму керованості, необхідно побудувати невироджену дійсну $n \times n$ – матрицю S таку, що

$$x = Sw \quad (2)$$

і

$$\dot{w} = A_* w + B_* u, \quad y = C_* w,$$

де

$$A_* = S^{-1}AS, \quad B_* = S^{-1}B, \quad C_* = CS \quad (3)$$

є відповідні канонічні матриці.

Побудуємо невироджену $n \times n$ -матрицю P_c із n стовпців $n \times (mn)$ – матриці керованості:

$$G = [b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_m], \quad (4)$$

де b_k – k -й стовпець B . Така невироджена матриця P_c існує, оскільки G має ранг n .

Матрицю S в рівнянні (2) можна подати як $S = P_c$. Незважаючи на те, що G має повний ранг, неправильний вибір стовпців для отримання матриці P_c може привести до того, що P_c стане виродженою. Так, якщо перші n стовпців G є лінійно незалежними, але $\|b_1\| > \|Ab_1\| > \dots, \|A^{n-1}b_1\| \|A^{n-1}b_1\| (\|b_1\|)^{-1} \ll 1$, то $n \times n$ -матриця $[b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1]$ стає виродженою. В зв'язку з цим необхідно одержати метод вибору стовпців із G для того, щоб отримати таку P_c , яка була б настільки невиродженою, наскільки це можливо. Тобто потрібно вибрати множину Φ із n векторів у R^n із набору l векторів рангу n таку, щоб невироджена $n \times n$ -матриця M , стовпцями якої є вектори із Φ , мала б настільки малу кількість умов, наскільки це можливо. Кількість умов невиродженої матриці визначають як

$$\text{cond}[M] = \|M\| \|M^{-1}\|. \quad (5)$$

Якщо M – ортогональна матриця, то $[M] = 1$. Ортогональна матриця S є найкращою матрицею перетворення. Однак малоймовірно що стовпці G утворюють n ортогональних одиничних векторів.

Одержимо такий алгоритм для вибору множини Φ із n векторів у R^n з набору ψ (рангу n) векторів ($l \geq n$), щоб невироджена $n \times n$ -матриця M , стовпці якої є векторами із Φ , мала б настільки мало умов, настільки це можливо. Вектори в ψ є стовпцями G у рівнянні (4).

Нехай r – додатне ціле, $f_1, f_2, \dots, f_r \in R^n$ – ненульові вектори і L – дійсна $n \times n$ -матриця, причому $r = m$, $f_j = b_j$, $L = A$. Будемо вважати, що $|f_1, f_2, \dots, f_r|$ є лінійно незалежна множина. Якщо це не так, то можна отримати ермітову нормальну форму матриці $Q = [f_1, f_2, \dots, f_r]$, визначити залежні стовпці Q і виключити їх із множини векторів. Матриця Q_j визначається як

$$Q_j = [f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(n-1)}], \quad 1 \leq j \leq r, \quad (6)$$

де $f_j^{(k)} = L^k f_j$; $0 \leq k \leq n-1$. Ранг $Q_j \in v_j$, $0 < v_j \leq n$. Нехай $i_1, i_2, \dots, i_r$ є цілі числа такі, що $0 \leq i_j \leq v_j$ $j = 1, 2, \dots, r$. Необхідно вибрати індексну множину $k = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ і одержати $n \times n$ -матрицю

$$M_k = [f_1^{(0)}, \dots, f_1^{(i_1-1)}, \dots, f_r^{(0)}, \dots, f_r^{(i_r-1)}]$$

за таких обмежень:

а) якщо $f_j^{(k)}$ – стовець M_r , то стовпцями цієї ж матриці є $f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(k-1)}$;

б) $\sum_{j=1}^r i_j = n$;

в) M_k є невиродженою.

Умова в) виключає випадок, коли вектори $f_s^{(k)}$, $0 \leq k \leq i_s - 1$ являють собою лінійні комбінації заздалегідь вибраних блоків векторів. Очевидно, що можна замінювати один або більше блоків векторів блоком $\{f_s^{(0)}, \dots, f_s^{(i_s-1)}\}$ доти, доки не отримаємо лінійно незалежну множину. В цьому разі можна мати різні матриці M_k , які відповідають різним індексним множинам k . Зокрема, необхідно знайти індексну множину $k = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ таку, щоб матриця M_k мала найменше умов (5). Кількість умов можна визначити за виродженими значеннями M_k :

$$\text{cond}[M_k] = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \quad (7)$$

де σ_1, σ_n – максимальне і мінімальне вироджені значення M_k . Для того щоб отримати співвідношення (7), скористаємося спектральною нормою у виразі (4). Рівняння (7) дає змогу визначити, чи є M_k виродженою.

