ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

УДК 681.3: 004.451.45(045)

[1]**В. В. Васильєв,** чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук,
[2]**О. О. Качмарчик,** асп.,
[3]**К. В. Киркач,** асп.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АПРОКСИМАТОРІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕЦІЛИХ ПОРЯДКІВ НА ОСНОВІ ЛАНЦЮГОВИХ *RC*-СХЕМ

[1]Відділення гібридних моделюючих та управляючих систем в енергетиці ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України, [2,3]Національний авіаційний університет
e-mail: [1]vsvv06@gmail.com, [2] svitlya4ok@ya.ru, [3]kyrkach@voliacable.com

Виконано обчислювальні експерименти з віртуальними моделями інтегро-диференціаторів нецілих порядків на основі RC-кіл Фостера. Визначено діапазони частот, у яких виконуються характеристики інтегро-диференціаторів заданого порядку.

Ключові слова: інтегратор нецілого порядку, фрактальна структура електричного кола, двополюсник, коло Фостера.

Вступ. Побудова електронних моделей інтегро-диференційних операторів нецілих порядків полягає у синтезі двополюсників, зв'язок між струмом і напругою яких визначається похідною або інтегралом нецілого порядку:

$$i_N(t) = G\frac{d^{\beta}u_N(t)}{dt^{\beta}},$$

де β – порядок похідної ($\beta > 0$) або інтеграла ($\beta < 0$); G – провідність реактивного елемента; $u_N(t)$ – напруга двополюсника; t – час.

Вираз для комплексної провідності конденсатора в усталеному режимі під дією джерела напруги синусоїдальної форми з нульовою початковою фазою та одиничною амплітудою має вигляд:

$$Y(j\omega) = \frac{G}{(j\omega)^{\beta}}.$$

Амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) та фазо-частотні характеристики (ФЧХ) комплексної провідності будуть дорівнювати:

$$y(\omega) = 20\lg(|Y(j\omega)|) = 20(\lg(G) - \beta\lg(\omega));\qquad \varphi(\omega) = \arg|Y(j\omega)| = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}|Y(j\omega)|}{\operatorname{Re}|Y(j\omega)|}\right) = \beta\frac{\pi}{2}.$$

Тому ідеальні інтегратори нецілого порядку повинні мати амплітудно-частотні та ФЧХ у логарифмічному масштабі такого вигляду:

$$y(\omega) = 20\beta\lg\omega,\ \varphi(\omega) = \frac{\pi\beta}{2}.$$

Дотепер залишаються не відомими елементи електронних кіл, які реалізують інтегратори нецілих порядків в необмеженому діапазоні частот. У зв'язку з цим задача реалізації інтегратора нецілого порядку може ставитися як апроксимаційна для обмеженого діапазону частот.

Аналіз досліджень та публікацій. Для побудови електронних двополюсників, що приблизно реалізують інтегро-диференціальні оператори нецілих порядків існує декілька підходів:

1) використання електричних провідних середовищ як двополюсника, який має властивості інтегратора порядку $\beta = 1/2$. Частотні характеристики електролітичних напівінтеграторів відрізняються від ідеальних на $20-30$ % у діапазоні частот 0–2 кГц;

2) використання відрізків коаксіальних кабелів, довгих мереж або інших мереж з розподіленими параметрами. При цьому реалізується порядок диференціального оператора $1/2$ та неможливо досягти задовільної точності в низькохвильовому діапазоні [1]. Якщо від однорідних довгих мереж перейти до відповідних мереж з розподіленими параметрами, які змінюються за просторовою координатою за заданим законом, що визначається значенням нецілого порядку β, можна отримати інтегратори різних порядків [2];

3) побудова квазіаналогових електричних кіл, що апроксимують інтегро-диференціальні оператори нецілих порядків [1]. Найпоширенішими є *RC*-кола із зосередженими елементами. Серед них є два типи найбільш оптимальних структур: перше і друге кола Фостера [3].

Постановка завдання. Виконати обчислюваний експеримент з віртуальними моделями інтегро-диферецiаторів нецілих порядків на основі *RC*-кіл Фостера, користуючись програмним середовищем Multisim7. За допомогою логарифмічних амплітудо-частотних характеристик [4] визначити діапазони частот, у яких виконуються характеристики інтегро-диференціаторів заданого порядку.

Основна частина. Згідно з працею [1], розглядаючи фрактальну *RC*-структуру електричного кола (рис. 1, *а*), можна зробити висновок, що частотна залежність вхідного імпедансу за нескінченно великої кількості каскадів пропорційна $(j\omega)^{-\beta}$, де $\beta = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$. Це коло має деревоподібну структуру з ємностями та резисторами, значення яких змінюються від каскаду до каскаду за законом геометричної прогресії. Характерною особливістю такої структури є її фрактальність, будь-яка відрізана частина подібна до всього дерева. Ця схема спрощується, якщо використати її дзеркальну симетрію відносно горизонтальної лінії, що проходить через кореневу гілку. Вузли, які розташовані симетрично один відносно одного, еквіпотенціальні і можуть бути об'єднані. Опори та ємності, розташовані в межах одного каскаду, об'єднуються паралельно і в результаті створюється еквівалентне коло (рис. 1, *б*). Параметр a визначаємо за формулою

$$a = e^{\ln(2)/(1-\beta)}.$$

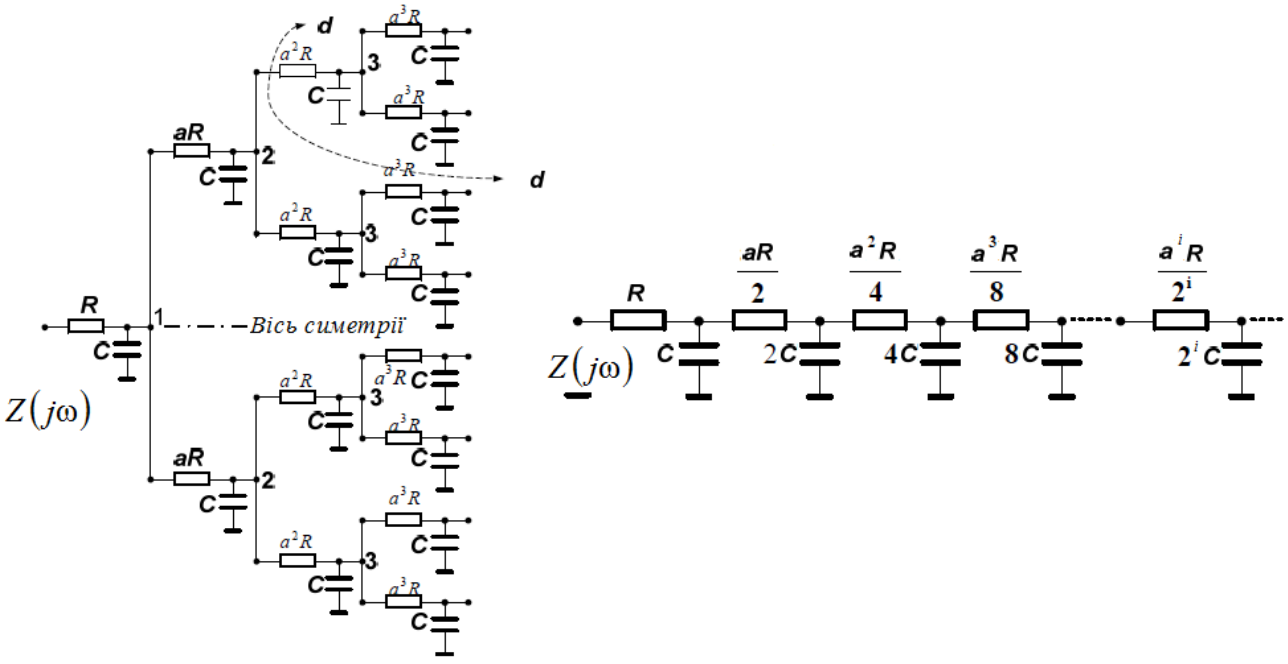
Отже, значення резистивних та ємнісних елементів знаходимо за формулами:

$$R_i = \left(\frac{a}{2}\right)^i R\,;\; C_i = 2^i C\,, \tag{1}$$

де R_i, C_i – опір та ємність i-го каскаду кола.