Із виразу (5) випливає, що норми векторів $f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(n-1)}$ або зростають, або спадають. Це зумовлює процедуру визначення індексної множини $k = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$.

Виберемо додатне число $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Тоді i_j буде найбільшим індексом s ($1 \leq s \leq v_j$), який можна визначити так, що

$$\frac{\min_{1 \leq k \leq s} \|f_j^{(k-1)}\|}{\max_{1 \leq k \leq s} \|f_j^{(k-1)}\|} \geq \varepsilon. \quad (8)$$

Вираз (8) обумовлений обмеженням а) для матриці M_k . Як тільки знайдено i_j , множина векторів $\{f_j^{(0)}, f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(i_j-1)}\}$ зберігається для можливості її в M_k . Виключимо ті вектори, норми яких менші, ніж $\varepsilon \times \max_{1 \leq k \leq s} \|f_j^{(i_j-1)}\|$. За допомогою цієї процедури можна запобігти виродженості M_k . Відзначимо, що зростання ε викликає зменшення i_j , а зменшення ε –

зростання i_j ; ε не слід вибирати настільки великим, щоб $\sum_{j=1}^r i_j < n$. Як тільки буде знайдено індексну множину k , як M_k , можна взяти матрицю P_c . Значення S можна обчислити за допомогою канонічних матриць (4). За цією процедурою можна знайти декілька можливих індексних множин. Необхідно розглянути умови матриці перетворення, які пов'язані з кожною індексною множиною, щоб визначити, яке із розглянутих чисел є найменшим.

Новий критерій керованості. Пропонується новий критерій керованості, який ґрунтується на матричній симетризації.

Нехай H – верхня матриця з ненульовими наддіагональними елементами. Вважаємо, що

$$H^T = A = (a_{ij}).$$

Сформуємо нижню трикутну матрицю L , яка має рядки $l_1, l_2, \dots, l_n$, що визначаються із співвідношень:

$$l_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0); \\ l_{i+1} = l_i A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Будемо вважати $LAL^{-1} = C = (c_i)$; $B' = B^T L^{-1} = (b'_{ij})$. Сформуємо m матриць $X_1, X_2, \dots, X_m$, кожна з яких має порядок n . Матриця X_i має рядки $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}$, отримані таким чином:

$$x_i^{(n)} = (b'_{i1}, b'_{i2}, \dots, b'_{in}); \\ x_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} C - C_{k+1, k+1} x_i^{(n)}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Матриці $X_i, i = 1, \dots, m$ є симетричними і пара (H, B) керована в тому і тільки в тому випадку, коли кожна матриця X_i – невироджена.

У випадку $m = 1$ процедура спрощується. Нехай $H^T = A = (a_{ij})$. Сформуємо матрицю X , рядки якої $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ визначаємо таким чином:

$$x^{(n)} = B^T; \\ x^{(i)} = \frac{1}{a_{ij} + 1} (x^{(i+1)} A - a_{i+1, i+1} x^{(i+1)}, \dots, a_{n, i+1} x^{(n)}); \quad i = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Тоді матриця X стає симетричною і пара $(A^T - H, B)$ керована в тому і тільки в тому випадку, коли матриця X – невироджена.

Висновки. Запропонований критерій потребує у три рази менше арифметичних операцій, ніж критерій 1, і в два рази менше, ніж критерій 2.

Список літератури

Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е. П. Попов – М.: Наука, 1989. – 304 с.

М. С. Фельзер

Вычисление управляемости для линейных стационарных систем

Рассмотрены вопросы построения алгоритмов вычисления управляемости для линейных стационарных систем. Предложен критерий управляемости, основанный на матричной симметризации.

M. S. Felzer

On the controllability computing for linear time-invariant systems

Problems of controllability calculation algorithms design for linear stationary systems are studied in this paper. Controllability criterion based on matrix symmetrization is proposed.