Спробуємо змоделювати кола інтеграторів на основі кіл Фостера у програмі Multisim відповідно до праці [5]. Для початку розрахуємо значення опорів та ємностей для інтеграторів порядків 0,1– 0,9 за формулами (1). Значення опорів резисторів та ємностей конденсаторів для першого каскаду вибрано відповідно 1 Ом та 1 нФ. Отримані дані наведено у табл. 1.

Складаємо коло з 15 *RC*-каскадів. Вхідним сигналом є струм, виміряний за падінням напруги на вимірювальному резисторі R_{16}. Значення резистора R_{16} беремо 1 кОм. Вихідний сигнал – напруга на вході двополюсника. Таким чином, частотні характеристики відповідають вхідному імпедансу кола. Амплітудно-частотні та фазово-частотні характеристики кола вимірюватимемо за допомогою плотера Боде. Фрактальну структуру *RC*-кола показано на рис. 2, *а*. Плотер Боде генерує частоти в діапазоні, заданому дослідником. Частота будь-яких джерел аналогового сигналу не діє на плотер, але таке джерело обов'язково має бути увімкненим у схемі.



а *б*

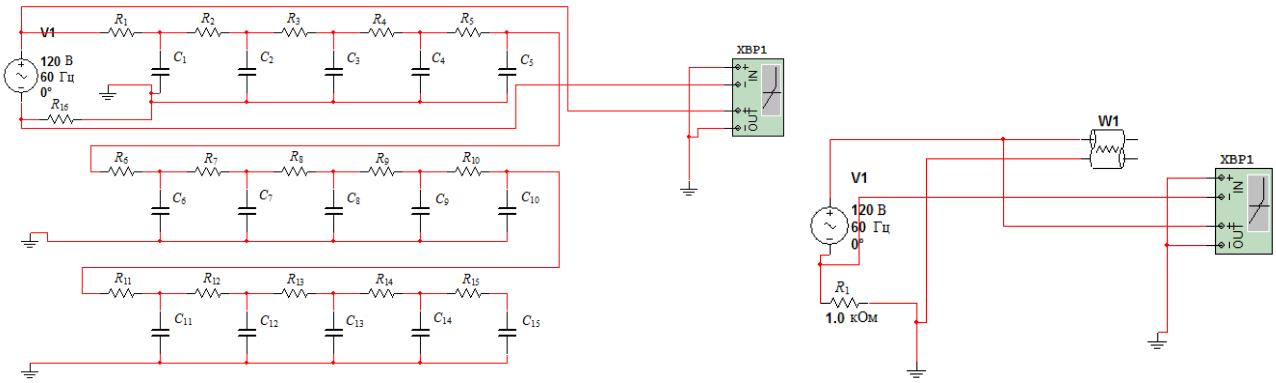
Рис. 1. *RC*-коло: *а* – фрактальної структури; *б* – еквівалентна схема кола

Таблиця 1

Значення опорів та ємностей для інтеграторів порядків 0,1– 0,9

i	R_i, Ом; β = 0,1	R_i, Ом; β = 0,2	R_i, Ом; β = 0,3	R_i, Ом; β = 0,4	R_i, Ом; β = 0,5	R_i, Ом; β = 0,6	R_i, Ом; β = 0,7	R_i, Ом; β = 0,8	R_i, Ом; β = 0,9	C_i, нФ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1,08006	1,18921	1,3459	1,5874	2	2,82843	5,03968	16	512	2
3	1,16653	1,41421	1,81145	2,51984	4	8	25,3984	256	$262{,}144\cdot10^{3}$	4
4	1,25992	1,68179	2,43803	4	8	22,6274	128	$4{,}096\cdot10^{3}$	$134{,}218\cdot10^{6}$	8
5	1,36079	2	3,28134	6,3496	16	64	645,08	$65{,}536\cdot10^{3}$	$68{,}7195\cdot10^{9}$	16
6	1,46973	2,37841	4,41636	10,0794	32	181,019	$3{,}251\cdot10^{3}$	$1{,}04858\cdot10^{6}$	$35{,}1844\cdot10^{12}$	32
7	1,5874	2,82843	5,94398	16	64	512	$16{,}384\cdot10^{3}$	$16{,}7772\cdot10^{6}$	$1{,}80144\cdot10^{16}$	64
8	1,71449	3,36359	8	25,3984	128	$1{,}44815\cdot10^{3}$	$82{,}5702\cdot10^{3}$	$268{,}435\cdot10^{6}$	$9{,}22337\cdot10^{18}$	128
9	1,85175	4	10,7672	40,3175	256	$4{,}096\cdot10^{3}$	$416{,}128\cdot10^{3}$	$4{,}29497\cdot10^{9}$	$4{,}72237\cdot10^{21}$	256
10	2	4,75683	14,4916	64	512	$11{,}5852\cdot10^{3}$	$2{,}09715\cdot10^{6}$	$68{,}7195\cdot10^{9}$	$2{,}41785\cdot10^{24}$	512
11	2,16012	5,65685	19,5042	101,594	$1{,}024\cdot10^{3}$	$32{,}768\cdot10^{3}$	$10{,}569\cdot10^{6}$	$1{,}09951\cdot10^{12}$	$1{,}23794\cdot10^{27}$	1024
12	2,33306	6,72717	26,2507	161,27	$2{,}048\cdot10^{3}$	$92{,}6819\cdot10^{3}$	$53{,}2643\cdot10^{6}$	$17{,}5922\cdot10^{12}$	$6{,}33825\cdot10^{29}$	2048
13	2,51984	8	35,3309	256	$4{,}096\cdot10^{3}$	$262{,}144\cdot10^{3}$	$268{,}435\cdot10^{6}$	$281{,}475\cdot10^{12}$	$3{,}24519\cdot10^{32}$	4096
14	2,72158	9,51366	47,5518	406,375	$8{,}192\cdot10^{3}$	$741{,}455\cdot10^{3}$	$1{,}35283\cdot10^{9}$	$4{,}5036\cdot10^{15}$	$1{,}66153\cdot10^{35}$	8192
15	2,93947	11,3137	64	645,08	$16{,}384\cdot10^{3}$	$2{,}09715\cdot10^{6}$	$6{,}81784\cdot10^{9}$	$7{,}20576\cdot10^{16}$	$8{,}50706\cdot10^{37}$	16384

Результати експерименту – середні значення амплітудних, фазових характеристик та інтервал зміни частоти для обраних параметрів резисторів та ємностей, а також зі збільшенням значень опорів резисторів у 10 раз та результати для короткозамкнутого кола Фостера наведено в табл. 2. Апроксимації інтегральних операторів порядків $\beta = 0,3$, $\beta = 0,5$, $\beta = 0,7$ показано на рис. 3 – 5.



а *б*

Рис. 2. Схема підключення віртуального вимірювача частотних характеристик:
а – 15-каскадного кола Фостера; *б* – довгої лінії

Розглянемо також реалізацію інтегро-диференціальних операторів нецілих порядків за допомогою однорідних довгих ліній (рис. 2, *б*). Результати моделювання наведено у табл. 3.

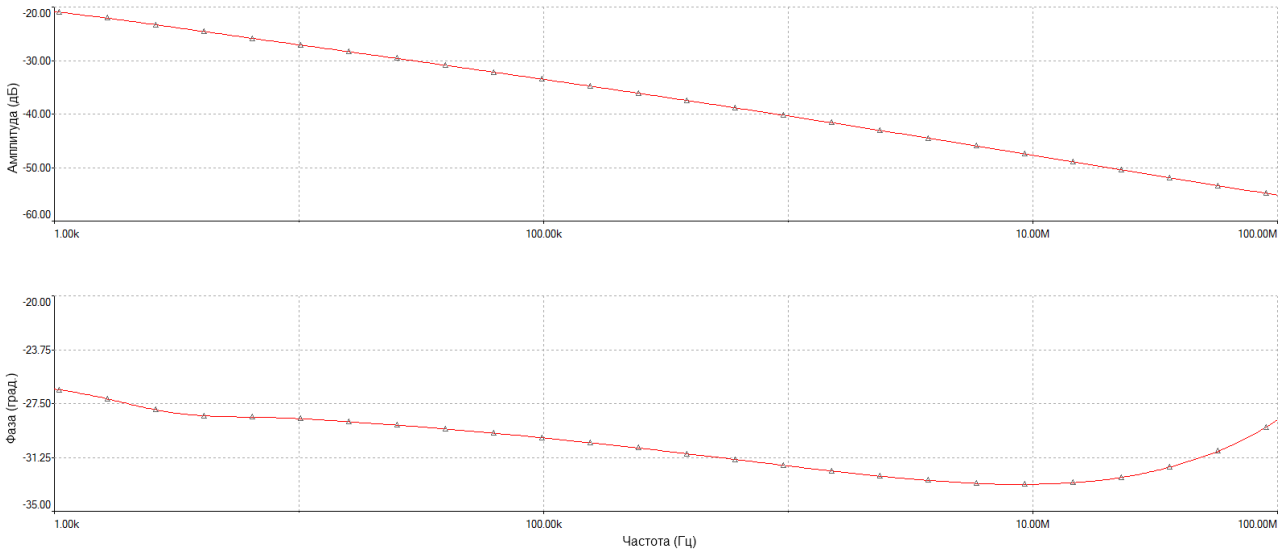


Рис. 3. Частотні характеристики для $\beta = 0,3$

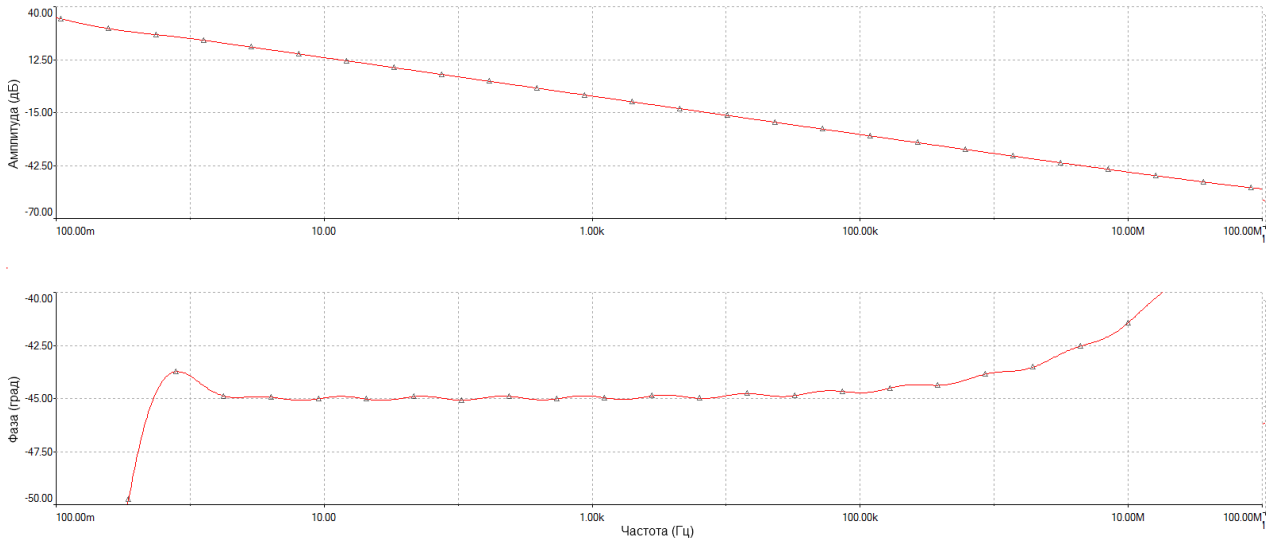


Рис. 4. Частотні характеристики для $\beta = 0,5$

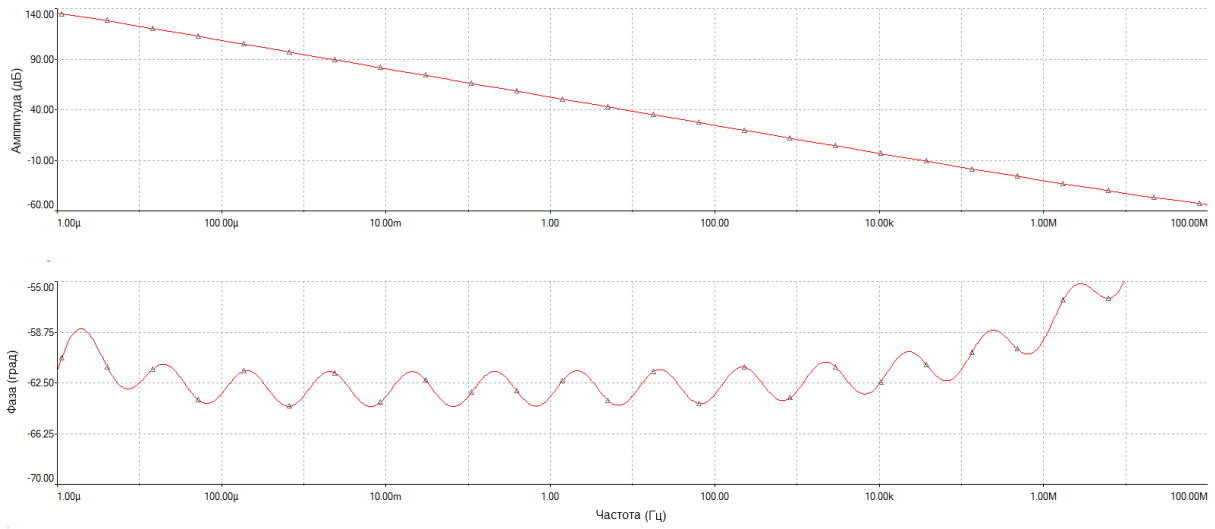


Рис. 5. Частотні характеристики для $\beta = 0,7$

Таблиця 2

Середні значення амплітудних, фазових характеристик та інтервал зміни частоти для обраних параметрів резисторів та ємностей

Значення β	$R = 1$ Ом, ($R = 10$ Ом), $C = 1$ нФ			Короткозамкнуте коло $R = 1$ Ом, $C = 1$ нФ		
	$\overline{\text{АЧХ}}$, дБ/10Гц	$\overline{\text{ФЧХ}}$, град	Δf, Гц	$\overline{\text{АЧХ}}$, дБ/10Гц	$\overline{\text{ФЧХ}}$, град	Δf, Гц
0,1	3,02 (3,07)	-16,5 (-16,4)	10^3–10^5 (10^2–10^4)	3,63	-13,8	10^3–10^5
0,2	5,04 (4,07)	-22,8 (-20,3)	10^3–10^6 (10–10^3)	4,54	-23,2	10^2–10^6
0,3	6,73 (6,4)	-29,9 (-29,3)	10^3–10^7 (10–10^6)	6,69	-29,9	10^2–10^7
0,4	8,01 (8,06)	-36,7 (-36,8)	10–10^8 (1–10^7)	8,23	-36,7	10–10^8
0,5	9,89 (10,04)	-45,9 (-44,6)	0,1–10^8 (10^{-2}–10^6)	9,87	-44,7	1–10^8
0,6	11,86 (11,9)	-53,7 (-53,7)	10^{-3}–10^7(10^{-4}–10^6)	12,03	-53,7	10^{-2}–10^6
0,7	13,73 (13,76)	-63,04(-62,8)	10^{-6}–10^7 (10^{-6}-10^6)	13,81	-63	10^{-6}–10^7
0,8	15,52 (15,43)	-65,3 (-71,6)	10^{-5}–10^8(10^{-5}–10^7)	15,51	-70,9	10^{-5}–10^8
0,9	17,72 (17,52)	-77,3 (-74,9)	10^{-3}–10^8(10^{-3}–10^7)	18,01	-80,3	10^{-3}–10^4

Таблиця 3

Результати моделювання інтегро-диференціальних операторів нецілих порядків за допомогою однорідних довгих ліній

Значення параметрів кола	$\overline{\text{АЧХ}}$, дБ/10Гц	$\overline{\text{ФЧХ}}$, град	Δf, Гц
L=1 м, R=1 кОм, C = 1 нФ	3,02 (3,07)	-16,5 (-16,4)	10^3–10^5 (10^2–10^4)
L=10 м, R=1 кОм, C =1 нФ	5,04 (4,07)	-22,8 (-20,3)	10^3–10^6 (10–10^3)
L=100 м, R=1 кОм, C =1 нФ	6,73 (6,4)	-29,9 (-29,3)	10^3–10^7 (10–10^6)
L=1 м, R=10 кОм, C =1 нФ	8,01 (8,06)	-36,7 (-36,8)	10–10^8 (1–10^7)
L=1 м, R=100 кОм, C =1 нФ	9,89 (10,04)	-45,9 (-44,6)	0,1–10^8 (10^{-2}–10^6)
L=1 м, R=1 кОм, C =10 нФ	11,86 (11,9)	-53,7 (-53,7)	10^{-3}–10^7 (10^{-4}–10^6)
L=1 м, R=1 кОм, C =100 нФ	13,73 (13,76)	-63,04 (-62,8)	10^{-6}–10^7 (10^{-6}–10^6)

Висновки. Як видно з результатів виконаних експериментів, використання кіл Фостера для реалізації інтегро-диференціальних операторів нецілих порядків дозволяють отримати апроксимації із задовільною точністю у діапазоні 2–12 десяткових порядків зміни частоти. При цьому найбільш точна апроксимація спостерігається для значень $\beta = 0,4$, $\beta = 0,5$, $\beta = 0,6$, $\beta = 0,7$. Для інших значень β АЧХ та ФЧХ мають деякі відхилення від ідеальних характеристик. Для кола зі збільшеним у 10 разів значенням опору резистора спостерігається зміна діапазону частот у бік менших частот.

Апроксимація інтегро-диференціальних операторів нецілих порядків за допомогою однорідних довгих ліній дозволяє отримати результат тільки для значення диференціального оператора $\beta = 1/2$.

Список літератури

1. *Васильев В. В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем: науч. издание / В. В. Васильев, Л. А. Симак – К.: НАН Украины, 2008. — 256 с. – ISBN 978-966-02-4384-2.
2. *Poinot T.* A method for modeling and simulation of fractional systems / T. Poinot, J.-C. Trigeassou // Special Issue of Signal Processing. – 2003. – Vol.83, No 11. – P. 2319 – 2333.
3. *Haba T. C.* Use of a Component with Fractional Impedance in the Realization of an Analog Regulator of Order ½ / T. C. Haba, G. L. Loum, J. T. Zoueu // Journal of Applied Sciences 8(1). – 2008 – P. 59 – 67.
4. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Д. П. Ким – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 – 288 с. – ISBN 5-9221-0379-2.
5. *Electronics* Worcbench and Multisim. Введение в Multisim// ni.com. / Russia. – National Instruments, 2006. – 44 с. http://digital.ni.com/worldwide/russia.nsf/.../Multisim%20Getting%20Started.pdf.

В. В. Васильев, О. А. Качмарчик, Е. В. Киркач

Сравнительный анализ частотных характеристик аппроксиматоров интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков на основе цепных *RC*-схем

Выполнены вычислительные эксперименты с виртуальными моделями интегро-дифференциаторов нецелых порядков на основе *RC*-цепей Фостера. Определены диапазоны, в которых выполняются характеристики интегро-дифференциаторов заданного порядка.

V. V. Vasylyev, O. A. Kachmarchik, E. V. Kyrkach

The comparative analysis of frequency characteristics of approximators integro-differential operators of non-integer orders on the basis of chain *RC*-schemes

Computing experiments with virtual models integro-differentiators of non-integer orders on basis of *RC*-circuits of Foster are executed. Ranges of frequencies in which characteristics of integro-differentiators of the set order are carried out are defined.